УДК 517.95

Н. М. Гузик

ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ З ВИРОДЖЕННЯМ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

N. M. Huzyk. *Identification of the unknown parameters in the parabolic equation in a free boundary domain*, Mat. Stud. **51** (2019), 168–182.

In a free boundary domain there are established conditions of the existence and uniqueness of the classical solution to the inverse problem of identification of the time-dependent both major and minor coefficients in the parabolic equation with degeneration. The case of arbitrary weak degeneration is investigated.

У зв'язку з потребами практики в останні десятиліття активно вивчаються коефіцієнтні обернені задачі для параболічних рівнянь. Так, обернені задачі визначення залежного від часу старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні досліджено в [1]–[5], а молодшого в [6]–[10]. Однак на сьогодні актуальними є задачі одночасного визначення декількох параметрів у параболічному рівнянні. Такі задачі розглядались в [11]–[13]. Усі наведені вище праці досліджувались в областях з відомими межами.

З іншого боку, умови розв'язності обернених задач визначення залежного від часу старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з вільною межею знайдено в [14], [15], а коефіцієнта перед першою похідною невідомої функції в [16], [17]. У цих роботах задавались різні набори крайових умов (Діріхле, Неймана) та умов перевизначення (умова Стефана, інтегральні умови, нелокальні умови тощо). Дослідженню обернених задач одночасного визначення двох коефіцієнтів у параболічному рівнянні в області з вільною межею присвячені роботи [18], [19].

Обернені задачі для параболічних рівнянь з виродженням досліджені мало. У роботах [20]–[22] вивчались коефіцієнтні обернені задачі, проте виродження рівняння спричинене функцією, що залежить від просторової змінної. Обернені задачі визначення коефіцієнта $a = a(t), a(t) > 0, t \in [0, T]$ у рівнянні

$$u_t = a(t)t^{\beta}u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t)$$

в області з відомими межами досліджувались у [23], [24], а в області з вільною межею — в [25], [26]. Досліджено випадки сильного ($\beta \geq 1$) та слабкого ($0 < \beta < 1$) виродження. Умови коректної розв'язності оберненої задачі визначення залежних від часу старшого та молодшого коефіцієнтів у параболічному рівнянні з слабким степеневим виродженням в області з відомими межами знайдено в [27].

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35R30, 35R35, 35K65.
Keywords: coefficient inverse problem; parabolic equation; arbitrary weak degeneration.
doi:10.15330/ms.51.2.168-182

У роботі в області з вільною межею розглядається коефіцієнтна обернена задача одночасного визначення залежних від часу старшого та молодшого коефіцієнтів у параболічному рівнянні з виродженням. Відомо, що виродження рівняння спричиняє монотонно зростаюча функція, яка обертається в нуль в початковий момент часу. Для визначення невідомих параметрів у роботі задаються крайові умови Діріхле, а також умову Стефана, інтегральну умову (які випливають із закону збереження енергії) та значення теплового потоку в якості умов перевизначення. Дослідження проводиться у випадку слабкого виродження.

1. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x,t)\colon 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $h = h(t),\ h(t) > 0,\ t \in [0,T]$ — невідома функція, розглядається обернена задача визначення коефіцієнтів $a = a(t), a(t) > 0, t \in [0,T]$ та $b = b(t)$ в рівнянні

$$u_t = a(t)\psi(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами Діріхле

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$h'(t) = -u_x(h(t),t) + \mu_3(t),\ t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

$$a(t)\psi(t)u_x(0,t) = \mu_5(t),\ t \in [0,T], \tag{6}$$

де $h_0 \equiv h(0) > 0$ — відома стала.

Припускаємо, що $\psi = \psi(t)$ — монотонно зростаюча функція, така, що $\psi(t) > 0$, $(t \in (0,T])$, $\psi(0) = 0$. Дослідження проводиться у випадку слабкого виродження, тобто, коли виконується умова

$$\lim_{t\to 0} \int_0^t \Big(\int_\tau^t \psi(\sigma)d\sigma \Big)^{-\frac{1}{2}} d\tau = 0.$$

Зауважимо, що якщо для $\varepsilon > 0$ і всіх $\tau \in (0, t_0)$ виконується нерівність $\tau/\psi(\tau) < \varepsilon$, то для всіх $t \in (0, t_0)$

$$\int_0^t \Big(\int_\tau^t \psi(\sigma)d\sigma \Big)^{-\frac{1}{2}} d\tau \le \int_0^t \big(\psi(\tau)(t-\tau)\big)^{-\frac{1}{2}} d\tau \le \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \big(\tau(t-\tau)\big)^{-\frac{1}{2}} d\tau \le 4\sqrt{\varepsilon}.$$

З іншого боку

$$\int_0^t \Big(\int_\tau^t \psi(\sigma)d\sigma \Big)^{-\frac{1}{2}} d\tau \ge \frac{1}{\sqrt{\psi(t)}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = 2\sqrt{\frac{t}{\psi(t)}},$$

тому, умова слабкого виродження еквівалентна до умови $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\psi(t)} = 0$.

Крім цього, $\int_0^t d\tau/\psi(\tau) \geq \int_{t/2}^t d\tau/\psi(\tau) \geq t/(2\psi(t))$. Це означає, що у означенні слабкого виродження від функції $\psi = \psi(t)$ достатньо вимагати, щоб

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)} = 0.$$

При цьому остання умова є еквівалентною до умови слабкого виродження, якщо функція ψ така, що $\int_0^t d\tau/\psi(\tau) = O\big(t/\psi(t)\big)$ $(t \to +0)$.

Означення 1. Набір функцій $(a, b, h, u) \in (C[0,T])^2 \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$, $a(t) > 0,\ h(t) > 0,\ t \in [0,T]$ назвемо *розв'язком задачі* (1)–(6), якщо він задовольняє рівняння (1)і умови (2)–(6).

Мета роботи — встановити умови існування та єдиності розв'язку задачі (1)–(6).

За допомогою заміни змінних $y = \frac{x}{h(t)},\ t = t$ задачу (1)–(6) зведемо до коефіцієнтної оберненої задачі відносно невідомих $(a, b, h, v),\ v(y,t) = u(xh(t), t)$ в області з фіксованими межами $Q_T = \{(y,t)\colon\ 0 < y < 1,\ 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(t)\psi(t)}{h^2(t)}v_{yy} + \frac{b(t) + yh'(t)}{h(t)}v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t), \tag{7}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)),\ y \in [0,1], \tag{8}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t),\ v(1,t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T], \tag{9}$$

$$h'(t) = -\frac{v_y(1,t)}{h(t)} + \mu_3(t),\ t \in [0,T], \tag{10}$$

$$h(t)\int_0^1 v(y,t)dy = \mu_4(t),\ t \in [0,T], \tag{11}$$

$$\frac{a(t)\psi(t)}{h(t)}v_y(0,t) = \mu_5(t),\ t \in [0,T]. \tag{12}$$

2. Існування розв'язку задачі (1)–(6).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

(A1) $c, f \in C([0,\infty) \times [0,T])$ *та задовольняють локально умову Гельдера за змінною* x *з показником* $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$ *рівномірно відносно* $t,\ \varphi \in C^1([0,h_0]),\ \mu_i \in C^1[0,T]$, $i \in \{1,2,3,4\}$;

(A2) $\varphi(x) > 0,\ \varphi'(x) > 0,\ x \in [0,h_0],\ \mu_4(t) > 0,\ t \in [0,T]$;

(A3) $\mu_5(t) = \mu_{5,0}(t)\psi(t), \mu_{5,0} \in C([0,T]),\ \mu_{5,0}(t) > 0,\ t \in [0,T]$;

(A4) $\psi(t) > 0$, $t \in (0,T]$, $\psi(0) = 0$ — *монотонно зростаюча функція така, що*

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t \Big(\int_\tau^t \psi(\sigma)d\sigma\Big)^{-\frac{1}{2}}d\tau = 0;$$

(A5) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h_0) = \mu_2(0)$, $\int_0^{h_0}\varphi(x)dx = \mu_4(0)$.

Тоді існує єдиний розв'язок $(a, b, h, u) \in (C[0,T_0])^2 \times C^1[0,T_0] \times (C^{2,1}(\Omega_{T_0}) \cap C(\overline{\Omega}_{T_0}))$, $a(t) > 0$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T_0]$ *задачі* (1)–(6), *де число* T_0, $0 < T_0 \leq T$ *визначається вихідними даними цієї задачі.*

Доведення. Оскільки задача (1)–(6) є еквівалентною до задачі (7)–(12), то надалі досліджуватимемо задачу (7)–(12). Для початку зведемо її до системи рівнянь. Для цього припустимо тимчасово, що функції $a = a(t), b = b(t)$ відомі. У прямій задачі (7)–(9) проведемо заміну змінних

$$v(y,t) = \widetilde{v}(y,t) + \varphi(yh_0) - \varphi(0) + \mu_1(t) + y(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)). \tag{13}$$

У результаті для функції $\widetilde{v} = \widetilde{v}(y,t)$ отримаємо рівняння

$$\widetilde{v}_t = \frac{a(t)\psi(t)}{h^2(t)}\widetilde{v}_{yy} + \frac{b(t)+yh'(t)}{h(t)}\widetilde{v}_y + c(yh(t),t)\widetilde{v} + f(yh(t),t) - \mu_1'(t) - y(\mu_2'(t) - \mu_1'(t)) +$$
$$+\frac{h_0^2 a(t)\psi(t)}{h^2(t)}\varphi''(yh_0) + \frac{b(t)+yh'(t)}{h(t)}\Big(h_0\varphi'(yh_0) + \mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)\Big) +$$
$$+c(yh(t),t)\Big(\varphi(yh_0) - \varphi(0) + \mu_1(t) + y(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0))\Big),\ (y,t) \in Q_T, \tag{14}$$

з однорідними початковою та крайовими умовами

$$\widetilde{v}(y,0) = 0, \quad y \in [0,1], \quad \widetilde{v}(0,t) = 0, \quad \widetilde{v}(1,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{15}$$

За допомогою функції Гріна $G_1 = G_1(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\widetilde{v}_t = \frac{a(t)\psi(t)}{h^2(t)}\widetilde{v}_{yy} \tag{16}$$

задачу (14)–(15) зведемо до інтегро-диференціального рівняння

$$\widetilde{v}(y,t) = \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Big(\frac{b(\tau)+\eta h'(\tau)}{h(\tau)}\widetilde{v}_\eta + c(\eta h(\tau),\tau)\widetilde{v} + f(\eta h(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau) -$$
$$-\eta(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + \frac{h_0^2 a(\tau)\psi(\tau)}{h^2(\tau)}\varphi''(\eta h_0) +$$
$$+\frac{b(\tau)+\eta h'(\tau)}{h(\tau)}\Big(h_0\varphi'(\eta h_0) + \mu_2(\tau) - \mu_1(\tau) - \mu_2(0) + \mu_1(0)\Big) +$$
$$+c(\eta h(\tau),\tau)\Big(\varphi(\eta h_0) - \varphi(0) + \mu_1(\tau) + \eta(\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau) - \mu_2(0) + \mu_1(0))\Big)d\eta d\tau. \tag{17}$$

Відомо ([28, с. 12]), що функції Гріна $G_k = G_k(y,t,\eta,\tau), k = 1,2$ першої $(k=1)$ та другої $(k=2)$ крайових задач для рівняння (16) задаються формулами

$$G_k(y,t,\eta,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) + \right.$$
$$\left. +(-1)^k \exp\left(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right),\ k = 1,2, \tag{18}$$

де $\theta(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{a(\tau)\psi(\tau)}{h^2(\tau)}d\tau$. Виходячи з (18), легко показати, що вони мають такі властивості:

$$G_{1y}(y,t,\eta,\tau) = -G_{2\eta}(y,t,\eta,\tau), \quad G_{1yy}(y,t,\eta,\tau) = G_{1\eta\eta}(y,t,\eta,\tau), \tag{19}$$

$$\int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)d\eta = 1,\ \int_0^1 |G_{1y}(y,t,\eta,\tau)|d\eta \le \frac{C_1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \tag{20}$$

де C_1 — додатна стала.

Позначимо $w(y,t) \equiv v_y(y,t)$. Тоді умову (10) можна подати у вигляді

$$h'(t) = \frac{\mu_3(t)h(t) - w(1,t)}{h(t)}, \quad t \in [0,T]. \tag{21}$$

Використовуючи (14), (18), (21), пряму задачу (7)–(9) замінимо системою інтегральних рівнянь для функцій $v = v(y,t), w = w(y,t)$:

$$v(y,t) = \varphi(yh_0) - \varphi(0) + \mu_1(t) + y(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)) +$$
$$+ \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Big(\Big(\frac{b(\tau)}{h(\tau)} + \frac{\eta(\mu_3(\tau)h(\tau) - w(1,\tau))}{h^2(\tau)}\Big)w(\eta,\tau) + c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau) +$$
$$+ f(\eta h(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau) - \eta(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + \frac{h_0^2 a(\tau)\psi(\tau)}{h^2(\tau)}\varphi''(\eta h_0)\Big)d\eta d\tau,\ (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{22}$$
$$w(y,t) = h_0\varphi'(yh_0) + \mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0) +$$
$$+ \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\Big(\Big(\frac{b(\tau)}{h(\tau)} + \frac{\eta(\mu_3(\tau)h(\tau) - w(1,\tau))}{h^2(\tau)}\Big)w(\eta,\tau) + c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau) +$$
$$+ f(\eta h(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau) - \eta(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + \frac{h_0^2 a(\tau)\psi(\tau)}{h^2(\tau)}\varphi''(\eta h_0)\Big)d\eta d\tau,\ (y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{23}$$

Зауважимо, що рівняння (23) отримано з (22) шляхом диференціювання за просторовою змінною. З умов (11), (12) знаходимо:

$$a(t) = \frac{h(t)\mu_5(t)}{\psi(t)w(0,t)}, \quad t \in [0,T], \tag{24}$$

$$h(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int_0^1 v(y,t)dy},\ t \in [0,T]. \tag{25}$$

Для того, щоб знайти рівняння для $b = b(t)$, продиференціюємо (11) за t та використаємо (7)–(12):

$$b(t) = (\mu_2(t) - \mu_1(t))^{-1}\Big(\mu_4'(t) + \mu_5(t) - \mu_3(t)\mu_2(t) - \frac{w(1,t)}{h(t)}(a(t)\psi(t) - \mu_2(t)) -$$
$$-h(t)\int_0^1 \big(c(\eta h(t),t)v(\eta,t) + f(\eta h(t),t)\big)d\eta\Big),\ t \in [0,T]. \tag{26}$$

Покажемо, що знаменники у формулах (24)–(26) відмінні від нуля. Для цього знайдемо поведінку інтегралів, що входять до правих частин формул (22), (23), коли t прямує до нуля. Враховуючи (20), одержимо

$$I_1 \equiv \Big|\int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Big(\Big(\frac{b(\tau)}{h(\tau)} + \frac{\eta(\mu_3(\tau)h(\tau) - w(1,\tau))}{h^2(\tau)}\Big)w(\eta,\tau) + c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau) +$$
$$+ f(\eta h(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau) - \eta(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + \frac{h_0^2 a(\tau)\psi(\tau)}{h^2(\tau)}\varphi''(\eta h_0)\Big)d\eta d\tau\Big| \le C_2 t, \tag{27}$$

$$I_2 \equiv \left| \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau) \bigg(\Big(\frac{b(\tau)}{h(\tau)} + \frac{\eta(\mu_3(\tau)h(\tau) - w(1,\tau))}{h^2(\tau)} \Big) w(\eta,\tau) + c(\eta h(\tau),\tau) v(\eta,\tau) + \right.$$

$$\left. + f(\eta h(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau) - \eta(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + \frac{h_0^2 a(\tau)\psi(\tau)}{h^2(\tau)} \varphi''(\eta h_0) \bigg) d\eta d\tau \right| \leq$$

$$\leq C_3 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \leq C_4 \int_0^t \Big(\int_\tau^t \psi(\sigma) d\sigma \Big)^{-\frac{1}{2}} d\tau. \tag{28}$$

Беручи до уваги означення слабкого виродження, робимо висновок, що вирази I_1, I_2 прямують до нуля, коли t прямує при нуля. Враховуючи умови теореми, можемо стверджувати, що існує таке число $t_1, 0 < t_1 \leq T$, що виконуються нерівності

$$\left| \mu_1(t) - \varphi(0) + y(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) \bigg(\Big(\frac{b(\tau)}{h(\tau)} + \right.$$

$$+ \frac{\eta(\mu_3(\tau)h(\tau) - w(1,\tau))}{h^2(\tau)} \Big) w(\eta,\tau) + c(\eta h(\tau),\tau) v(\eta,\tau) + f(\eta h(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau) -$$

$$\left. - \eta(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + \frac{h_0^2 a(\tau)\psi(\tau)}{h^2(\tau)} \varphi''(\eta h_0) \bigg) d\eta d\tau \right| \leq \frac{\min\limits_{y\in[0,1]} \varphi(yh_0)}{2}, \tag{29}$$

$(y,t) \in [0,1] \times [0,t_1]$, а також

$$\frac{h_0 \varphi'(yh_0)}{2} + \mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0) + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau) \bigg(\Big(\frac{b(\tau)}{h(\tau)} +$$

$$+ \frac{\eta(\mu_3(\tau)h(\tau) - w(1,\tau))}{h^2(\tau)} \Big) w(\eta,\tau) + c(\eta h(\tau),\tau) v(\eta,\tau) + f(\eta h(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau) -$$

$$- \eta(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + \frac{h_0^2 a(\tau)\psi(\tau)}{h^2(\tau)} \varphi''(\eta h_0) \bigg) d\eta d\tau \geq 0, \quad (y,t) \in [0,1] \times [0,t_1]. \tag{30}$$

Тоді з рівнянь (22), (23) випливає, що для $(y,t) \in [0,1] \times [0,t_1]$

$$0 < M_0 \equiv \frac{\min\limits_{y\in[0,1]} \varphi(yh_0)}{2} \leq v(y,t) \leq \max_{y\in[0,1]} \varphi(yh_0) + \frac{\min\limits_{y\in[0,1]} \varphi(yh_0)}{2} \equiv M_1, \tag{31}$$

а також

$$w(y,t) \geq \frac{h_0 \min\limits_{y\in[0,1]} \varphi'(yh_0)}{2} \equiv M_2 > 0, \quad (y,t) \in [0,1] \times [0,t_1]. \tag{32}$$

Оскільки $\mu_2(t) - \mu_1(t) = \int_0^1 w(y,t)dy, \ t \in [0,T]$, то, враховуючи (31), (32), отримаємо, що знаменники в формулах (24)–(26) відмінні від нуля на відрізку $[0,t_1]$.

Отже, задачу (7)–(12) зведено до еквівалентної системи рівнянь (22)–(26) при $(y,t) \in \overline{Q}_{t_1}, \ Q_{t_1} \equiv (0,1) \times (0,t_1)$. Еквівалентність розуміємо так: якщо набір функцій (a,b,h,v) є розв'язком задачі (7)–(12) при $(y,t) \in \overline{Q}_{t_1}$, то функції $(v,w,a,h,b) \in (C(\overline{Q}_{t_1}))^2 \times (C[0,t_1])^3$ є розв'язком системи (22)–(26), і, навпаки, якщо (v,w,a,h,b) — неперервний розв'язок системи (22)–(26) для $(y,t) \in \overline{Q}_{t_1}$, то $(a,b,h,v) \in (C[0,t_1])^2 \times C^1[0,t_1]) \times (C^{2,1}(Q_{t_1}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{t_1}))$ — розв'язок задачі (7)–(12). Перша частина твердження випливає зі способу отримання системи рівнянь (22)–(26). Покажемо, що правильним є і зворотне твердження.

Припустимо, що (v, w, a, h, b) — неперервний розв'язок системи (22)–(26) для $(y,t) \in \overline{Q}_{t_1}$. Враховуючи припущення теореми, ми можемо продиференціювати рівність (22) за y. Оскільки праві частини отриманої рівності та рівності (23) однакові, то $w(y,t) \equiv v_y(y,t)$. Крім того, функція $v = v(y,t)$ належить до класу $C^{1,0}(\overline{Q}_{t_1})$, задовольняє умови (8), (9) та рівняння

$$v_t = \frac{a(t)\psi(t)}{h^2(t)} v_{yy} + \Big(\frac{b(t)}{h(t)} + \frac{y(\mu_3(t)h(t) - w(1,t))}{h^2(t)}\Big) v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t). \tag{33}$$

Далі перепишемо умову (25) у вигляді $h(t)\int_0^1 v(y,t)dy = \mu_4(t)$. Враховуючи умови гладкості на вихідні дані, одержимо $h \in C^1[0,t_1]$. Продиференціюємо останню рівність, використовуючи (33), (24)–(26). Отримаємо

$$b(t) = (\mu_2(t) - \mu_1(t))^{-1}\Bigg(\mu_4'(t) + \mu_5(t) - \mu_3(t)\mu_2(t) - h(t)\int_0^1 \Big(c(yh(t),t)v(y,t) +$$

$$+ f(yh(t),t)\Big)dy - \frac{h'(t)\mu_4(t)}{h(t)} + \frac{\mu_3(t)\mu_4(t)}{h(t)} - v_y(1,t)\Big(\frac{\mu_4(t)}{h^2(t)} + \frac{\mu_2(t) - a(t)\psi(t)}{h(t)}\Big)\Bigg). \tag{34}$$

Віднявши від рівності (34) рівність (26), знаходимо

$$-\frac{\mu_4(t)}{h(t)}\left(h'(t) - \mu_3(t) + \frac{v_y(1,t)}{h(t)}\right) = 0.$$

Це означає, що виконується умова (10). Тоді функція $v = v(y,t)$ є розв'язком рівняння (7), а умови (24), (25) відповідають (12), (11), відповідно. Еквівалентність задачі (7)–(12) та системи рівнянь (22)–(26) встановлено.

Надалі доводитимемо існування розв'язку системи рівнянь (22)–(26). Для цього застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Встановимо апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (22)–(26). Для функцій $v = v(y,t)$, $w = w(y,t)$ правильними залишаються оцінки (31), (32). З рівняння (25), використовуючи (31), одержимо

$$0 < H_0 \le \frac{\min\limits_{t\in[0,T]} \mu_4(t)}{M_1} \le h(t) \le \frac{\max\limits_{t\in[0,T]} \mu_4(t)}{M_0} \equiv H_1 < \infty, \ t \in [0,t_1]. \tag{35}$$

Враховуючи (32), (35), з рівняння (24), матимемо

$$a(t) \le \frac{H_1 \max\limits_{t\in[0,T]} \mu_{5,0}(t)}{M_2} \equiv A_1 < \infty, \ t \in [0,t_1]. \tag{36}$$

Позначимо $W(t) = \max\limits_{y\in[0,1]} w(y,t)$. Тоді з рівнянь (24), (26) знаходимо

$$a(t) \ge \frac{H_0 \min\limits_{t\in[0,T]} \mu_{5,0}(t)}{W(t)}, \ t \in [0,t_1], \tag{37}$$

$$|b(t)| \le C_5(1 + W(t)), \ t \in [0,t_1]. \tag{38}$$

Далі використаємо (31), (36), (38) щоб, виходячи з (23), оцінити $W = W(t)$ зверху:

$$W(t) \le C_6 + C_7 \int_0^t \frac{1 + W(t) + W^2(t)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau, \ t \in [0,t_1].$$

Позначимо $W_1(t) = W(t) + 1$. Тоді останню нерівність подамо у вигляді

$$W_1(t) \leq C_8 + C_7 \int_0^t \frac{W_1^2(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}, \ t \in [0, t_1]. \tag{39}$$

Піднесемо обидві частини нерівності (39) до квадрату, використовуючи при цьому нерівності Коші та Коші-Буняковського:

$$W_1^2(t) \leq 2C_8^2 + 2C_7^2 \int_0^t \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}. \tag{40}$$

Введемо позначення $a_{\min}(t) = \min\limits_{0 \leq \tau \leq t} a(\tau), \ t \in [0, t_1]$. З умов теореми та нерівності (37), матимемо $a_{\min}(t) > 0, \ t \in [0, t_1]$. Розглянемо інтеграл

$$I_3 = \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \leq \frac{C_9}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}},$$

де $\theta_0(t) = \int_0^t \psi(\sigma)d\sigma$. Враховуючи означення слабкого виродження, матимемо

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} = \int_0^t \left(\int_\tau^t \psi(\sigma)d\sigma \right)^{-\frac{1}{2}} d\tau \leq C_{10}.$$

Це означає, що $I_3 \leq \frac{C_{11}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}$. Застовуючи останню оцінку до (40), приходимо до нерівності

$$W_1^2(t) \leq C_{12} + \frac{C_{13}}{a_{\min}(t)} \int_0^t \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}}.$$

В останній нерівності змінимо t на σ і, домноживши на $\frac{1}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\sigma)}}$, проінтегруємо її по σ від 0 до t. Використовуючи рівність

$$\int_\tau^t \frac{\psi(\sigma)d\sigma}{\sqrt{(\theta_0(t) - \theta_0(\sigma))(\theta_0(\sigma) - \theta_0(\tau))}} = \pi,$$

матимемо

$$\int_0^t \frac{W_1^2(\sigma)}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\sigma)}} d\sigma \leq C_{14} + \frac{C_{15}}{a_{\min}(t)} \int_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau.$$

Підставляючи останню нерівність в (39), одержуємо

$$W_1(t) \leq C_8 + \frac{C_{16}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{17}}{a_{\min}^{\frac{3}{2}}(t)} \int_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau, \ t \in [0, t_1]. \tag{41}$$

Позначимо

$$\Phi(t) = C_8 + \frac{C_{16}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}, \ \chi(t) = \frac{C_{17}}{a_{\min}^{\frac{3}{2}}(t)}, \tag{42}$$

$$H(t) = \frac{\Phi(t)}{\chi(t)} + \int_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau, \ t \in [0, t_1]. \tag{43}$$

Тоді з (42) матимемо

$$\frac{W_1(t)}{\chi(t)} \leq H(t), \ t \in [0, t_1]. \tag{44}$$

Продиференціюємо (43). Враховуючи (44), одержуємо

$$H'(t) \le \left(\frac{\Phi(t)}{\chi(t)}\right)' + \frac{\chi^4(t)}{\psi(t)} H^4(t). \tag{45}$$

Останню нерівність поділимо на $H^4(t)$ і проінтегруємо її від 0 до t. Матимемо

$$\frac{1}{3H^3(0)} - \frac{1}{3H^3(t)} \le \frac{\Phi(t)}{\chi(t)} \frac{1}{H^4(t)} - \frac{\Phi(0)}{\chi(0)} \frac{1}{H^4(0)} + 4\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\chi(\tau)} \frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{\chi^4(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau,$$

звідки

$$\frac{H^4(t)}{3H^3(0)} \left(4 - 3H^3(0) \left(4\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\chi(\tau)} \frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{\chi^4(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau\right)\right) \le \frac{\Phi(t)}{\chi(t)} + \frac{H(t)}{3}, \tag{46}$$

де $H(0) = \frac{\Phi(0)}{\chi(0)}$. В інтегралі $\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\chi(\tau)} \frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)} d\tau$ зробимо заміну $\sigma = H(\tau)$. Отримаємо

$$\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\chi(\tau)} \frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)} d\tau = \int_{H(0)}^{H(t)} \frac{\Phi(H^{-1}(\sigma))}{\chi(H^{-1}(\sigma))} \frac{d\sigma}{\sigma^5},$$

де $H^{-1}(\sigma)$ — обернена функція до $H(t)$. Оскільки

$$\int_{H(0)}^{H(t)} \frac{\Phi(H^{-1}(\sigma))}{\chi(H^{-1}(\sigma))} \frac{d\sigma}{\sigma^5} + \int_0^t \frac{\chi^4(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau \to 0$$

при $t \to 0$, то існує таке число t_2: $0 < t_2 \le T$, що

$$4 - 3H^3(0) \left(4\int_{H(0)}^{H(t)} \frac{\Phi(H^{-1}(\sigma))}{\chi(H^{-1}(\sigma))} \frac{d\sigma}{\sigma^5} + \int_0^t \frac{\chi^4(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau\right) \ge 1,\ t \in [0, t_2]. \tag{47}$$

Тоді з (46) випливає нерівність $\frac{H^4(t)}{3H^3(0)} \le \frac{\Phi(t)}{\chi(t)} + \frac{H(t)}{3}$, $t \in [0, t_2]$, або

$$H^4(t) \le \frac{3\Phi(t)}{\chi(t)} H^3(0) + H^3(0) H(t),\ t \in [0, t_2].$$

Використовуючи це в (45), знаходимо

$$H'(t) \le \left(\frac{\Phi(t)}{\chi(t)}\right)' + \frac{\chi^4(t)}{\psi(t)} H^3(0) H(t) + \frac{3\chi^3(t)}{\psi(t)} \Phi(t) H^3(0).$$

Останню нерівність домножимо на $\exp(-H^3(0)\int_0^t \frac{\chi^4(\sigma)}{\psi(\sigma)} d\sigma)$ і проінтегруємо її. Отримаємо

$$H(t) \le \frac{\Phi(t)}{\chi(t)} + 4H^3(0) \int_0^t \frac{\Phi(\tau)\chi^3(\tau)}{\psi(\tau)} \exp\left(H^3(0) \int_\tau^t \frac{\chi^4(\sigma)}{\psi(\sigma)} d\sigma\right) d\tau.$$

Тоді з (44) маємо

$$W_1(t) \le \Phi(t) + 4H^3(0)\chi(t) \exp\left(H^3(0) \int_0^t \frac{\chi^4(\sigma)}{\psi(\sigma)} d\sigma\right) \int_0^t \frac{\Phi(\tau)\chi^3(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau,$$

або, враховуючи (42), (43)

$$\begin{aligned} W_1(t) \le C_8 + \frac{C_{16}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{18}}{a_{\min}^{3/2}(t)} \exp\left(C_{19} \int_0^t \frac{d\sigma}{\psi(\sigma) a_{\min}^6(\sigma)}\right) \times \\ \times \int_0^t \left(C_8 + \frac{C_{16}}{\sqrt{a_{\min}(\tau)}}\right) \frac{1}{\psi(\tau) a_{\min}^{9/2}(\tau)} d\tau,\ t \in [0, t_2]. \end{aligned} \tag{48}$$

Оскільки з (37) $a_{\min}(t) \geq \frac{C_{20}}{W_1(t)}$, то, враховуючи (48), отримаємо

$$C_8 a_{\min}(t) + C_{16}\sqrt{a_{\min}(t)} + \frac{C_{18}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \exp\left(C_{19}\int_0^t \frac{d\sigma}{\psi(\sigma)a^6_{\min}(\sigma)}\right)\times$$
$$\times \int_0^t \left(C_8 + \frac{C_{16}}{\sqrt{a_{\min}(\tau)}}\right)\frac{1}{\psi(\tau)a^{9/2}_{\min}(\tau)}d\tau - C_{20} \geq 0,\ t\in[0,t_2]. \tag{49}$$

Третій доданок останньої нерівності прямує до нуля, коли $t \to 0$, тому існує таке число $t_3\colon 0 < t_3 \leq T$, що

$$\frac{C_{18}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \exp\left(C_{19}\int_0^t \frac{d\sigma}{\psi(\sigma)a^6_{\min}(\sigma)}\right)\int_0^t \left(C_8 + \frac{C_{16}}{\sqrt{a_{\min}(\tau)}}\right)\frac{1}{\psi(\tau)a^{9/2}_{\min}(\tau)}d\tau \leq \frac{C_{20}}{2},\ t\in[0,t_3]. \tag{50}$$

Тоді нерівність (49) набуде вигляду

$$C_8 a_{\min}(t) + C_{16}\sqrt{a_{\min}(t)} - \frac{C_{20}}{2} \geq 0,\ t\in[0,t_3],$$

звідки

$$a_{\min}(t) \geq \frac{\sqrt{C_{16}^2 + 2C_8C_{20}} - C_{16}}{2C_8} \equiv A_0 > 0,\ t\in[0,t_3].$$

Враховуючи формули (48), (38) та введені позначення, знаходимо

$$w(y,t) \leq M_3,\ (y,t)\in\overline{Q}_{t_3}, \tag{51}$$

$$a(t) \geq \min\left\{A_0, \frac{C_{20}}{M_3}\right\} \equiv A_2,\ t\in[0,t_3], \tag{52}$$

$$|b(t)| \leq M_4,\ t\in[0,t_3]. \tag{53}$$

Таким чином, апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (22)–(26) встановлено.

Знайдемо оцінку функції $w = w(y,t)$ зверху, виходячи з рівняння (23). Оскільки всі доданки, крім першого, правої частини формули (23) прямують до нуля при $t \to 0$, то існує таке число $t_4, 0 < t_4 \leq T$, що виконується нерівність

$$C_6 + \frac{C_{21}}{\sqrt{A_2}}(1 + M_1 + M_3^2 + M_3M_4)\int_0^t \left(\int_\tau^t \psi(\sigma)d\sigma\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau \leq M_3,\ t\in[0,t_4].$$

Тоді для функції $w = w(y,t)$ залишається правильною оцінка (51) при $(y,t)\in\overline{Q}_{t_4}$.

Покладемо $T_0 = \min\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$. Подамо систему рівнянь (22)–(26) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (v,w,a,h,b)$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (22)–(26). У банаховому просторі $(C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0,T_0])^3$ виберемо множину $N = \{(v,w,a,h,b) \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0,T_0])^3\colon M_0 \leq v(y,t) \leq M_1, M_2 \leq w(y,t) \leq M_3, A_2 \leq a(t) \leq A_1, H_0 \leq h(t) \leq H_1, |b(t)| \leq M_4\}$. Очевидно, що вибрана таким чином множина N — замкнена і опукла, а оператор P переводить її в себе. Те, що цей оператор цілком неперервний доводиться за тою схемою, що й у невиродженому випадку [28, с. 27]. Це означає, що виконуються всі умови теореми Шаудера про нерухому точку, а, отже, існує розв'язок системи рівнянь (22)–(26). Враховуючи еквівалентність згаданої системи та задачі (7)–(12), одержимо існування розв'язку цієї задачі для $(y,t)\in\overline{Q}_{T_0}$. Теорему 1 доведено. □

3. Єдиність розв'язку задачі (1)–(6)**.**

Теорема 2. *Якщо виконуються умови:*
B1) $c, f \in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,T])$, $\varphi \in C^3[0,h_0]$; **B2)** $\mu_{5,0}(t) \neq 0$, $\mu_2(t)-\mu_1(t) \neq 0$ $(t \in [0,T]))$, *то розв'язок задачі* (1)–(6) *єдиний.*

Доведення. Припустимо, що задача (7)–(12) має два розв'язки (a_i, b_i, h_i, v_i), $i = 1, 2$. Введемо позначення $a(t) = a_1(t) - a_2(t), b(t) = b_1(t) - b_2(t), h(t) = h_1(t) - h_2(t)$, $v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t)$. Виходячи з (7)–(12), для цих різниць отримаємо задачу

$$v_t = \frac{a_1(t)\psi(t)}{h_1^2(t)}v_{yy} + \frac{b_1(t)+yh_1'(t)}{h_1(t)}v_y + c(yh_1(t),t)v + f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t) +$$
$$+\left(\frac{a(t)}{h_2^2(t)} + a_1(t)\left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\right)\right)\psi(t)v_{2yy} + \left(\frac{b(t)}{h_2(t)} + b_1(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right)+\right.$$
$$\left.+y\left(\frac{h'(t)}{h_2(t)} + h_1'(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right)\right)\right)v_{2y} + (c(yh_1(t),t) - c(yh_2(t),t))v_2, \tag{54}$$
$$v(y,0) = 0,\ y \in [0,1], \tag{55}$$
$$v(0,t) = v(1,t) = 0,\ t \in [0,T], \tag{56}$$
$$h'(t) = -\frac{1}{h_1(t)}v_y(1,t) - v_{2y}(1,t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right),\ t \in [0,T], \tag{57}$$
$$h_1(t)\int_0^1 v(y,t)dy + h(t)\int_0^1 v_2(y,t)dy = 0,\ t \in [0,T], \tag{58}$$
$$\frac{a_1(t)}{h_1(t)}v_y(0,t) + a_1(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right)v_{2y}(0,t) + \frac{a(t)}{h_2(t)}v_{2y}(0,t) = 0,\ t \in [0,T]. \tag{59}$$

Враховуючи введені позначення, знаходимо

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{h(t)}{h_1(t)h_2(t)},\ t \in [0,T], \tag{60}$$
$$\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} = -\frac{h(t)(h_1(t)+h_2(t))}{h_1^2(t)h_2^2(t)},\ t \in [0,T]. \tag{61}$$

Використовуючи функцію Гріна $G^* = G^*(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння
$$v_t = \frac{a_1(t)\psi(t)}{h_1^2(t)}v_{yy} + \frac{b_1(t)+yh_1'(t)}{h_1(t)}v_y + c(yh_1(t),t)v,$$
розв'язок задачі (54)–(56) подамо у вигляді

$$v(y,t) = \int_0^t\int_0^1 G^*(y,t,\eta,\tau)\left(f(\eta h_1(\tau),\tau) - f(\eta h_2(\tau),\tau) + \psi(\tau)\left(\frac{a(\tau)}{h_2^2(\tau)} -\right.\right.$$
$$\left. -\frac{a_1(\tau)h(\tau)(h_1(\tau)+h_2(\tau))}{h_1^2(\tau)h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta\eta} + \left(\frac{b(\tau)}{h_2(\tau)} - \frac{b_1(\tau)h(\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)} - y\left(\frac{h_1'(\tau)h(\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)} + \frac{v_\eta(1,\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)} -\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. -\frac{h(\tau)v_{2\eta}(1,\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}\right)\right)v_{2\eta} + (c(\eta h_1(\tau),\tau) - c(\eta h_2(\tau),\tau))v_2\right)d\eta d\tau,\ (y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{62}$$

Зауважимо, що в останній формулі використано також (57), (60), (61).

Продиференціювавши (62) за просторовою змінною, знаходимо

$$v_y(y,t)=\int_0^t\int_0^1 G_y^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg(f(\eta h_1(\tau),\tau)-f(\eta h_2(\tau),\tau)+\psi(\tau)\Bigg(\frac{a(\tau)}{h_2^2(\tau)}-$$
$$-\frac{a_1(\tau)h(\tau)(h_1(\tau)+h_2(\tau))}{h_1^2(\tau)h_2^2(\tau)}\Bigg)v_{2\eta\eta}+\Bigg(\frac{b(\tau)}{h_2(\tau)}-\frac{b_1(\tau)h(\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}-y\Bigg(\frac{h_1'(\tau)h(\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}+\frac{v_\eta(1,\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}-$$
$$-\frac{h(\tau)v_{2\eta}(1,\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}\Bigg)\Bigg)v_{2\eta}+(c(\eta h_1(\tau),\tau)-c(\eta h_2(\tau),\tau))v_2\Bigg)d\eta d\tau,\ (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{63}$$

З (63) випливає, що

$$v_y(0,t)=\int_0^t\int_0^1 G_y^*(0,t,\eta,\tau)\Bigg(f(\eta h_1(\tau),\tau)-f(\eta h_2(\tau),\tau)+\psi(\tau)\Bigg(\frac{a(\tau)}{h_2^2(\tau)}-$$
$$-\frac{a_1(\tau)h(\tau)(h_1(\tau)+h_2(\tau))}{h_1^2(\tau)h_2^2(\tau)}\Bigg)v_{2\eta\eta}+\Bigg(\frac{b(\tau)}{h_2(\tau)}-\frac{b_1(\tau)h(\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}-y\Bigg(\frac{h_1'(\tau)h(\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}+\frac{v_\eta(1,\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}-$$
$$-\frac{h(\tau)v_{2\eta}(1,\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}\Bigg)\Bigg)v_{2\eta}+(c(\eta h_1(\tau),\tau)-c(\eta h_2(\tau),\tau))v_2\Bigg)d\eta d\tau,\ (y,t)\in\overline{Q}_T, \tag{64}$$

$$v_y(1,t)=\int_0^t\int_0^1 G_y^*(1,t,\eta,\tau)\Bigg(f(\eta h_1(\tau),\tau)-f(\eta h_2(\tau),\tau)+\psi(\tau)\Bigg(\frac{a(\tau)}{h_2^2(\tau)}-$$
$$-\frac{a_1(\tau)h(\tau)(h_1(\tau)+h_2(\tau))}{h_1^2(\tau)h_2^2(\tau)}\Bigg)v_{2\eta\eta}+\Bigg(\frac{b(\tau)}{h_2(\tau)}-\frac{b_1(\tau)h(\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}-y\Bigg(\frac{h_1'(\tau)h(\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}+\frac{v_\eta(1,\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}-$$
$$-\frac{h(\tau)v_{2\eta}(1,\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}\Bigg)\Bigg)v_{2\eta}+(c(\eta h_1(\tau),\tau)-c(\eta h_2(\tau),\tau))v_2\Bigg)d\eta d\tau,\ (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{65}$$

Використовуючи відповідну умову (11), з (58) отримаємо

$$h(t)=-\frac{h_1(t)h_2(t)}{\mu_4(t)}\int_0^1 v(y,t)dy,\ t\in[0,T]. \tag{66}$$

Враховуючи (12), (66), з (59) одержимо

$$a(t)=-\frac{a_1(t)a_2(t)\psi(t)}{h_1(t)\mu_5(t)}v_y(0,t)-\frac{a_1(t)h_2(t)}{\mu_4(t)}\int_0^1 v(y,t)dy,\ t\in[0,T]. \tag{67}$$

Оскільки $b_i(t), i=1,2$ — розв'язки відповідних задач (7)–(12), то для них правильними залишаються відповідні рівності (26). Віднявши їх та використавши (66), (67), знаходимо

$$b(t)=-(\mu_2(t)-\mu_1(t))^{-1}\Bigg(h_1(t)\int_0^1(c(yh_1(t),t)v(y,t)+(c(yh_1(t),t)-c(yh_2(t),t))v_2(y,t)+$$
$$+f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t))dy+\frac{a_1(t)\psi(t)\mu_2(t)}{h_1(t)}v_y(1,t)-\frac{a_1(t)a_2(t)\psi^2(t)v_{2y}(1,t)}{h_1(t)h_2(t)\mu_5(t)}v_y(0,t)-$$
$$-\Bigg(\frac{h_1(t)h_2(t)}{\mu_4(t)}\int_0^1(c(yh_2(t),t)v_2(y,t)+f(yh_2(t),t))dy+\frac{a_1(t)\psi(t)-\mu_2(t)}{\mu_4(t)}v_{2y}(1,t)\Bigg)\times$$
$$\times\int_0^1 v(y,t)dy\Bigg),\ t\in[0,T]. \tag{68}$$

За теоремою Лагранжа про середнє, скориставшись умовами теореми, отримаємо

$$f(yh_1(y),t)-f(yh_2(t),t)=yh(t)\int_0^1 f_x(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t)d\sigma. \qquad (69)$$

Аналогічна формула має місце також для функції $c=c(yh(t),t)$.

Підставивши (63), (64), (69) у (65)–(68), отримаємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду стосовно функцій $v_y(1,t), h(t), a(t), b(t)$. Дослідимо ядра цієї системи.

Перш за все зауважимо, що для функцій $v_2(y,t)$ та $v_{2y}(y,t)$ виконуються оцінки (31), (32), (51). Для того щоб встановити поведінку функції $v_{2yy}(y,t)$, розглянемо відповідну задачу (7)–(12). Диференціюючи формулу (22) двічі за просторовою змінною, отримаємо

$$\begin{gathered}
v_{2yy}(y,t)=h_0^2\varphi''(yh_0)+\int_0^t G_{1\eta}^{(2)}(y,t,1,\tau)\bigg(\bigg(\frac{b_2(\tau)}{h_2(\tau)}+\frac{\mu_3(\tau)h_2(\tau)-v_{2\eta}(1,\tau)}{h_2^2(\tau)}\bigg)v_{2\eta}(1,\tau)+\\
+c(h_2(\tau),\tau)\mu_2(\tau)+f(h_2(\tau),\tau)-\mu_2'(\tau)+\frac{h_0^2a_2(\tau)\psi(\tau)}{h_2^2(\tau)}\varphi''(h_0)\bigg)d\tau-\int_0^t G_{1\eta}^{(2)}(y,t,0,\tau)\times\\
\times\bigg(\frac{b_2(\tau)}{h_2(\tau)}v_{2\eta}(0,\tau)+c(0,\tau)\mu_1(\tau)+f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)+\frac{h_0^2a_2(\tau)\psi(\tau)}{h_2^2(\tau)}\varphi''(0)\bigg)d\tau-\\
-\int_0^t\int_0^1 G_{1\eta}^{(2)}(y,t,\eta,\tau)\bigg(\bigg(c(\eta h_2(\tau),\tau)+\frac{\mu_3(\tau)h_2(\tau)-v_{2\eta}(1,\tau)}{h_2^2(\tau)}\bigg)v_{2\eta}(\eta,\tau)+h_2(\tau)\times\\
\times\big(c_x(\eta h_2(\tau),\tau)v_2(\eta,\tau)+f_x(\eta h_2(\tau),\tau)\big)-\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau)+\frac{h_0^3a_2(\tau)\psi(\tau)}{h_2^2(\tau)}\varphi'''(\eta h_0)\bigg)d\eta d\tau-\\
-\int_0^t\int_0^1 G_{1\eta}^{(2)}(y,t,\eta,\tau)\bigg(\frac{b_2(\tau)}{h_2(\tau)}+\frac{\eta(\mu_3(\tau)h_2(\tau)-v_{2\eta}(1,\tau))}{h_2^2(\tau)}\bigg)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau, \qquad (70)
\end{gathered}$$

де $G_1^{(2)}(y,t,\eta,\tau)$ — функція Гріна першої крайової задачі для відповідного рівняння (17). Оцінимо третій доданок, що входить до правої частини формули (70). Використовуючи (19), одержимо

$$\begin{gathered}
J_1=\bigg|\int_0^t G_{1\eta}^{(2)}(y,t,0,\tau)\bigg(\frac{b_2(\tau)}{h_2(\tau)}v_{2\eta}(0,\tau)+c(0,\tau)\mu_1(\tau)+f(0,\tau)+\frac{h_0^2a_2(\tau)\psi(\tau)}{h_2^2(\tau)}\varphi''(0)-\\
-\mu_1'(\tau)\bigg)d\tau\bigg|\le C_{22}\int_0^t\frac{1}{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|y+2n|\exp\bigg(-\frac{(y+2n)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\bigg)d\tau, \qquad (71)
\end{gathered}$$

де $\theta_2(t)=\int_0^t\frac{a_2(\tau)\psi(\tau)}{h_2^2(\tau)}d\tau$. Враховуючи введену функцію $\theta_0=\theta_0(t)$, з нерівності (71) знаходимо

$$\begin{gathered}
J_1\le C_{23}\int_0^t\frac{y}{(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{3/2}}\exp\bigg(-\frac{y^2}{C_{24}(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\bigg)d\tau+\\
+C_{23}\int_0^t\frac{1}{(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{3/2}}\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{+\infty}|y+2n|\exp\bigg(-\frac{(y+2n)^2}{C_{24}(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\bigg)d\tau.
\end{gathered}$$

Використовуючи результати з [29], одержимо $J_1\le C_{25}+\frac{C_{26}}{\psi(\theta_0^{-1}(\frac{3}{4}\theta_0(t)))}+\frac{tC_{27}}{\int_0^t\psi(\sigma)d\sigma}$, де $\theta_0^{-1}=\theta_0^{-1}(t)$ — функція обернена до $\theta_0=\theta_0(t)$. Аналогічно оцінюється й другий доданок правої частини формули (70). Для оцінки четвертого доданка використаємо (20). Отримаємо

$$J_2 = \Big| \int_0^t \int_0^1 G_{1\eta}^{(2)}(y,t,\eta,\tau) \Big(\Big(c(\eta h_2(\tau),\tau) + \frac{\mu_3(\tau)h_2(\tau) - v_{2\eta}(1,\tau)}{h_2^2(\tau)} \Big) v_{2\eta}(\eta,\tau) + \\ + h_2(\tau)\big(c_y(\eta h_2(\tau),\tau)v_2(\eta,\tau) + f_y(\eta h_2(\tau),\tau)\big) - \mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau) + \\ + \frac{h_0^3 a_2(\tau)\psi(\tau)}{h_2^2(\tau)} \varphi'''(\eta h_0) \Big) d\eta d\tau \Big| \le C_{28} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}}.$$

Враховуючи означення слабкого виродження, матимемо $J_2 \le C_{29}$. Отже, з рівняння (70), знаходимо

$$|v_{2yy}(y,t)| \le C_{30} + \frac{C_{31}}{\psi(\theta_0^{-1}(\frac{3}{4}\theta_0(t)))} + C_{32} t \Big(\int_0^t \psi(\sigma) d\sigma \Big)^{-1}. \tag{72}$$

Далі для дослідження ядер системи (65)–(68), використаємо відомі [30, с.469] оцінки функцій Гріна $|D_t^r D_y^s G^*(y,t,\eta,\tau)| \le C_{33}(t-\tau)^{-\frac{1+2r+s}{2}} \exp\big(-C_{34}\frac{(y-\eta)^2}{t-\tau}\big)$, де $r \in \{0,1\}$, $s \in \{0,1,2\}$, $2r+s=1$ або $2r+s=2, \tau < t$. Враховуючи останню формулу, оцінимо інтеграли

$$J_3 \equiv \int_0^1 G^*(y,t,\eta,\tau) d\eta \le C_{35} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} \exp\Big(-\frac{C_{36}(y-\eta)^2}{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)} \Big) d\eta \le C_{37},$$

$$J_4 \equiv \int_0^1 G_y^*(y,t,\eta,\tau) d\eta \le C_{38} \int_0^1 \frac{1}{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)} \exp\Big(-\frac{C_{36}(y-\eta)^2}{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)} \Big) d\eta \le \frac{C_{39}}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}}.$$

Враховуючи (72) і отримані оцінки інтегралів J_3, J_4 та означення слабкого виродження, робимо висновок, що ядра однорідної системи інтегральних рівнянь Вольтерра (65)–(68) мають інтегровні особливості. Це означає, що ця система має лише тривіальний розв'язок $v_y(1,t) \equiv 0$, $h(t) \equiv 0$, $a(t) \equiv 0$, $b(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$. Використовуючи цей факт в задачі (7)–(10), отримаємо $v(y,t) \equiv 0$, $(y,t) \in \overline{Q}_T$, що й завершує доведення теореми 2. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Jones B.F., *The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. I. Existence and uniqueness*, J. Math. Mech., **11** (1962), №5, 907–918.
2. Cannon J.R., *Recovering a time-dependent coefficient in a parabolic differential equation*, J. Math. Anal. Appl., **160** (1991), 572–582.
3. Azari H., Li C., Nie Y., Shang S., *Determination of an unknown coefficient in a parabolic inverse problem*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Math. Analysis, **11** (2004), 665–674.
4. Oussaeif Taki-Eddine, Bouziani Abdelfatah, *An inverse coefficient problem for parabolic equation under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions*, International Journal of Partial Differential Equation and Applications, **2** (2014), №3, 38–43.
5. Mansur I. Ismailov, Bülent Oğur, *An inverse diffusion problem with nonlocal boundary conditions*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, **32, 2** (2016), 564–590.
6. Cannon J.R., Peres-Esteva S., *Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation*, Inverse Problems, **10** (1993), №3, 521–531.
7. Hong-Ming Yin, *Global solvability for some parabolic inverse problems*, J. Math. Anal. and Appl., **162** (1991), 392–403.
8. Trong D.D., Ang D.D., *Coefficient identification for a parabolic equation*, Inverse Problems, **10** (1994), №3, 733–752.
9. Dehghan M., *Parameter identification in a partial differential equation from overspecified data*, Math. and Computer Modelling, **41** (2005), 197–213.

10. Onyejekwe O.N., *Determination ot two time-dependent coefficients in a parabolic partial differential equation by homotopy analysis method*, International Journal of Applied Math. Research, **3** (2014), №2, 161–167.
11. Hussein M., Lesnic D., Ivanchov M., *Simultaneous determination of time-dependent coefficients in the heat equation*, Computers & Mathematics with Applications, **67** (2014), №5, 1065–1091.
12. Baiyu Wang, Anping Liao, Wei Liu, *Simultaneous determination of unknown two parameters in parabolic equation*, International Journal of Applied Math. and Computation, **4** (2012), №3, 332–336.
13. Ebru Ozbilge, Ali Demir, *Identification of the unknown coefficients in a linear parabolic equation via semigroup approach*, Advances in Diff. Equations, **47** (2014), 1–8.
14. Barans'ka I., *Inverse problem with free boundary for a parabolic equation*, Mat. Stud., **27** (2007), №1, 85–94. (in Ukrainian)
15. Barans'ka I., Ivanchov M., *An inverse problem for two-dimentional heat equation in a free boundary domain*, Ukrainian Mathematical Bulletin, **4** (2007), №4, 457–484. (in Ukrainian)
16. Snitko H., *Inverse problem for a parabolic equation with free boundary*, Matematychni Metody ta Fizyko-Mekhanichni Polya, **50** (2007), №4, 7–18. (in Ukrainian).
17. Snitko H., *Determination of unknown multiplier in the coefficient at the first derivative in a parabolic equation in a free boundary domain*, Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech.-Math., **67** (2007), 233–247. (in Ukrainian)
18. Hussein M., Lesnic D., Ivanchov M., Snitko H., *Multiple time-dependent coefficient identification thermal problems with a free boundary*, Applied Numerical Mathematics, **99** (2016), 24–50.
19. Snitko H., *On a coefficient inverse problem for a parabolic equation in a domain with free boundary*, J. of Math. Sciences, **200** (2014), №3, 374–388.
20. Zui-Cha Deng, Liu Yang, *An inverse problem of identifying the coefficient of first order in a degenerate parabolic equation*, J. of Computational and Applied Math., **235** (2011), 4407–4417.
21. Zui-Cha Deng, Liu Yang, *An inverse problem of identifying the radiative coefficient in a degenerate parabolic equation*, Chin. Ann. Math., **35B** (2014), №3, 355–382.
22. Tort J., *An inverse diffusion problem in a degenerate parabolic equation*, Monografias de la real academia de ciencias de Zaragoza, **38** (2012), 137–145.
23. Saldina N., *Inverse problem for a degenerate parabolic equation*, Visnyk Lviv Univ., Ser. Mech-Math., **64** (2005), 245–257. (in Ukrainian)
24. Ivanchov M., Saldina N., *An inverse problem for strongly degenerate heat equation*, J. Inv. Ill-Posed Problems, **14** (2006), №5, 465–480.
25. Hryntsiv N., *Solvability of inverse problem for a degenerate parabolic equation in a free boundary domain*, Scientific Bulletin of Chernivtsi University, **314–315**, Mathematics (2006), 40–49. (in Ukrainian)
26. Hryntsiv N., Ivanchov M., *An inverse problem for a strongly degenerate heat equation in a free boundary domain*, Ukrain. Math. J., **61** (2009), 28–43. (in Ukrainian)
27. Huzyk N., *Inverse problem of determining the coefficients in a degenerate parabolic equation*, Electron. J. Diff. Eq., **172** (2014), 1–11.
28. Ivanchov M., Inverse problems for equations of parabolic type, VNTL Publishers, Lviv, 2003.
29. Saldina N., *An inverse problem for a generally degenerate heat equation*, J. of Lviv Polytechnic National University, "Physical and Mathematical sciences", **566** (2006), 59–67.
30. Ladyzhenskaya O.A., Uralcevav N.N., Solonnikov V.A., Linear and quasilinear equations of parabolic type, Moscow, Nauka, 1973. (in Russian)

Ivan Franko National University of Lviv
hryntsiv@ukr.net

Надійшло 24.09.2017
Після переробки 08.11.2018