Математичні Студії. Т.48, №1 Matematychni Studii. V.48, No.1

УДК 517.5

M. Oudadess

ON THE THEME OF LE PAGE

M. Oudadess. *Sur le thème de Le Page*, Mat. Stud. **48** (2017), 82–96.

Some Le Page's commutativity criteria (in complex Banach algebras) are considered. We try to reconstruct a brief history of their evolution. Our recent results, in the real case, are also presented. These propositions are referred in the general framework of not-normalized topological algebras.

I. Intruduction. L'intérêt pour la commutativité a commencé en théorie des opérateurs: Fuglede-Putnam-Rosenblum (1950, 1951,1958), T. Ogasawara (1955), Kleinke-Shirokov (1957, 1956), etc. Mais l'histoire du thème, traité ici, commence avec une note de C. Le Page, au C.R.A.S. de Paris, en 1967. Elle s'intitule '*Sur quelques conditions impliquant la commutativité dans les algèbres de Banach*'. Il y est démontré, en particulier, qu'une algèbre de Banach E complexe et unitaire est commutative dès qu'elle vérifie l'inégalité suivante

$$\text{(LP)} \qquad \|ab\| \leq \alpha \|ba\|, \forall a \in E, \forall b \in E, \text{ pour un } \alpha > 0 \text{ donné.}$$

Cette inégalité a beaucoup retenu l'attention et fait l'objet de nombreux travaux (cf. [1], [3], [5], [14], [15], [34], [40], etc). Nous présentons ici une vue succinte de leur évolution. D'autres aspects, de la note mentionnée, seront également examinés. Celà se veut dans la continuation de l'article panoramique de Belfi et Doran ([4]).

Nous avons assayé, entre autres, de voir comment les hypothèses du théorème de Fuglede-Putnam-Rosenblum auraient pu être à l'origine de certains critères de commutativité.

Depuis 1967, différents auteurs ont examiné le cas complexe non unitaire. B. Aupetit [1] a proposé un contre-exemple qui s'est avéré incorrect; 'l'algèbre' considérée n'est pas un espace vectoriel. C'est en 1988 que le premier contre-exemple a été donné [5].

Le cas réel (même unitaire) est resté récalcitrant. Le seul essai que nous connaissions est celui de A. Srivastas [40]. Les conditions imposées, faisant intervenir la bornitude des fonctions cosinus et sinus, permettent d'appliquer le théorème de Liouville sur les fonctions harmoniques.

Dans ([32]), nous avons adopté une démarche entièrement differente. Nous obtenons une expression équivalente à l'inégalité de Le Page, l'interprétation de laquelle permet de raisonner en termes de proximité; ou autrement dit en termes de voisinages. Ceci a pour conséquence

1. Le traitement du cas réel.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46J05, 46K05.

Keywords: commutativity; Le Page's inequality; real algebras; complex algebras; topological algebras; locally m-convex algebras.

doi:10.15330/ms.48.1.82-96

2. L'extension des résultats (cas réel ou complexe) à des algèbres topologiques non normables.

3. L'abandon de la théorie des fonctions (réelles ou complexes) dans les preuves.

La troisième section est consacrée à l'inégalité (LP) ci-dessus mentionnée. Il semble raisonnable d'en retrouver l'origine dans le théorème de Fuglede-Putnam-Rosenblum (voir le début de la section III). Nous rappelons que l'existence de l'unité est essentielle dans le résultat cité; et améliorons (Contre-exemple III.7) quelque peu le contre-exemple donné dans [5].

La quatrième section traîte des algèbres réelles. Le corps $\mathbb{H}$ des quaternions montre que (LP) n'implique pas la commutativité dans ce cas. On y exhibe l'inégalité analogue qui donne le même résultat (Corollaire IV.3). L'idée semble bonne car elle s étend bien à des algèbres topologiques non normables, en termes de voisinages (Section V).

Dans la cinquième section, nous énonçons, dans le cadre des algèbres topologiques (non nécessairement localement convexes), les analogues de certains des résultats du cas Banach (Proposition V.1, Proposition V.2, Proposition V.3).

En sixième section, nous mettons en évidence un lien entre la commutativité et la composante connexe de l'unité (Proposition VI.2). C'est encore une amélioration du résultat classique de Le Page. Il englobe également celui de Srivastav ([40]).

Une autre condition de Le Page est considérée dans la septième section, à savoir $Ex = Ex^2$ pour tout x dans E. Elle implique la commutativité dans les algèbres de Banach complexes unitaires ([25]). En fait elles sont de dimension finie ([10]). Le cas non unitaire a été examiné dans ([33]). Une étude détaillée a été produite ([6]), dans des algèbres topologiques non normables réelles ou complexes. La condition $Ex = Ex^2$ implique aussi la régularité au sens de von Neumann. Nous examinons cette dernière dans les *a.l.m.c.* de Fréchet (Proposition VII.3) et dans les F-algèbres (Proposition VII.2).

La huitième et dernière section est constituée de commentaires dans le but d'éclairer quelque peu l'intérêt du thème et des résultats.

Le contenu des sections IV, V et VI provient de [32]. Cet article ne vise pas l'exhaustivité. Plusieurs autres résultats peuvent encore être énoncés, à partir de [7], [10], [15], [16], [17] et [34], par exemple. Nous nous sommes limités aux principaux, avec quelques conséquences à titre d'illustration. D'autres aspects du même thème sont considérés dans le cadre d'algèbres des C^*-égalités ([31]).

II. Préliminaires. Dans une algèbre unitaire E (réelle ou complexe) l'ensemble des éléments inversibles est noté $G(E)$. Pour une algèbre complexe, le spectre d'un élément x est $Sp_E(x) = \{z \in C\colon x - ze \notin G(E)\}$. Si l'algèbre est réelle, $Sp_E(x)$ désignera le spectre de x dans la complexifiée $E_{\mathbb{C}}$ de E. Le rayon spectral de x est $\rho(x) = \sup\{|z| : z \in Sp_E(x)\}$. Une algèbre topologique est une algèbre E sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) munie d'une topologie d'espace vectoriel τ pour laquelle la multiplication est séparément continue. Si l'application $(x, y) \longmapsto xy$ est continue (en les deux variables), alors E est dite à multiplication (globalement) continue. On dit qu'une algèbre topologique unitaire est une Q-algebra si $G(E)$ est ouvert. Soit (E, τ) une algèbre localement convexe (*a.l.c.*) avec une multiplication séparément continue dont la topologie τ est donnée par une famille $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de semi-normes. Elle est dite localement A-convexe (*l-A-c.a.*; [8]) si pour tout x et tout λ, il existe $M(x, \lambda) > 0$ tel que

$$\max[p_\lambda(xy), p_\lambda(yx)] \leq M(x, \lambda)p_\lambda(y); \forall y \in E.$$

Dans le cas d'une seule norme, $(E, \|.\|)$ est appelée une algèbre A-normée. Si $M(x, \lambda) = M(x)$ depend seulement de x, on dit que (E, τ) est localement uniformément A-convexe (*a.l.u-*

A-c.; [9]). S'il arrivait que pour λ, $p_\lambda(xy) \leq p_\lambda(x)p_\lambda(y); \forall x, y \in E$, alors (E, τ) est dit une algèbre localement m-convexe (*a.l.m.c.*; cf. [26]). Une telle algèbre est dite de Fréchet (*a.l.m.c.* de Fréchet) si elle est en plus métrisable et complète. Rappelons aussi qu'une *a.l.c.* est à multiplication continuue si pour tout λ, il existe λ'tel que

$$p_\lambda(xy) \leq p_{\lambda'}(x)p_{\lambda'}(y); \forall x, y \in E.$$

On dit qu'une algèbre topologique (E, τ) est une F-algèbre si elle est métrisable et complète. Si en plus elle est localement convexe, on dit que c'est une B_0-algèbre. Une *a.l.m.c.* involutive sera dite une C^*-algèbre si les semi-normes p_λ qui définissent sa topologie satisfont l'égalité $p_\lambda(x^*x) = [p_\lambda(x)]^2$, pout tout x et tout λ.

III. L'inégalité de Le Page: Cas complexe. Nous donnons d'abord un résultat de Fuglede-Putnam-Rosenblum (cf. [38], Theorem 12.16, p. 300), qui est probablement à l'origine de certains critères de commutativité de Le Page ([25]). D'après un commentaire de W. Rudin ([38], p. 381), B. Fuglede a considéré le cas $M = N$, utilisant la résolution spectrale des opérateurs normaux. C. R. Putnam a généralisé à $M \neq N$, avec la même procédure . M. Rosenblum a alors donné une preuve dont P. R. Halmos ([11], p. 304) dit qu'elle est " ... a breathtakingly elegant and simple proof ...' c'est à dire '... simple et élégante à couper le souffle ...'. Dans l'énoncé suivant, H désignera un espace de Hilbert et $\mathcal{B}(H)$ la C^*-algèbre des opérateurs bornés de H. Nous reproduisons la preuve telle que donnée dans [38], car elle contient tous les ingrédients quand on utilise l'inégalité (LP) de Le Page.

Théorème III.1 (Fuglede-Putnam-Rosenblum). *Soient M, N, $T \in \mathcal{B}(H)$ tels que M et N sont normaux et $MT = TN$. Alors $M^*T = TN^*$.*

Démonstration. Prenons d'abord $S \in \mathcal{B}(H)$ quelconque et posons $V = S - S^*$ ainsi que

$$Q = \exp V = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} V^n.$$

On a $V^* = -V$. Alors $Q^* = \exp V^* = \exp(-V) = Q^{-1}$. Donc $Q^*Q = Id$. Ainsi

$$\|\exp(S - S^*)\| = 1, \forall S \in \mathcal{B}(H).$$

Maintenant, si $MT = TN$, on montre par récurrence que $M^kT = TN^k$ pout tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$. Donc $(\exp M)T = T(\exp N)$. D'où $T = (\exp M)T(\exp(-N))$. On peut passer à M^* et N^*. On a alors

$$\begin{aligned}(\exp M^*)T(\exp(-N^*)) &= (\exp(M^* - M))\,[(\exp M)T(\exp(-N))]\,(\exp(N - N^*)) = \\ &= (\exp(M^* - M))T(\exp(N - N^*)).\end{aligned}$$

D'où$\|(\exp M^*)T(\exp(-N^*))\| \leq \|T\|$. Posons $f(\lambda) = (\exp \lambda M^*)T(\exp(-\lambda N^*))$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Les hypothèses du théorème sont aussi vérifiées pour $\overline{\lambda}M$ et $\overline{\lambda}N$. Donc $\|f(\lambda)\| \leq \|T\|$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Par le théorème de Liouville, on a $f(\lambda) = f(0) = T$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. L'on a alors $(\exp \lambda M^*)T = T(\exp(\lambda N^*))$. D'où $M^*T = TN^*$. □

Remarque III.2. L'utilisation du théorème de Liouville par Rosenblum doit avoir été suggérée par un article d'Arens ([2]). Il semble qu'avant lui on considérait les fonctions harmoniques.

A part des techniques standards dans $\mathcal{B}(H)$, en fait dans n'importe quelle C^*-algèbre, l'argument crucial dans la preuve de Rosenblum, c'est l'utilisation du théorème de Liouville pour des fonctions holomorphes vectorielles définies sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. La même idée peut être utilisée dans un cadre plus général, avec des hypothhèses convenables.

Proposition III.3 ([25], Théorème 5.8)**.** *Soit* $(E, \|.\|)$ *une algèbre de Banach complexe et unitaire. Si elle vérifie la condition*

$$(LP) \qquad \|ab\| \leq \alpha \|ba\|, \forall a \in E, \forall b \in E,$$

alors elle est commutative.

Indication. *Pour tout* x *et tout* y *dans* E, *considérer la fonction holomorphe* $f\colon \lambda \longrightarrow f(\lambda) = \exp(\lambda x) y \exp(-\lambda x)$.

Baker et Pym ont généralisé la proposition précédente [3] au cas des applications bilinéaires (au lieu d'une multiplication) et d'une unité approchée bornée (au lieu d'une unité). Leur résultat, dans le cas d'une multiplication, est obtenu comme corollaire d'un théorème de [33]. Dans ce dernier, l'existence d'une unité approchée (non nécessairement bornée) est suffisante. Une autre conséquence en est la commutativité modulo le radical de Jacobson ([33], Corollaire II.3).

Proposition III.4 ([33], Théorème II.1)**.** *Soit* $(E, \|.\|)$ *une algèbre de Banach complexe non unitaire et vérifiant la condition*

$$(LP) \qquad \|ab\| \leq \alpha \|ba\|, \forall a \in E, \forall b \in E.$$

Alors

(i) E^2 *est inclus dans le centre de* E, *où* $E^2 = \{xy\colon x, y \in E\}$.

(ii) Si $E^2 = E$, *alors elle est commutative.*

Hint. Pour tout x, tout y et tout z dans E, considérer la fonction holomorphe $f\colon \lambda \longrightarrow f(\lambda) = \exp(\lambda z) xy \exp(-\lambda z)$.

Un autre résultat de Le Page, dont la preuve est encore plus proche de celle de Rosenblum, concerne l'appartenance d'un élément au centre de l'algèbre. Elle a été étendue au cas non unitaire et non complet dans [33], en réponse à l'une des questions posées par Belfi et Doran dans [4].

Proposition III.5 ([33], Théorème II.6)**.** *Soit* $(E, \|.\|)$ *une algèbre de complexe normée non unitaire et* $a \in E$. *Alors* a *est dans le centre de* E *dès qu'il vérifie l'inégalité suivante*

$$\|ax + \lambda x\| \leq \|xa + \lambda x\|, \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Indication. L'inégalité s'étend à la complétée $\widehat{E}$ de E. Donc on peut supposer que E est de Banach. Soit E_1 l'algèbre unitaire obtenue à partir de E par l'adjonction d'une unité. L'inégalité ne se pronlonge pas nécessairement à E_1(Voir Contre-example III.6 ci-dessous). Cependant, en faisant les calculs dans E_1, on peut raisonner comme dans ([33]).

L'importance de l'unité dans le résultat de Le Page n'a été mis en évidence qu'en 1988. Le contre-exemple suivant a été donné dans ([5]).

Contre-Exemple III.6 ([5]). Soient deux symboles e_1, e_2 tels que $e_1^2 = 0$, $e_2^2 = 0$ et $e_ie_je_i = 0$ pour i, $j \in \{1, 2\}$. Considerons l'algèbre complexe E engendrée par les deux éléments $e_1$et e_2. C'est un espace vectoriel de base $\{e_1, e_2, e_1e_2, e_2e_1\}$. Une norme, sur E, est donnée par

$$\|x\| = \sum_{1\leq i\leq 4} |x_i| \text{, if } x = \sum_{1\leq i\leq 4} x_i.$$

Alors E est une algèbre non commutative telle $\|xy\| = \|yx\|$, pour tout x, y dans E.

En fait, on peut exhiber une algèbre de dimension 3, comme suit.

Contre-exemple III.7. Soit une algèbre anticommutative quelconque E i.e., telle que $xy = -yx$, pour tout x, y dans E. Donc $\|xy\| = \|yx\|$, pour tout x, y dans E. Tout carré est clairement nul. Et l'on a $xyx = 0$ pour tout x, y dans E. Maintenant prenons deux éléments quelconques $e_1$et e_2 tels que $e_1e_2 \neq 0$. Alors l'algèbre complexe E engendrée par les deux éléments $e_1$et e_2 admet $\{e_1, e_2, e_1e_2\}$ comme base.

Remarque III.8. En fait Le Page utilise son inégalité avec trois éléments; plus exactement:

$$\|\exp(\lambda x)y\exp(-\lambda x)\| \leq \alpha \|\exp(-\lambda x)\exp(\lambda x)y\| \leq \|y\|.$$

Ceci suggère une inégalité qui paraît plus générale et qui permet de raisonner de la même manière, à savoir

$$\forall a, b, c \in E\colon\ \|abc\| \leq \alpha \left\|cab'\right\|,$$

où b' dépent seulement de b. Alors $\|\exp(\lambda x)y\exp(-\lambda x)\| \leq \alpha \left\|y'\right\|$, où y' ne dépend que de y et pas du tout de λ.

Le passage de abc à cab', dans la remarque précédente, rappelle les algèbrers latérales. Il est obtenu un résultat de commutativité dans la cadre de ces dernières. Mais rappelons d'abord qu' une algèbre complexe E est dite latérale à droite, respestivement à gauche, si $(\forall x, y \in E)\,(\exists u \in E) : xy = yu$, respestivement $(\forall x, y \in E)\,(\exists u \in E) : xy = vx$.

Il suffit de considérer les algèbres latérales à droite; le traitement est similaire à gauche. Le résultat de base est qu'une algèbre de Banach unitaire latérale à droite est commutative modulo son radical (de Jocobson).

Remarque III.9. Tout corps est une algèbre bilatérale (i.e., latérale à droite et à gauche). En effet, pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a $xy = y\,(y^{-1}xy)$ et $xy = (xyx^{-1})\,x$. Ainsi $u = u\,(x, y) = y^{-1}xy$ et $v = v\,(x, y) = xyx^{-1}$. De plus ils sont uniques, vue l'intégrité du corps. Donc u et v dépendent, généralement, de x et de y à la fois. Comme autre exemple, prendre toute algèbre anti-commutative.

Proposition III.10. *Soit* $(E, \|.\|)$ *une algèbre de Banach unitaire latérale à droite. Si*

$$\forall x, \exists u = u\,(x) : xy = yu, \forall y,$$

alors E *est commutative.*

Démonstration. On a $f(\lambda) = \exp(\lambda y)x\exp(-\lambda y) = \exp(\lambda y)\exp(-\lambda y)u = u$, avec u ne dépendant pas de λ. Donc la fonction holomorphe f est constante. □

Remarque III.11. Dans le cas d'un corps (voir ci-dessus), on a $u = u(x,y) = y^{-1}xy$. S'il est tel que dans la propsition précédente, alors, en particulier, $x^2 = x(y^{-1}xy)$. D'où $xy = yx$.

L'inégalité avec le rayon spéctral, analogue de (LP), s'est également avérée fructueuse. Elle implique la commutativité modulo le radical (cf. [25]). A notre connaissance, toutes les preuves utilisent la théorie des représentations. Voici une courte preuve qui se ramène au théorème de Liouville.

Proposition III.12. *Soit* $(E, \|.\|)$ *une algèbre de Banach unitaire. Si*

$$\rho(xy) \leq \alpha\rho(x)\rho(y), \forall x, y \in E,$$

alors $E/\operatorname{Rad} E$ *est commutative.*

Démonstration. Vue l'inégalité, on a $\operatorname{Rad} E = \{x \in E \colon \rho(x) = 0\}$. Alors le rayon spectral ρ est une norme d'algèbre sur $E/\operatorname{Rad} E$. D'où le résultat par l'argument classique de Le Page. □

IV. Inégalité de Le Page: Cas réel. Essayons d'abord de voir ce que l'inégalité (LP) de Le Page pourrait bien signifier. Elle implique

$$\text{(C)} \quad \forall x, y \in E, \forall \epsilon > 0 \colon \ \|xy\| \leq \epsilon \Longrightarrow \|yx\| \leq \alpha\epsilon.$$

Ceci veut dire que xy et yx sont proches l'un de l'autre autour de l'origine. Mais c'est bien le cas dans le corps des quaternions $\mathbb{H}$. Nous avons même l'égalité $\|xy\| = \|yx\|$. Il apparait donc nécessaire de renforcer la proximité entre xy et yx, dans le cas réel, afin obtenir la commutativité. Nous allons l'exiger au voisinage de tout point de l'algèbre, et non plus seulement de l'origine.

Remarque IV.1. En fait, il y a équivalence entre (LP) et (C), dans le cas complexe unitaire. En effet, comme on l'a dit ci-dessus, (LP) implique la commutativité; donc (C). Pour la réciproque, il suffit encore de montrer que (C) implique aussi la commutativité. Pour tous x, y dans E et tout λ dans $\mathbb{C}$, on a $y = \exp(\lambda x)\exp(-\lambda x)y$. Donc

$$\|\exp(\lambda x)y\exp(-\lambda x)\| \leq \alpha\|y\|, \forall\lambda.$$

On reprend alors l'argument de Le Page.

En ce qui concerne le cas réel, nous commençons par un énoncé sur les morphismes d'algèbres, dont découleront tous les résultas sur la commutativité. Il englobe, en particulier, les analogues de Le Page ([25]) et de Srivastav ([40]).

Proposition IV.2. Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux algèbres réelles unitaires normées. Supposons que $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et $g \colon F \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sont deux fonctions continues telles que $f(0) = 0$, et que $g(x) = 0$ implique $x = 0$. Si $T \colon E \longrightarrow F$ est un morphisme d'algèbre continu tel que

$$g[T(a + bc)] \leq f(a + cb); \forall a \in G(E), \forall b \in G(E), \forall c \in E,$$

alors $T(xy) = T(yx); \forall x, y \in E$.

Démonstration. Puisque T, f et g sont continues, l'inégalité est satisfaite aussi dans la completée de $(E, \|.\|)$. Donc, sans perte de généralité, on peut considérer que E est de Banach. Observons aussi que l'inégalité est équivalente à

$$g\left[T(a - bc)\right] \leq f(a - cb); \forall a \in G(E), \forall b \in G(E), \forall c \in E.$$

Prenons maintenant $x \in E$ et $y \in E$ inversibles. On a, par hypothèse

$$g[T(x - y^{-1}xy)] \leq f(x - xyy^{-1}) = 0.$$

D'où $T(xy) = T(yx)$. Si x ou y n'est pas inversible, considérer les éléments inversibles $e - (\|x\|+1)^{-1}x)$ et $e - (\|y\|+1)^{-1}y$ qui, par ce qui précède, satisfont la dernière inégalité. $\square$

Remarque IV.3. Si $(E, \|.\|)$ est complète, alors les applications T, f et g n'ont pas besoin d'être continues.

Beaucoup de corollaires peuvent être donnés. Nous nous limitons ici à quelques uns.

Corollaire IV.4. *Soit $(E, \|.\|)$ une algèbre réelle unitaire normée. S'il existe $k > 0$ tel que*

$$\|a + bc\| \leq k \|a + cb\| ; \forall a \in G(E), \forall b \in G(E), \forall c \in E,$$

alors E est commutative.

Remarque IV.5. Le Page [25] a également considéré une condition pour qu'un élément a appartienne au centre $C(E)$ de l'algèbre. C'est

$$\|(a + \lambda)x\| \leq \|x(a + \lambda)\| ; \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ceci n'est pas vrai dans le cas réel e.g., $E = \mathbb{H}$. Voici une condition, suggérée par l'inégalité du corollaire précédent,

$$\|y + (a + r)x\| \leq \|y + x(a + r)\| ; \forall y \in G(E), \forall r \in \mathbb{R}, \forall x \in E.$$

En fait, il n'y a même pas besoin du scalaire r. L'inégalité appropriée est

$$\|y + ax\| \leq \|y + xa\| ; \forall y \in G(E), \forall x \in E.$$

Remarque IV.6. En prenant $a = 0$, dans le corollaire IV.4, on obtient $\|bc\| \leq \|cb\|, \forall b, c \in E$; c'est à dire l'inégalité de Le Page, qui est satisfaite par le corps $\mathbb{H}$ des quaternions. Mais ce dernier ne satisfait pas l'inégalité de ce corollaire. En effet $k - ij = k - k = 0$ donc $\|k - ij\| = 0$ alors que $k - ji = k - (-k) = 2k$; donc $\|k - ji\| = 2$.

Pour les analogues des résultats avec le rayon spectral ρ, nous nous contentons de deux d'entre eux. Ici, le rôle est tenu par le rayon de régularité r. Rappelons que, pour un élément x dans E, $r(x)$ est défini par $r(x) = \lim \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Il n'est pas certain que $r(x) = \rho(x)$. Dans $\mathbb{H}$ on a bien $\|.\| = r(.)$, mais celà n'impique pas la commutativité.

Corollaire IV.7. *Soit $(E, \|.\|)$ une algèbre de Banach réelle unitaire. Si E satisfait*

$$\|a + bc\| \leq r(a + cb), \forall a \in G(E), \forall b \in G(E), \forall c \in E,$$

alors elle est commutative.

Corollary IV.8. *Soit $(E, \|.\|)$ une algèbre de Banach réelle unitaire. Si*

(i) $r(a+bc) \leq r(a+cb), \forall a,b,c \in E$,

(ii) $r(x)=0 \Rightarrow x=0, \forall x \in E$,

alors E est commutative.

Remarque IV.9. Nous finissons cette section par un commentaire concernant le cas complexe. Dans sa preuve, Le Page utilise l'inégalité particulière suivante

$$\left\|e^{\lambda x}y\right\| \leq \left\|ye^{\lambda x}\right\|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E, \forall y \in E.$$

Il est intéressant de remarquer que, dans le cas complexe, elle implique celle qui lui correspond ici i.e;

$$\left\|a+e^{\lambda b}c\right\| \leq \left\|a+ce^{\lambda b}\right\|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall b \in E, \forall c \in E.$$

En effet, on a

$$\left|\left\|a+e^{\lambda b}c\right\| - \left\|a+ce^{\lambda b}\right\|\right| \leq \left\|e^{\lambda b}c - ce^{\lambda b}\right\|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall b \in E, \forall c \in E.$$

Mais la première conclusion de Le Page, en utilisant théorème de Liouville, est exactement $e^{\lambda b}c = ce^{\lambda b}; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall b \in E, \forall c \in E$. D'où l'affirmation.

V. Algèbres topologiques. Le fait d'examiner l'inégalité de Le Page via la proximité permet d'avoir des énoncés analogues, à ceux de la section précédente, dans le cadre des algèbres topologiques qui ne sont même pas localement convexes. Soit (E,τ) une algèbre topologique complexe unitaire. On dira qu'elle a la proptiété C^1-exponentielle (C^1-exp) si l'application $x \longmapsto \exp(x)$, de E vers E, est définie et différentiable.

Proposition V.1. Soit (E,τ) une algèbre topologique séparée complexe unitaire ayant la proptiété C^1-exp. Si

$$\forall a, \forall V \in \mathcal{V}(a), \forall b,c\colon bc \in V \Longrightarrow cb \in V,$$

alors E est commutative.

Démonstration. Soient $x,y \in E$. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ $xe^{-\lambda y}e^{\lambda y} = x \in V, \forall V \in \mathcal{V}(x)$. Alors, par hypothèse $e^{\lambda y}xe^{-\lambda y} \in V, \forall V \in \mathcal{V}(x)$. Donc, E étant séparée, $e^{\lambda y}xe^{-\lambda y} = x, \forall \lambda$. D'où, par des arguments standards, $xy=yx$, pour tout x et tout y.

Une autre inégalité de Le Page implique qu'un élément a est nécessairement dans le centre de l'algèbre [25]. C'est la suivante $\|(a+\lambda)x\| \leq \|x(a+\lambda)\|$, $\forall x \in A$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Voici son analogue ici. □

Proposition V.2. *Soit (E,τ) une algèbre topologique séparée complexe unitaire ayant la proptiété C^1-exp, et a un élément de E. Si E est une Q-algèbre telle que*

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), \forall b \in G(E), \forall c \in G(E)\colon bc \in V \Longrightarrow cb \in V,$$

alors $a \in C(E)$.

Démonstration. Vu que E est une Q-algèbre, il existe un voisinage équilibré U of zéro tel que $e+U \subset G(E)$. Maintenant, pour un $x \in E$, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_0 x \in U$. Alors

$$\forall \lambda\colon\ |\lambda| \leq |\lambda_0| \Longrightarrow \lambda x \in U.$$

Ainsi $e + \frac{\lambda x}{n} \in G(E)$, pour tout entier naturel n tel que $\frac{1}{n}|\lambda| \leq |\lambda_0|$. On a alors

$$a = a\Big(e + \frac{\lambda x}{n}\Big)^{-1}\Big(e + \frac{\lambda x}{n}\Big) \in V,\ \forall V \in \mathcal{V}(a).$$

Mais, par hypothèse

$$\Big(e + \frac{\lambda x}{n}\Big)^{-1} a\Big(e + \frac{\lambda x}{n}\Big) \in V,\ \forall V \in \mathcal{V}(a).$$

Donc $(e + \frac{\lambda x}{n})^{-1}a(e + \frac{\lambda x}{n}) = a$. D'où $\exp(\lambda x)a\exp(-\lambda x) = a$. □

L'analogue de l'inégalité renforcée de la section précédente (Corollaire IV.4), dans le cas normé, apparaît dans le résultat suivant. A nouveau, aucun usage n'est fait de fonctions réelles ou complexes.

Proposition V.3. *Soit (E, τ) une algèbre topologique complexe unitaire séparée et qui est aussi une Q-algèbre. Si*

$$\forall a \in G((E), \forall b \in G((E), \forall V \in \mathcal{V}(0), \forall c \in E\colon a + bc \in V \Longrightarrow a + cb \in V,$$

alors A est commutative.

Démonstration. Soient $x, y \in A$. Si $x, y \in G(E)$, alors

$$0 = x - xyy^{-1} \in V \Longrightarrow x - y^{-1}xy \in V; \forall V \in \mathcal{V}(0).$$

Donc $x - y^{-1}xy = 0$. D'où $yx = xy$. Si $y \notin G(E)$ ou $x \notin G(E)$, soit un voisinage équilibré U of zéro tel que $e + U \subset G(E)$. Il existe alors $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_0 x \in U$ et $\mu_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\mu_0 y \in U$. Par ce qui précède, on a $(e+\lambda_0 x)(e+\mu_0 y) = (e+\mu_0 y)(e+\lambda_0 x)$. D'où $yx = xy$. □

Remarque V.4. Le cas particulier des *a.l-A.c.*, donc aussi des *a.l.u-A.c.* des *a.l.m.c.*, a été examiné dans [32].

VI. La composante connexe de l'unité. L'importance de la fonction exponentielle dans l'argument de Le Page et sa relation avec la composante connexe de l'unité nous ont emmené au contenu de cette section. La notion dont il est question, rencontrée dans la cas Banach, s'étend évidemment à un cadre plus général. Soit (E, τ) une algèbre topologique unitaire. Notons par $G = G(E)$ le groupe des éléments inversibles de E. La composante principale (ou neutre) $G_1 = G_1(E)$ de G est la composante connexe de G qui contient e, l'élément unité de E. Si $\exp(x) = \Sigma \frac{1}{n!}x^n$ est définie pour tout x dans E, nous dirons que (E, τ) a la propriété exponentielle (exp). Dans ce cas, $G(E)$ contient $\exp(E) = \{\exp(x)\colon x \in E\}$, l'image de la fonction exponentielle dans E. Voici un résultat fondamental dont la preuve est la même que dans le cas Banach. Cependant, nous la donnons ici dans un esprit d'autosuffisance.

Proposition VI.1. *Soit (E, τ) une algèbre topologique unitaire (réelle ou complexe) qui est localement connexe et une Q-algèbre à multiplication continue ayant la propriété (exp). Alors G_1 est un sous-groupe normal de G.*

Démonstration. Soit $x \in G_1$. Par la propriété Q-algèbre, il existe un voisinage V de x tel que $V \subset G$. Par la connexité locale, V peut être supposé connexe. Donc $V \subset G_1$, car $x \in V \cap G_1$. Ainsi G_1 est ouvert. □

Proposition VI.2. *Soit (E, τ) une algèbre topologique unitairel (réelle ou complexe) qui est localement connexe et une Q-algèbre à multiplication continue, ayant la propriété (exp). Si G_1 est un groupe commutatif, alors E est commutative.*

Démonstration. Soient $x \in G_1$et V un voisinage de 0 tel que $x + V \subset G_1$. Pour tout u dans E, soit $\alpha \neq 0$ tel que $\alpha u \in V$. On a, par hypothèse, $x(x + \alpha u) = (x + \alpha u)x$. D'où $xu = ux$ i.e., $G_1 \subset C(E)$ le centre de E. Si v est un autre élément de E, soit $\beta \neq 0$ tel que $\beta v \in V$. Par ce qui précède, nous avons $(x + \alpha u)(x + \beta v) = (x + \beta v)(x + \alpha u)$. D'où $uv = vu$. □

Remarque VI.3. Toute algèbre localement convexe est localement connexe. Donc la proposition précédente s'applique à de telles algèbres qui sont aussi des Q-algèbres.

Remarque VI.4. Si $\exp(E)$ est constitué d'éléments qui commutent, c'est alors un groupe. Donc $G_1 = \exp(E)$ est commutatif. Maintenant, notons que C. Le Page ([25]), dans le cas complexe, et A. Srivastav ([40]), dans le cas réel, montrent justement que $\exp(E)$ est commutatif, vue les conditions qu'ils imposent.

Comme pour les algèbres de Banach (cf. [38]), on a ce qui suit dans le cas m-convexe. Celà éclaire les résultats de [17], [18] and [34], etc.

Proposition VI.5. *Soit (E, τ) une a.l.m.c. unitaire (réelle ou complexe) complète. Alors*

(i) *G_1 est un sous-groupe normal de G.*

(ii) *G_1 est un sous-groupe engendré par* $\exp(E)$.

(iii) *Si E est commutative, alors* $G_1 = \exp(E)$.

VII. La condition $Ex = Ex^2$. Le Page a également considéré une autre condition qui implique la commutativité dans les algèbres de Banach complexes unitaires. Celle-ci est totalement algèbrique, à savoir

$$\text{(C)} \qquad Ex = Ex^2, \text{ pout tout } x \in E.$$

Nous n'avons pas pu en retracer précisément l'origine, mais nous sommes convaincus qu'elle se trouve dans la décomposition de certaines matrices et plus généralement de certains opérateurs; en relation avec des questions de commutativité. En attendant la determination de l'origine probable de cette condition, on peut parler des résultats qu'elle a engendrés et de leut évolution. Disons d'abord qu (C) n'est pas vérifiée dans l'algèbre des matrices carées. En effet, avec $M^2 = 0$, on a $M \neq NM^2$ pour tout N.

Duncan et Tullo ont montré que, en plus de la commutativité, elles sont en fait de dimension finie ([10]). Esterle et Oudadess ([22]) ont complètement décrit la structure des algèbres de Banach complexes non unitaires vérifiant (C). D'après un commentaire de B. Aupetit ce résultat aurait été connu depuis longtemps si on remarquait que (C) implique

$$\text{(C')} \qquad \forall x \in E, \exists y \in E \colon x = xyx.$$

Il renvoie à un livre de I. Kaplansky où cet auteur affirme, sans preuve, que tout algèbre de Banach satisfaisant (C') est de dimension finie. Ensuite B. Aupetit propose une preuve basée sur celle de Duncan et Tullo. Mais en essayant d'en préciser un argument, il commet une erreur (cf. [7]). Avec R. choukri et A. El Kinani, nous avons considéré la condition (C') dans le cadre plus général des B_0-algèbres (non m-convexes) et des *a.l.m.c.* de Fréchet.

Toute algèbre vérifiant la condition (C') est dite régulière au sens de von Neumann (on écrira simplement v-N-algèbre). Nous commençons par des résultats tout à fait généraux.

Proposition VII.1 (cf. [7]). *Soit (E, τ) une algèbre topologique qui est une v-N-algèbre. Alors*

(i) E est semisimple.

(ii) Les idéaux Ex et xE sont fermés, pour tout x.

(iii) Tout idéal à droite ou à gauche, de E, qui est de type fini est fermé.

(iv) Si (E, τ) est normée, alors c'est une Q-algèbre.

(v) Si (E, τ) est une Q-algèbre, alors tout idéal bilatère (non nécessairement maximal) est fermé.

Voici maintenant les résultats principaux. Le premier contient, en particulier, le résultat annoncé par Kaplansky.

Proposition VII.2 (cf. [7]). *Soit (E, τ) une algèbre topologique qui est une v-N-algèbre. Si c'est une B_0-algèbre qui est aussi une Q-algèbre, alors elle est de dimension finie.*

Proposition VII.3 (cf. [7]). *Soit (E, τ) une algèbre topologique qui est une v-N-algèbre. Si c'est une a.l.m.c. de Fréchet (non nécessairement une Q-algèbre), alors c'est une limite projective d'algèbres de dimension finie.*

Remarque VII.4. La métrisabilité est nécessaire dans la proposition précédente (cf. [7]). Cependant, nous avons ce qui suit.

Proposition VII.5 (cf. [7]). *Soit (E, τ) une algèbre topologique qui est une v-N-algèbre. Si c'est une C^*-algèbre, alors c'est une limite projective d'algèbres de dimension finie.*

VIII. Une autre condition de Le Page. L'un des résultats de Le Page est un sous-produit de la preuve d'un autre. Dans la dite preuve, l'inégalité (LP) n'est utilisée que dans le cas particulier $a = e^{\lambda x}$ et $b = ye^{-\lambda x}$. Et l'on a $\|\exp(\lambda x) y \exp(-\lambda x)\| \leq \alpha \|y\|$, $\forall \lambda$. D'où l'idée, semble-t-il, d'exhiber une autre majoration moins forte et où λ pourrait même apparaître dans le second membre. Dans la cas commutatif, on a

$$\exp(\lambda x) y \exp(-\lambda x) = \sum_{0}^{\infty} S_n, \text{ où } S_n = \sum_{p+q=0}^{n} \frac{(-1)^q}{p!q!} x^{p+q} y \lambda^{p+q}.$$

En procédant à des calculs, sans simplification, on obtient

$$\exp(\lambda x) y \exp(-\lambda x) = \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} D_x^n y\right) \lambda^n, \text{ où } D_x y = xy - yx \text{ et } D_x^{n+1} y = D_x D_x^n y.$$

La formule de Cauchy-Hadamard pour le rayon de convergence conduit à

$$(\mathrm{C}_1) \qquad \|D_x^n y\|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 0, \text{ pour tous } x,\ y.$$

C'est la condition (2) de la proposition 4 [25]. Elle est équivalente à la condition (1) de la même proposition, c'est à dire

pour tous x, y et tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$(\mathrm{C}_2) \qquad \|\exp(\lambda x) y \exp(-\lambda x)\| \leq M e^{\varepsilon|\lambda|}, \ \forall \lambda.$$

Les conditions équivalentes (C_1) et (C_2) ne sont pas suffisantes pour impliquer la commutativité. Cependant, on obtient ce qui suit.

Proposition VIII.1 ([25]). *Si une algèbre de Banach complexe et unitaire satifait l'une des conditions (C_1) ou (C_2), alors elle est commutative modulo son radical de Jacobson.*

Remarque VIII.2. Il a été observé, dans [33], que l'existence d'une unité n'est pas nécessaire. En effet on a $D_{x+\alpha}(y+\beta) = D_x(y)$, pour tous x, y et tous α, β.

IX. Commentaires. L'inégalité dans le corollaire IV.3 et la condition dans la proposition V.3 expriment qu'une propriété locale devient en fait globale. Il en est de même, dans un certain sens, de la condition $Ex = Ex^2$. Pr. Mallios suggère un lien avec la physique. Pour lui, la non commutativité n'est pas inhérente à celle-ci. C'est plutôt une conséquence de l'approche mathématique adoptée. Il voit que les résultats mentionnés constituent, en quelque sorte, une confirmation de sa position. En celà que si nous mesurons localement d'une manière commutative, alors nous serons aussi globalement dans le cadre commutatif. D'un autre côté, en physique -en fait, de manière générale- nous n'opérons que localement i.e., au voisinage de chaque point. Il n'y a donc pas lieu de privilégier un point quelconque, en particulier l'origine.

Il est peut être aussi utile de s'exprimer brièvement sur l'intérêt du sujet. On en dit, par exemple, que si l'on était capable de montrer la commutativité d'une algèbre de Banach vérifiant l'inégalité (LP), on devrait l'être encore plus pour montrer qu'elle est commutative sans passer par celle-ci. Celà semble bien trouvé mais c'est, tout de même, un point de vue curieux. D'autant plus que certains, dès qu'ils peuvent démonter quelque chose, dans n'importe quel domaine, se dépêchent de le publier; en contradiction flagrante avec leurs fermes affirmations antérieures. En tout cas, le thème s'inscrit dans le cadre du classement des algèbes. Il mérite que l'on s'y intéresse pour celà; d'autant que, en mathématique, on manipule beaucoup plus d'inégalités que d'égalités. Et il y a aussi que l'on peut s'y intéresser pour la liberté de l'esprit humain. Quoiqu'il en soit, c'est bien sûr Le Page qui a initié l'étude de la commutativité dans le cadre général des algèbres de Banach. Cependant l'intérêt pour celle-ci avait déjà commencé en théorie des opérateurs: Fuglede [23], Putnam [36], Roseblum [37], Ogasawara [29], Radjavi-Rosenthal (cf. [31]), etc.

Faut-il alors s'arrêter aux algèbres de Banach? C'est soulever la question de la généralisation. Tant qu'on reste confiné à un cadre et à des techniques, auxquelles on donne la préférence à l'exclusion d'autres, on atteint vite ses limites. Quand on élargit sa vue, les phénomènes peuvent devenir compréhensibles. Des améliorations et/ou des extensions deviennent alors possibles. Et, comme le dit Pr. Mallios, on ne peut pas généraliser ce qu'on n'a pas bien compris. Ou encore, autrement dit, on ne peut généraliser que ce qu'on a bien compris. Cette question mériterait, à elle-seule, beaucoup d'écrits. Mais nous nous limitons ici à rappeler, pour méditation, les afirmations de quelques grands noms des mathématiques.

'*Important for many applications is also the problem of extending the theory of normed rings* [Banach algebras] *to several classes of topological* (non normed) *rings*, *and* (moreover) *essential rôle here must be , obviously, play the theory of generalized functions of Laurent Schwartz* [...]. *For commutative rings this type of research began in the works of Arens* [...] *and Waelbroeck* [...].'

M. A. Naimark, *Normed rings* (Russian edition), Moscow (1955); Trans. to english: Pr. A. Mallios.

'*A growing interest in a general representation theory of topological algebras in the non normed (unbouded) case may be observed. This is due to its applications in quantum theory where this problem arose at least ten years ago, when the quantum field theory was formulated in the language of the representation theory of algebras by Borchers [.] and Uhlmann [.]. From the mathematical point of vue, it is astonishing that up to now the well-developed theory of normed algebras and their representation ([.], [.]) has such few generalizations to the non normed case.*'

G. Lassner, *Topological algebras of operators*, Reports Mathematical Physics, Vol. 3 (1972), 279-... .

'*Dans les années trente, au moment où, grâce aux travaux de Banach, la théorie de espaces vectoriels normés était déjà construite, l'impression s'était faite que cette classe d'espaces était sufisamment vaste pour satisfaire tous les besoins concrets de l'analyse. Mais plus tard il est apparu qu'il n'en était pas ainsi. Il s'est avéré que pour beaucoup de questions on a affaire à des espaces, tels que l'espace des fonctions indéfiniment dérivables, l'espace R^∞ de toutes les suites numériques, etc., dont la topologie naturelle ne peut pas être définie à l'aide d'une norme. Par conséquent, les espaces vectoriels topologiques non normés ne présentent rien 'd'exotique' ou de 'pathologique'. Bien au contraire, certains de ces espaces représentent des généralisations de l'espace euclidien de dimension finie, non moins naturelles et importantes que, par exemple, l'espace de Hilbert*'.

A. Kolmogorov, **S. Fomine**, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, p. 168, 2ième Edit., Edit. Mir, Moscou (1977)

A titre de conclusion, on peut dire que les prévisions de Naimark, Lassner, Kolmogorov et Fomine (et d'autres) ont commencé à être concrétisées dans l'oeuvre monumentale du Pr. A. Mallios. Il ne s'agit pas seulement de l'aspect mathématique. Sa géométrie différentielle abstraite (axiomatique, [27]) a déjà trouvé des applications potentielles en relativité générale et en théorie quantique [28].

Remerciements. Je tiens à exprimer mes chaleureux remerciements à feu Pr. A. Mallios qui a insisté pour que je continue à travailler sur le sujet, alors qu'on pensait que pratiquement tout avait été dit dans le cas complexe; et que le cas réel restait hermétique. Je retiens, en particulier, son leit-motiv '*Il ne faut pas s'arrêter aux résultats; il faut regarder au delà*'. Il m'a également sollicité pour écrire cet article dont l'intérêt lui apparaissait évident. Le titre est également de lui.

Note. Cet auteur et Y. Tsertos ont donné des critères de commutativité dans des algèbres non unitaires, réelles ou complexes ([30]).

BIBLIOGRAPHIE

1. B. Aupetit, Propriétés Spectrales des Algèbres de Banach, Lect. Notes Math. 735, Springer-Verlag, 1979.
2. R. Arens, *Linear topological division algebras*, Bull. Amer. Math. Soc., **53** (1947), 623–630.
3. J.W. Baker, J.S. Pym, *A remark on continuous bilinear mappings*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **17** (1970-1971), №2, 245–248.

4. V.A. Belfi, R.S. Doran, *Norm and spectral characterizations in Banach algebras*, L'enseignement mathématique, Tome **XXXVI** (1977), Fasic, 1–2, 103–130.
5. O.H. Cheikh, M. Oudadess, *On a commutativity question in Banach algebras,* Arab Gulf J. Sci. Res., **A6** (1988), №2, 173–179.
6. R. Choukri, A.El Kinani, M. Oudadess, *Etude des algèbres A vérifiant $xA = Ax$ ou $xAx = x^2Ax^2$.* General topological algebras (Tartu, 1999), 59–71, Math. Stud. (Tartu), 1, Est. Math. Soc., Tartu, 2001.
7. R. Choukri, A.El Kinani, M. Oudadess, *On some von Neumann topological algebras.*
8. A.C. Cochran, R. Keown, C.R. Williams, *On a class of topological algebras*, Pacific J. Math., **34** (1970), 17–25.
9. A.C. Cochran, *Representation of A-convex algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **41** (1973), 473–479.
10. J. Duncan, A.W. Tullo, *Finite dimensionality, nilpotents and quasi-nilpotents in Banach algebras*, Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser., **21** (1974), 45–49.
11. P.R. Halmos, A Hilbert Space Problem Book, Sec. Edit., Springer-Verlag, 1980.
12. M. Haralampidou, *A local characterization of Le Page Conditon. Dayton algebras*, Proc. Ictaa 2001, Acta Univ. Ouluensis, Sci. Rer. Nutur. A 408, 100–106.
13. M. Haralampidou, *Classification of locally m-convex algebras through Le Page conditon*, Ann. Soc. Math. Polonae, Ser. I: Comm. Math. **XLIV** (2004), №2, 256–269.
14. R.A. Hirschfeld, W. Zelazko, *On spectral norm* Banach *algebras*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., **16** (1968), 195–199.
15. A.El Kinani, A. Najmi, M. Oudadess, *Inégalité généralisée de Le Page et commutativité dans les algèbres p-Banach*, Rev. Acad. Cienc. Zaragoza, **55** (2000), 51–57.
16. A.El Kinani, A. Ifzarne, M. Oudadess, *Commutativité de certaines algèbres de Banach à automorphisme involutif*, Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, Serie 2, **53** (1998), 165–173.
17. A.El Kinani, M. Oudadess, *Unified inequality and commutativity in Banach algebras with or without involution*, Pitman Research Notes Math., **377** (1998), 49–55.
18. A.El Kinani, M. Oudadess, *Un Critère généralisé de Le Page et commutativité*, C. R. Math. Acad. Sci. Canada, **XVIII** (1996), №2–3, 71–74.
19. A.El Kinani, M.Oudadess, *Applications bi-semilinéaires et commutativité dans les algèbres de Banach involutives*, Ann. Math. Blaise Pascal, **6** (1999), №2, 15–20.
20. A.El Kinani, A. Najmi, M. Oudadess, *Algèbres de Banach bilatérales*, Bull. Greek Math. Soc., **45** (2001), 17–29.
21. A.El Kinani, A. Najmi, M. Oudadess, *One sided Banach algebras*, Turk. J. Math., **26** (2002), 305–316.
22. J. Esterle, M. Oudadess, *Structure of Banach algebras satisfing $Ax^2 = x^2A$ for every x in A*, Proc. Amer. Math. Soc., **96** (1986), №1, 91–94.
23. B. Fuglede, *A commutativity theorem for normal operators*, Proc. N.A.S., **36** (1950), 35–40.
24. D.C. Kleinke, *On operator commutaters*, Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1957), 535–536.
25. C.Le Page, *Sur quelques conditions entraînant la commutativité dans les algèbres de Banach,* C. R. Acad. Sci. Paris Ser A-B, **265** (1967), 235–237.
26. A. Mallios, Topological algebras. Selected topics, North-Holland, Amsterdam, 1986.
27. A. Mallios, Geometry of Vector Shieves. An axiomatique Approach to Differential Geometry, Vols. I (Chapts I-V), II (Chapts VI-XI), Kluwer, Dordrecht (1998).
28. A. Mallios, Moderne Differential Geometry in Gauge Theory: Maxwell Fields, V.I, Yang-Mills Fields, V.II, Birkhauser, Boston (2006-2007).
29. T. Ogasawara, *A Theorem on operator algebras*, J. Sci. Hiroshima Univ., **18**, (1955), №3, 307–309.
30. M. Oudadess, Y. Tsertos, C*ommutativity results in non unital real topological algebras,* Applications and applied Math., **7** (2012), №1, 164–174.

31. M. Oudadess, *Commutativity conditions in algebras with C^*-equalities*, Communications in Mathematics, **3** (2012), №1, 61–73.
32. M. Oudadess, *Theorem of Gelfand-Mazur and commutativity in unital real topologial algebras*, Mediterranean J. Math. Med. J. Math., **8** (2011), 137–151.
33. M. Oudadess, *Commutativité de certaines algèbres de Banach*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **28** (1983), №1, 9–14.
34. M. Oudadess, *Commutativity of some A-convex algebras*, J. Univ. Kuwait (Sci.), **14** (1987), 205–210.
35. T. Ogasawara, *A Theorem on operator algebras*, J. Sci. Hiroshima Univ., **18** (1955), №3, 307–309.
36. C.R. Putnam, *On normal operators in Hilbert spaces*, Amer. J. Math., **73** (1951), 357–362.
37. M. Rosenblum, *On a theorem of Fuglede and Putnam*, J. London Math. Soc., **33** (1958), 376–377.
38. W. Rudin, Functional Analysis, Mc Graw-Hill, 1973.
39. F.V. Shirokov, *Proof of a conjecture of Kaplansky*, Uspehi Mat. Nauk, **11** (1956), 167–168.
40. A. Srivastav, *Commutativity criteria for real Banach algebras*, Arch. Math., **54** (1990), 65–72.

c/o A. El Kinani Ecole Normale Supérieure Rabat, Morocco
oudadesshha@gmail.com, oudadessm@yahoo.fr

Reçule 25.09.2017