УДК 517.518.224

М. В. Гембарський, С. Б. Гембарська, К. В. Соліч

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ І ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У ПРОСТОРІ $B_{\infty,1}$

M. V. Hembarskyi, S. B. Hembarska, K. V. Solich. *The best approximations and widths of the classes of periodical functions of one and several variables in the space* $B_{\infty,1}$, Mat. Stud. **51** (2019), 74–85.

We obtained exact-order estimates of the best approximations of classes $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$ of periodic functions of many variables and for classes $B^{\omega}_{p,\theta}$, $1 \le p < \infty$ of functions of one variable by trigonometric polynomials with corresponding spectra of harmonics in the metric of space $B_{\infty,1}$. We also found exact orders for the Kolmogorov, linear and trigonometric widths of the same classes in space $B_{\infty,1}$.

1. Вступ. Дана стаття є логічним продовженням роботи [1], а базовими стали дослідження із [2]. Об'єктами дослідження у статті є класи $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$ періодичних функцій від багатьох змінних і класи $B^{\omega}_{p,\theta}$, $1 \le p < \infty$, періодичних функцій від однієї змінної. Розглядаються питання про порядкові оцінки апроксимації їх елементів за допомогою тригонометричних поліномів з певними обмеженнями щодо спектру гармонік, що їх формують, а також — питання, пов'язані зі встановленням точних за порядком оцінок колмогоровських, лінійних та тригонометричних поперечників класів $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$ та $B^{\omega}_{p,\theta}$ як множин у підпросторах $B_{\infty,1}$ простору L_∞. Мотивацією до таких досліджень саме у просторі $B_{\infty,1}$ стало те, що підходів до розв'язання окреслених задач на таких і на деяких інших класах функцій, особливо у багатовимірному випадку, у просторі L_∞ поки не знайдено (див. [3]).

Зазначимо, що класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ (точне означення подано нижче) є узагальненням за гладкісним функціональним параметром Ω відомих класів Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$ при $1 \le \theta < \infty$, а при $\theta = \infty$ — у цьому випадку за ними закріплене позначення H^{Ω}_{p} — класів Нікольського H^{r}_{p} (див., наприклад, [4, 5]). Вперше деякі апроксимаційні, а також структурні властивості класів H^{Ω}_{p} встановлені М. М. Пустовойтовим у роботі [6], а класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, — S. Yongsheng, W. Heping у [7].

Для подальшого викладу введемо необхідні позначення, а також означимо функціональні простори і класи функцій.

Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$;

$$\pi_d := \prod_{j=1}^{d} [0, 2\pi) = \{x \in \mathbb{R}^d \colon \ x_j \in [0, 2\pi),\ j = \overline{1, d}\}.$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 41A46, 41A50.
Keywords: periodical function; exact-order estimate; best approximantion; linear width; trigonometric width; the Kolmogorov width; several variables.
doi:10.15330/ms.51.1.74-85

Через $L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, позначимо простір вимірних 2π–періодичних за кожною змінною функцій $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ зі скінченними нормами

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|, \quad p = \infty.$$

Множину функцій $f \in L_p(\pi_d)$, що задовольняють умову

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx_j = 0, \quad j = \overline{1,d},$$

позначимо $L_p^0(\pi_d)$. Іноді замість $L_p(\pi_d)$ і $L_p^0(\pi_d)$ вживатимемо простіші позначення L_p і L_p^0 відповідно.

Визначимо повний мішаний p–модуль гладкості порядку l функції $f \in L_p(\pi_d)$:

$$\Omega_l(f,t)_p := \sup_{|h_i| \le t_i} \|\Delta_h^l f\|_p, \quad t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d.$$

Тут для $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$ та $l \in \mathbb{N}$

$$\Delta_h^l f(x) := \Delta_{h_d}^l \dots \Delta_{h_1}^l f(x_1, \dots, x_d),$$

де

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \Delta_{h_j} \Delta_{h_j}^{l-1} f(x), \quad \Delta_{h_j}^0 f(x) := f(x),$$

$$\Delta_{h_j} f(x) \equiv \Delta_{h_j}^1 f(x) = f(x_1, \dots, x_j + h_j, \dots, x_d) - f(x).$$

Відомо, що

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k+l} C_l^k f(x_1, \dots, x_j + kh_j, \dots, x_d).$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l. Це означає, що функція Ω задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$ і $\Omega(t) = 0$, якщо $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;
2) $\Omega(t)$ неперервна на $\mathbb{R}_+^d$;
3) $\Omega(t)$ не спадає за кожною змінною $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$, при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \ne j$;
4) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \le C(\prod_{j=1}^d m_j)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, де $C > 0$ — деяка стала.

Далі, називатимемо (див. [8]) функцію від однієї змінної $\varphi(\tau)$ майже зростаючою (майже спадною) на $[\,a, b\,]$, якщо існує стала $C_1 > 0$ ($C_2 > 0$), яка не залежать від τ_1, τ_2 така, що

$$\varphi(\tau_1) \le C_1\, \varphi(\tau_2),\ a \le \tau_1 \le \tau_2 \le b,$$

у випадку майже зростання, і відповідно

$$\varphi(\tau_1) \geq C_2\, \varphi(\tau_2),\ a \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq b,$$

у випадку майже спадання.

Припускатимемо також, що функція $\Omega(t),\ t \in \mathbb{R}_+^d$, задовольняє додаткові умови (S^α) і (S_l), які називають умовами Барі-Стєчкіна [9, 10]. Вони полягають у такому: а) функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geq 0,\ \tau \in [\,0, 1\,]$, задовольняє умову (S^α), якщо $\frac{\varphi(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$; б) функція $\varphi(\tau) \geq 0,\ \tau \in [\,0, 1\,]$, задовольняє умову (S_l), якщо $\frac{\varphi(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l,\ l \in \mathbb{N}$. Отже, у випадку $d > 1$ кажемо, що функція $\Omega(t),\ t \in \mathbb{R}_+^d$ задовольняє умови (S^α) і (S_l), якщо вона задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих $t_i,\ i \neq j$.

Тепер дамо означення функціональних класів $B^\Omega_{p,\theta}$, стосовно яких проводились дослідження у вже згаданій роботі [7]. Нехай $1 \leq p, \theta \leq \infty$ і $\Omega(t),\ t \in \mathbb{R}_+^d$, — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови $1) - 4)$, (S^α) і (S_l). Тоді покладемо

$$B^\Omega_{p,\theta} := \{f \in L_p^0 :\ \|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \leq 1\},$$

де

$$\|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} = \|f\|_p + \left(\int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B^\Omega_{p,\infty}} = \|f\|_p + \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)}{\Omega(t)}.$$

Зауважимо, що у випадку, коли $r = (r_1, \ldots, r_d),\ 0 < r_j < l,\ j = \overline{1, d}$ і

$$\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j},$$

— класи $B^\Omega_{p,\theta}$ тотожні до аналогів класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$, які досліджувалися у роботах [4,5]. У свою чергу, при $\theta = \infty$ класи $B^r_{p,\infty} =: H^r_p$ є аналогами класів С. М. Нікольського [11].

У подальшому зручнішим у використанні є інше нормування функцій, що належать до класів $B^\Omega_{p,\theta}$. Поставимо у відповідність кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ множину

$$\rho(s) := \{k \in \mathbb{Z}^d : 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1, d}\}$$

і для $f \in L_p^0,\ 1 < p < \infty$, покладемо

$$\delta_s(f) := \delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

де

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції f.

Тепер нагадаємо таке: для виразів a та b, які залежать від деякої сукупності параметрів, запис $a \sim b$ означає, що існують такі додатні сталі c_1 та c_2, для яких $c_1 b \le a \le c_2 b$.

Отже, якщо $\Omega(t),\ t \in \mathbb{R}_+^d,$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1)–4), (S^α) і (S_l), то для $f \in B_{p,\theta}^\Omega$ при $1 < p < \infty$ і $1 \le \theta \le \infty$ справджуються співвідношення

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \sim \begin{cases} \left(\sum\limits_{s \in \mathbb{N}^d} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \, \|\delta_s(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s \in \mathbb{N}^d} (\Omega(2^{-s}))^{-1} \|\delta_s(f)\|_p, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Тут, і у подальшому, $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d}),\ s_j \in \mathbb{N},\ j = \overline{1,d}$.

Зауважимо, що при $1 \le \theta < \infty$ співвідношення (1) доведені у роботі [7], а при $\theta = \infty$ — в [6].

При $p = 1$ і $p = \infty$ для норм функцій з класів $B_{p,\theta}^\Omega$ можна записати аналогічні до (1) співвідношення, замінивши "блоки" $\delta_s(f)$ на інші. А саме, позначимо через $V_m(t),\ m \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}$, ядро Валле-Пуссена

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m} \right) \cos kt$$

(при $m = 1$ останню суму потрібно замінити нулем).

Далі, кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \right), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

і для $f \in L_p^0,\ 1 \le p \le \infty$, покладемо

$$A_s(f) := A_s(f, x) = (f * A_s)(x),$$

де $*$ — операція згортки, яка для функцій $g,\, h \in L_1(\pi_d)$ означається формулою

$$(g * h)(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} g(y) h(x - y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Тоді справедливі співвідношення

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \sim \begin{cases} \left(\sum\limits_{s \in \mathbb{N}^d} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \, \|A_s(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s \in \mathbb{N}^d} (\Omega(2^{-s}))^{-1} \|A_s(f)\|_p, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{2}$$

При $1 \le \theta < \infty$ співвідношення (2) доведені у роботі [12], а при $\theta = \infty$ — в [6].

Наші дослідження стосуються класів, які визначаються за допомогою специфічної функції Ω типу мішаного модуля неперервності порядку l, а саме

$$\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j \right), \tag{3}$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S^{α}) і (S_l). Зрозуміло, що для функції Ω вигляду (3) виконуються властивості 1)$-$4) функції типу мішаного модуля неперервності порядку l, а також умови (S^{α}), (S_l), і тому справедливими є наведені вище співвідношення (1), (2) для норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$. У випадку $d=1$ для класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, з відповідною функцією Ω вказаного вигляду, вживаємо позначення $B^{\omega}_{p,\theta}$.

Тепер дамо означення норми $\|\cdot\|_{B_{p,1}}$ у підпросторах $B_{p,1}$, $p \in \{1,\infty\}$. Така норма схожа на декомпозиційну норму функцій із просторів Бєсова $B^r_{p,\theta}$ за умовного припущення, що $r=(0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^d_+$. Для тригонометричних поліномів τ вона означається за формулою $\|\tau\|_{B_{p,1}}=\sum_{s\in\mathbb{Z}^d_+}\|A_s(\tau)\|_p$. Подібно означається норма $\|f\|_{B_{p,1}}$ для функцій $f\in L_p$ за умови збіжності ряду $\sum_{s\in\mathbb{Z}^d_+}\|A_s(f)\|_p$. При цьому зазначимо, що для $f\in B_{p,1}$, $p\in\{1,\infty\}$ виконується співвідношення

$$\|f\|_p \ll \|f\|_{B_{p,1}}, \tag{4}$$

а також, очевидно, що $\|f\|_{B_{1,1}} \ll \|f\|_{B_{\infty,1}}$ для $f\in B_{\infty,1}$.

На завершення цього пункту зазначимо, що у подальшому викладі використовується поняття порядкового співвідношення: для двох невід'ємних послідовностей $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ співвідношення (порядкова нерівність) $a_n \ll b_n$ означає, що існує стала $C_3>0$, яка не залежить від n і така, що $a_n \le C_3\, b_n$. Співвідношення $a_n \asymp b_n$ рівносильне тому, що $a_n \ll b_n$ і $b_n \ll a_n$.

2. Найкращі наближення. У цьому пункті, у випадку $d\ge 2$, встановлено точні за порядком оцінки величини найкращого наближення класів $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$ у просторі $B_{\infty,1}$ за допомогою тригонометричних поліномів, породжених множиною гармонік з "номерами" зі східчастого гіперболічного хреста. Окрім того, у одновимірному випадку ($d=1$) знайдено порядкові значення величини найкращого наближення функцій із класів $B^{\omega}_{p,\theta}$, $1\le p\le\infty$, за допомогою тригонометричних поліномів з множини $T(2^n)$.

Спочатку означимо згадані апроксимативні характеристики. Для $s=(s_1,...,s_d)$, $s_j\in\mathbb{N}$, $j=\overline{1,d}$, $d\ge 2$ і $n\in\mathbb{N}$ розглянемо множину

$$Q_n=\bigcup_{(s,1)\le n}\rho(s), \quad (s,1)=s_1+...+s_d,$$

яку називають східчастим гіперболічним хрестом, і покладемо

$$T(Q_n):=\Big\{t\colon\ t(x)=\sum_{k\in Q_n}c_k\, e^{i(k,x)},\ \ x\in\mathbb{R}^d\Big\}.$$

Нехай $\mathscr{X}\subset L^0_1(\pi_d)$ — деякий нормований функціональний простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$. Для $f\in\mathscr{X}$ і $n\in\mathbb{N}$ означимо

$$E_{Q_n}(f)_{\mathscr{X}}:=\inf_{t\in T(Q_n)}\|f-t\|_{\mathscr{X}}$$

і для класу $F\subset\mathscr{X}$ покладемо

$$E_{Q_n}(F)_{\mathscr{X}}=\sup_{f\in F}E_{Q_n}(f)_{\mathscr{X}}.$$

Величини $E_{Q_n}(f)_{\mathscr{X}}$ і $E_{Q_n}(F)_{\mathscr{X}}$ називають найкращим наближенням у просторі $\mathscr{X}$ відповідно функції $f \in \mathscr{X}$ і класу F за допомогою тригонометричних поліномів, що належать множині $T(Q_n)$.

У одновимірному випадку відповідні апроксимаційні характеристики означаються так. Нехай $\mathscr{X}$ — деякий функціональний простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$, $\mathscr{X} \subset L_1^0(\pi_1)$ і для $n \in \mathbb{N}$ через $T(2^n)$ позначено таку множину тригонометричних поліномів:

$$T(2^n) := \Big\{ t: \ t(x) = \sum_{k=-2^n+1}^{2^n-1} c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Тоді, для функції $f \in \mathscr{X}$ через $E_{2^n}(f)_{\mathscr{X}}$ позначимо величину її найкращого наближення за допомогою поліномів з множини $T(2^n)$, тобто,

$$E_{2^n}(f)_{\mathscr{X}} = \inf_{t \in T(2^n)} \|f - t\|_{\mathscr{X}}$$

і для функціонального класу $F \subset \mathscr{X}$ покладемо

$$E_{2^n}(F)_{\mathscr{X}} = \sup_{f \in F} E_{2^n}(f)_{\mathscr{X}}.$$

Результати досліджень величин $E_{2^n}(F)_q := E_{2^n}(F)_{L_q[0,2\pi]}$ і $E_{Q_n}(F)_q := E_{Q_n}(F)_{L_q(\pi_d)}$, $1 \le q \le \infty$, коли класи F є класами Соболєва $W^r_{p,\alpha}$ чи класами Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій, відповідно, від однієї та від багатьох змінних достатньо повно викладені у монографіях [13]–[15], а також — у [3].

Тепер перейдемо до формулювання і доведення одержаних результатів.

Теорема 1. *Нехай $d \ge 2$, $1 \le \theta \le \infty$, а $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l). Тоді*

$$E_{Q_n}(B^\Omega_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp \omega(2^{-n})\, n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{5}$$

Доведення. Спочатку встановимо в (5) оцінку зверху. З цією метою розглянемо для $f \in B^\Omega_{\infty,\theta}$ наближаючий поліном вигляду

$$t_n(f) := t_n(f,x) = \sum_{(s,1) \le n} A_s(f,x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Тоді, згідно з означенням норми у просторі $B_{\infty,1}$ можна записати

$$\|f - t_n\|_{B_{\infty,1}} \ll \Big\| \sum_{(s,1) > n} A_s(f) \Big\|_{B_{\infty,1}} = \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \Big\| A_s * \sum_{\substack{s' \in \mathbb{N}^d \\ (s',1) \ge n}} A_{s'}(f) \Big\|_\infty \le$$

$$\le \sum_{(s,1) \ge n-d} \Big\| A_s * \sum_{\|s-s'\|_\infty \le 1} A_{s'}(f) \Big\|_\infty \le \sum_{(s,1) \ge n-d} \|A_s\|_1 \Big\| \sum_{\|s-s'\|_\infty \le 1} A_{s'}(f) \Big\|_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{(s,1) \ge n-d} \ \sum_{\|s-s'\|_\infty \le 1} \|A_{s'}(f)\|_\infty \ll \sum_{(s,1) \ge n-2d} \|A_s(f)\|_\infty =$$

$$= \sum_{(s,1) \ge n-2d} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) \|A_s(f)\|_\infty \, \omega(2^{-(s,1)}) =: J_1. \tag{6}$$

Для оцінки величини J_1 розглянемо декілька випадків, залежно від значень параметра θ.

1. Нехай $\theta \in (1, \infty)$. Тоді, застосувавши нерівність Гельдера з показником θ, матимемо

$$J_1 \leq \left(\sum_{(s,1) \geq n-2d} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \, \|A_s(f)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1) \geq n-2d} \omega^{\theta'}(2^{-(s,1)}) \right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll$$

$$\leq \|f\|_{B^\Omega_{\infty,\theta}} \left(\sum_{(s,1) \geq n-2d} \omega^{\theta'}(2^{-(s,1)}) \right)^{\frac{1}{\theta'}} \leq \left(\sum_{(s,1) \geq n-2d} \omega^{\theta'}(2^{-(s,1)}) \right)^{\frac{1}{\theta'}} =: J_2. \tag{7}$$

Нехай $n - 2d =: m$. Тоді, зауваживши, що

$$\frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} \leq C_4 \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}}, \quad C_4 > 0, \tag{8}$$

при $(s, 1) \geq m$, продовжимо оцінку величини J_2:

$$J_2 \ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \left(\sum_{(s,1) \geq m} 2^{-(s,1)\alpha\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} = \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \left(\sum_{j \geq m} 2^{-j\alpha\theta'} \sum_{(s,1)=j} 1 \right)^{\frac{1}{\theta'}} \asymp$$

$$\asymp \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \left(\sum_{j \geq m} 2^{-j\alpha\theta'} j^{d-1} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \asymp \omega(2^{-m}) m^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{9}$$

2. Якщо $\theta = 1$, то оцінка величини J_1 має вигляд:

$$J_1 \leq \sup_{s:\ (s,1) \geq m} \omega(2^{-(s,1)}) \sum_{(s,1) \geq m} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) \|A_s(f)\|_\infty \ll$$

$$\ll \omega(2^{-m}) \|f\|_{B^\Omega_{\infty,1}} \ll \omega(2^{-m}). \tag{10}$$

3. При $\theta = \infty$ безпосередньо для величини J_1 отримаємо:

$$J_1 \leq \sup_{s:\ (s,1) \geq m} \frac{\|A_s(f)\|_\infty}{\omega(2^{-(s,1)})} \sum_{(s,1) \geq m} \omega(2^{-(s,1)}) \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^\Omega_{\infty,\infty}} \sum_{(s,1) \geq m} \omega(2^{-(s,1)}) \leq \sum_{(s,1) \geq m} \omega(2^{-(s,1)}) \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \sum_{(s,1) \geq m} 2^{-\alpha(s,1)} \ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \left(\sum_{j \geq m} 2^{-j\alpha} \sum_{(s,1)=j} 1 \right) =$$

$$= \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \sum_{j \geq m} 2^{-j\alpha} j^{d-1} \asymp \omega(2^{-m}) m^{d-1}. \tag{11}$$

На підставі (6)–(11) приходимо до шуканої оцінки зверху величини $E_{Q_n}(B^\Omega_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}}$.

Щодо оцінки знизу в (5) зазначимо таке. В [1] за умов теореми 1 доведено співвідношення:

$$E_{Q_n}(B^\Omega_{\infty,\theta})_{B_{1,1}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{12}$$

А отже, внаслідок нерівності $\|\cdot\|_{B_{\infty,1}} \geq \|\cdot\|_{B_{1,1}}$, з огляду на (12) випливає

$$E_{Q_n}(B^{\Omega}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}} \geq E_{Q_n}(B^{\Omega}_{\infty,\theta})_{B_{1,1}} \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

$\square$

Зауваження 1. У випадку, коли $r = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+,\ 0 < r_1 < l$, а $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$ теорема 1 раніше доведена в [2].

Наступне твердження стосується одновимірного випадку, $d = 1$. Тут встановлено точні за порядком оцінки величин $E_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{\infty}$ та $E_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}}$.

Теорема 2. *Нехай $d = 1$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$, а функція ω задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > \frac{1}{p}$ і умову (S_l). Тоді*

$$E_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{\infty} \asymp E_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp \omega(2^{-n})\, 2^{\frac{n}{p}}. \tag{13}$$

Доведення. Зважаючи на очевидну нерівність

$$E_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{\infty} \leq E_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}},$$

для доведення співвідношень (13) достатньо встановити потрібну оцінку зверху для величини $E_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}}$ і знизу — для $E_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{\infty}$. Зазначимо також, що в оцінці зверху достатньо обмежитися випадком, коли $\theta = \infty$ (у такому випадку $B^{\omega}_{p,\theta} \equiv H^{\omega}_p$).

Отже, нехай $f \in H^{\omega}_p$. Розглянемо поліномом

$$t_n(f) := t_n(f, x) = \sum_{s=1}^{n-1} A_s(f, x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$E_{2^n}(f)_{B_{\infty,1}} \leq \left\| f - \sum_{s=1}^{n-1} A_s(f) \right\|_{B_{\infty,1}} \ll \left\| \sum_{s=n}^{\infty} A_s(f) \right\|_{B_{\infty,1}} =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \left\| A_s * \sum_{s'=s-1}^{s+1} A_{s'}(f) \right\|_{\infty} \leq \sum_{s=n}^{\infty} \|A_s\|_{p'} \left\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} A_{s'}(f) \right\|_{p} =: J_3. \tag{14}$$

Маючи на меті подальшу оцінку величини J_3, зазначимо таке. По-перше, з відомої порядкової рівності $\|V_{2^s}\|_p \asymp 2^{s(1-\frac{1}{p})}$, $\ 1 \leq p \leq \infty$ (див., [14], Ch.1, § 1), випливає

$$\|A_s\|_{p'} \leq \|V_{2^s}\|_{p'} + \|V_{2^{s-1}}\|_{p'} \asymp 2^{\frac{s}{p}}. \tag{15}$$

По-друге, беручи до уваги, що для $f \in H^{\omega}_p, 1 \leq p \leq \infty$, виконується співвідношення $\|A_{s'}(f)\|_p \ll \omega(2^{-s'}), s' \in \mathbb{N}$, можна записати

$$\left\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} A_{s'}(f) \right\|_p \leq \sum_{s'=s-1}^{s+1} \|A_{s'}(f)\|_p \leq \sum_{s'=s-1}^{s+1} \omega(2^{-s'}) \ll \omega(2^{-s}). \tag{16}$$

Отже, поєднуючи (15) і (16), з (14), отримаємо

$$E_{2^n}(f)_{B_{\infty,1}} \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{\frac{s}{p}}\, \omega(2^{-s}) = \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-s(\alpha-\frac{1}{p})}\omega(2^{-s})2^{s\,\alpha} \leq$$

$$\leq \omega(2^{-n})2^{\alpha n} \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-s(\alpha-\frac{1}{p})} \ll \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}.$$

Оцінки зверху в (13) встановлені.

Переходячи до оцінки знизу величини $E_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{\infty}$, зауважимо, що зважаючи на вкладення $B^{\omega}_{p,\theta} \supset B^{\omega}_{p,1}$, $1 < \theta \leq \infty$, потрібну оцінку достатньо встановити при $\theta = 1$.

Отже, розглянемо функцію

$$g_1(x) = C_5\, \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}\, A_{n+1}(x), \quad C_5 > 0.$$

Оскільки, згідно з (15) $\|A_{n+1}\|_p \ll 2^{n(1-\frac{1}{p})}$, $1 \leq p \leq \infty$, то можна стверджувати, що за певного вибору сталої $C_5 > 0$ функція g_1 належить до класу $B^{\omega}_{p,1}$ при $1 \leq p \leq \infty$. Тепер, якщо для $n \in \mathbb{N}$

$$t^*(x) := \sum_{k=-2^n+1}^{2^n-1} c_k^*\, e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}$$

— поліном найкращого наближення функції g_1 у просторі L_{∞}, то, запроваджуючи позначення $(g,h) := \int_0^{2\pi} g(x)h(x)dx$, з одного боку,

$$(g_1 - t^*, A_{n+1}) = (g_1, A_{n+1}) \asymp \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}\, \|A_{n+1}\|_2^2 \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}, \tag{17}$$

а з іншого, — зважаючи на співвідношення (15), можна записати

$$(g_1 - t^*, A_{n+1}) \leq \|g_1 - t^*\|_{\infty}\, \|A_{n+1}\|_1 \ll \|g_1 - t^*\|_{\infty} = E_{2^n}(g_1)_{\infty}. \tag{18}$$

Співставляючи (17) і (18), приходимо до шуканої оцінки знизу величини $E_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{\infty}$, бо $E_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{\infty} \geq E_{2^n}(g_1)_{\infty} \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}$. $\square$

3. Поперечники. Насамперед означимо апроксимаційні величини, які досліджуються у цьому пункті. Нехай $\mathscr{X}$ — нормований простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$, $\mathcal{L}_M(\mathscr{X})$ — сукупність підпросторів в $\mathscr{X}$, розмірність яких не перевищує M, і W — центрально–симетрична множина в $\mathscr{X}$.

Величина

$$d_M(W,\mathscr{X}) := \inf_{L_M \in \mathcal{L}_M(\mathscr{X})} \sup_{w\in W} \inf_{u \in L_M} \|w-u\|_{\mathscr{X}}$$

називається *колмогоровським M-поперечником* множини W у просторі $\mathscr{X}$.

Поперечник $d_M(W,\mathscr{X})$ введений у 1936 році А. М. Колмогоровим [16].

Нехай $\mathscr{X}$ і $\mathscr{Y}$ — нормовані простори і $L(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ — сукупність лінійних неперервних відображень $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$. Величина

$$\lambda_M(W,\mathscr{X}) := \inf_{\substack{L_M \in \mathcal{L}_M(\mathscr{X}) \\ \Lambda \in L(\mathscr{X}, L_M)}} \sup_{w\in W} \|w - \Lambda\, w\|_{\mathscr{X}},$$

де нижня грань береться по всіх підпросторах L_M в $\mathcal{L}_M(\mathscr{X})$ і всіх лінійних неперервних операторах Λ, що діють з $\mathscr{X}$ в L_M, називається *лінійним M-поперечником* множини W у просторі $\mathscr{X}$.

Поперечник $\lambda_M(W,\mathscr{X})$ введений у 1960 році В. М. Тихомировим [17].

Наступна апроксимаційна характеристика введена Р. С. Ісмагіловим ([18]). Отже, нехай $\mathscr{Y} = L_q$, $1 \le q \le \infty$ (або $\mathscr{Y} = B_{p,1}$, $p \in \{1, \infty\}$) і $F \subset \mathscr{Y}$ — деякий функціональний клас. *Тригонометричний M-поперечник* класу F у просторі $\mathscr{Y}$ (позначається: $d_M^{\top}(F; \mathscr{Y})$)) визначається формулою

$$d_M^{\top}(F; \mathscr{Y}) = \inf_{\Omega_M} \sup_{f \in F} \inf_{t(\Omega_M; \cdot)} \|f(\cdot) - t(\Omega_M; \cdot)\|_{\mathscr{Y}},$$

де

$$t(\Omega_M; x) = \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j, x)}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$\Omega_M = \{k^1, \ldots, k^M\}$ — будь-який набір векторів $k^j = (k_1^j, \ldots, k_d^j)$, $j = \overline{1, M}$, цілочислової гратки $\mathbb{Z}^d$, c_j — довільні комплексні числа.

Легко бачити, що означені апроксимаційні характеристики пов'язані співвідношеннями:

$$d_M(W, \mathscr{X}) \le \lambda_M(W, \mathscr{X}), \qquad d_M(F, L_q) \le d_M^{\top}(F, L_q). \tag{19}$$

Зауважимо, що друге із співвідношень в (19) справедливе і у випадку, коли замість простору L_q розглядати простори $B_{p,1}$, $p \in \{1, \infty\}$.

Зазначимо, що колмогоровські, лінійні та тригонометричні поперечники класів Нікольського-Бєсова $B_{p,\theta}^r$ періодичних функцій багатьох змінних у просторах Лебега вивчались у роботах [19]–[25]. Що стосується досліджень цих характеристик для інших класів функцій багатьох змінних, то детальна бібліографія щодо цього наведена у монографіях [13, 14], а також у [3]. З іншого боку, практично не дослідженими залишаються питання про поперечники класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ у просторі L_∞. Авторам відомий лише один результат, що стосується колмогоровського поперечника $d_M(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_\infty)$ (див. [26]). Проте точні за порядком значення такого поперечника не знайдені.

Що ж стосується апроксимації класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$, але у просторах $B_{1,1}$, то в [1] доведено таке твердження.

Теорема ([1])**.** *Нехай $1 \le p, \theta \le \infty$, а $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > \frac{1}{p}$ і умову (S_l). Тоді для будь-якої послідовності $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ натуральних чисел такої, що виконується співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, справедливі порядкові оцінки*

$$d_M(B_{p,\theta}^{\Omega},\, B_{1,1}) \asymp \lambda_M(B_{p,\theta}^{\Omega},\, B_{1,1}) \asymp d_M^{\top}(B_{p,\theta}^{\Omega},\, B_{1,1}) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

У даній статті нами встановлено схоже твердження і у випадку простору $B_{\infty,1}$.

Теорема 3. *Нехай $d \ge 2$, $1 \le \theta \le \infty$, а $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l). Тоді для будь-якої послідовності $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ натуральних чисел такої, що виконується співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, мають місце порядкові оцінки*

$$d_M(B_{\infty,\theta}^{\Omega},\, B_{\infty,1}) \asymp \lambda_M(B_{\infty,\theta}^{\Omega},\, B_{\infty,1}) \asymp d_M^{\top}(B_{\infty,\theta}^{\Omega},\, B_{\infty,1}) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{20}$$

Доведення. Оцінки зверху випливають з теореми 1. Справді, якщо для будь-яких заданих додатних дійсних чисел C_1, C_2 $(C_1 \le C_2)$ натуральні числа M та n пов'язані співвідношенням $C_1 2^n n^{d-1} \le M \le C_2 2^n n^{d-1}$, то взявши до уваги оцінку (5), для тригонометричного поперечника можна записати

$$d_M^{\top}(B_{\infty,\theta}^{\Omega},\, B_{\infty,1}) \ll E_{Q_n}(B_{\infty,\theta}^{\Omega})_{B_{\infty,1}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Очевидно, такі ж оцінки зверху справедливі для колмогоровського та лінійного поперечників.

Що стосується оцінок знизу відповідних величин з (20), то з врахуванням співвідношення $\|\cdot\|_{B_{\infty,1}} \geq \|\cdot\|_{B_{1,1}}$, вони є наслідком теореми A. □

Зауваження 2. У випадку, коли $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, $0 < r_1 < l$, а $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_1}$ (тоді $B^{\Omega}_{\infty,\theta} \equiv B^r_{p,\theta}$ — класи Нікольського-Бєсова), теорема 1 доведена в [2].

На завершення наведемо твердження, що стосується одновимірного випадку.

Теорема 4. *Нехай $d = 1$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а функція ω задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l). Тоді справедливі оцінки*

$$d_M(B^{\omega}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1}) \asymp \lambda_M(B^{\omega}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1}) \asymp d^{\top}_M(B^{\omega}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1}) \asymp \omega(M^{-1}). \tag{21}$$

Доведення. Оцінки зверху в (21) випливають з теореми 2 при $p = \infty$, за умови, що числа $M, n \in \mathbb{N}$, пов'язані співвідношенням $2^{n-1} \leq M \leq 2^n$. Відповідні оцінки знизу є наслідком теореми A при $d = 1$, достатньо лише знову взяти до уваги нерівність $\|\cdot\|_{B_{\infty,1}} \geq \|\cdot\|_{B_{1,1}}$. □

ЛІТЕРАТУРА

1. M.V. Hemarskyi, S.B. Hembarska, *Width of classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables in the space $B_{1,1}$*, Ukr. Math. Bull., **15** (2018), №1, 43–56. (in Ukrainian)
2. A.S. Romanyuk, V.S. Romanyuk, *Approximating characteristics of the classes of periodic multivariate functions in the space $B_{\infty,1}$*, Ukr. Mat. Zh., **71** (2019), №2, 271–282.
3. D. Dung, V.N. Temlyakov, T. Ullrich Hyperbolic Cross Approximation, Birkhäauser, 2018, 218 p.
4. T.I. Amanov, *Representation and embedding theorems for function spaces $S^{(r)}_{p,\theta}B(R_n)$ and $S^{(r)}_{p\theta^*}$ $(0 \leqq x_j \leqq 2\pi; j = 1, \dots, n)$*, Trudy Mat. Inst. Steklov., **77** (1965), 5–34. (in Russian)
5. P.I. Lizorkin, S.M. Nikol'skiĭ, *Function spaces of mixed smoothness from the decomposition point of view*, Trudy Mat. Inst. Steklov, **187** (1989), 143–161. (in Russian)
6. N.N. Pustovoitov, *Representation and approximation of periodic functions of several variables with given mixed modulus of continuity*, Anal. Math., **20** (1994), 35–48. (in Russian)
7. Sun Yongsheng, Wang Heping, *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness*, Tr. Mat. Inst. Steklova, **219** (1997), Teor. Priblizh. Garmon. Anal., 356–377 (in Russian); Engl. transl: Proc. Steklov Inst. Math., **219** (1997), №4, 350–371.
8. S.N. Bernstein, Collected Works, V.II, Constructive theory of functions, 1931–1953, Moscow, Akademia Nauk SSSR, 1954.
9. S.B. Stečkin, *On the order of the best approximations of continuous functions*, Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., **15** (1951), №3, 219–242. (in Russian)
10. N.K. Bari, S.B. Stečkin, *Best approximations and differential properties of two conjugate functions*, Trudy Moskov. Mat. Obšč., **5** (1956), 483–522. (in Russian)
11. S.M. Nikol'skiĭ, *Functions with dominatinf mixed derivative satisfying multiple Hölder's condition*, Sibirsk. Mat. Zh., **4** (1963), №6, 1342–1364. (in Russian)
12. S.A. Stasyuk, O.V. Fedunyk, *Approximation characteristics of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables*, Ukr. Matem. Zh., **58** (2006), №5, 692–704. (in Ukrainian); Engl. transl.: Ukr. Math. J., **58** (2006), №5, 779–793.
13. V.N. Temlyakov, *Approximations of functions with bounded mixed derivative*, Trudy Mat. Inst. Steklov., **178** (1986), 1–112. (in Russian)
14. V.N. Temlyakov, Approximation of periodic functions, New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993, 419 p.

15. A.S. Romanyuk, *Approximative characteristics of classes of periodic functions of several variables*, Pratsi Inst. Math. Nats. Akad. Nauk Ukr., **93** (2012), 353 p. (in Russian)
16. A. Kolmogoroff, *Über die beste Annaäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse*, Ann. of Math. **37** (1936), №2, 107–111.
17. V.M. Tihomirov, *Diameters of sets in functional spaces and the theory of best approximations*, Uspehi Mat. Nauk, **15** (1960), №3, 81–120 (in Russian); Engl. transl.: Russian Math. Surveys, **15** (1960), №3, 75–111.
18. R.S. Ismagilov, *Diameters of sets in normed linear spaces, and the approximation of functions by trigonometric polynomials*, Uspehi Mat. Nauk, **29** (1974), №3(177), 161–178, (in Russian); Engl. transl.: Russian Math. Surveys, **29** (1974), №3, 16–186.
19. A.S. Romanyuk, *On the best approximations and Kolmogorov widths of besov classes of periodic functions of many variables*, Ukr. Mat. Zh., **47** (1995), №1, 79–92, (in Ukrainian); Engl. transl.: Ukr. Math. J., **47** (1995), №1, 91–106.
20. A.S. Romanyuk, *Linear Widths of the Besov Classes of Periodic Functions of Many Variables. I*, Ukr. Mat. Zh., **53** (2001), №5, 647–661, (in Ukrainian); Engl. transl.: Ukr. Math. J., **53** (2001), №5, 744–761.
21. A.S. Romanyuk, *Linear Widths of the Besov Classes of Periodic Functions of Many Variables. I*, Ukr. Mat. Zh., **53** (2001), №6, 820–829, (in Ukrainian); Engl. transl.: Ukr. Math. J., **53** (2001), №6, 965–977.
22. A.S. Romanyuk, *Kolmogorov widths of the Besov classes $B^r_{p,\theta}$ in the metric of the space L_∞*, Ukr. Mat. Visn., **2** (2005), №2, 201–218, (in Russian); Engl. transl.: Ukr. Math. Bull., **2** (2005), №2, 205–222.
23. A.S. Romanyuk, *Kolmogorov and trigonometric widths of the Besov classes $B^r_{p,\theta}$ of multivariate periodic functions*, Mat. Sb., **197** (2006), №1, 71–96, (in Russian); Engl. transl.: Sb. Math., **197** (2006), №1, 69–93.
24. A.S. Romanyuk, *Best approximations and widths of classes of periodic functions of several variables*, Mat. Sb., **199** (2008), №2, 93–114; (in Russian), Engl. transl.: Sb. Math., **199** (2008), №2, 253–275.
25. A.S. Romanyuk, *Diameters and best approximation of the classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables*, Anal. Math., **37** (2011), 181–213. (in Russian)
26. A.F. Konograi, *Kolomogorov widths of classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ in the space L_∞*, Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., **3** (2006), №4, 181–197. (in Ukrainian)

Lesya Ukrainka Eastern European National University,
Lutsk, Ukraine
gembarskaya72@gmail.com

Надійшло 01.11.2018
Після переробки 12.03.2019