УДК 517.51

Г. А. Волошин, В. К. Маслюченко, В. С. Мельник

ПАРИ ГАНА І НУЛЬОВА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА

V. K. Maslyuchenko, V. S. Mel'nyk, H. A. Voloshyn, *Hahn's pairs and zero inverse problem*, Mat. Stud. **48** (2017), 74–81.

We prove that for a function $\alpha_0\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ there exists a separately continuous function $f\colon [0,1]^2\to\mathbb{R}$ such that $E_0(f^x)=\alpha_0(x)$ on [0,1] if and only if α_0 is the nonnegative lower semicontinuous function, where $f^x(y)=f(x,y)$ for any $x,y,\in[0,1]$ and $E_0(g)$ is the best approximation of a function g by a constant.

1. Вступ. Згідно з оберненою теоремою Бернштейна [1, 2] для кожної спадної нескінченно малої послідовності невід'ємних чисел α_n, $n\in\{0,1,\ldots\}$, існує така неперервна функція $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, що для кожного n її найкраще рівномірне наближення $E_n(f)$ многочленами степеня $\le n$ дорівнює α_n. Ця теорема послужила відправною точкою для багатьох узагальнень та аналогів (див. [3, 4] і вказану там літературу).

У статті [5] для неперервної за другою змінною функції $f\colon [0,1]^2\to\mathbb{R}$ розглянуто функції $\alpha_n(x)=E_n(f^x)$, де $f^x(y)=f(x,y)$, які є неперервними, коли функція f неперервна за сукупністю змінних. Там поставлені питання про опис функціональних послідовностей $\alpha_n(x)=E_n(f^x)$ для сукупно чи нарізно неперервних функцій f, зокрема, сформульовано *проблему*: чи для кожної спадної послідовності неперервних невід'ємних функцій $\alpha_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, яка поточково прямує до нуля, існує така неперервна за сукупністю змінних функція $f\colon [0,1]^2\to\mathbb{R}$, для якої $E_n(f^x)=\alpha_n(x)$ на $[0,1]$ для кожного номера n? Поки що вдалося розв'язати ([6]) лише спрощений варіант цієї проблеми, що стосується скінченного числа неперервних функцій $\alpha_0(x),\ldots,\alpha_n(x)$. Тут ми розпочинаємо дослідження функцій $\alpha_n(x)$ для нарізно неперервних функцій f. Для нарізно неперервної функції $f\colon [0,1]^2\to\mathbb{R}$ функції $\alpha_n(x)=E_n(f^x)$, як це зауважено в [5], можуть бути розривними, але вони обов'язково належать до першого класу Бера, адже асоційоване з f відображення $\varphi\colon [0,1]\to C_u[0,1]$, $\varphi(x)=f^x$, де $C_u[0,1]$ — банахів простір неперервних функцій $g\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ з рівномірною нормою, належить до першого класу Бера ([5, теорема 1]), а відображення $E_n\colon C_u[0,1]\to\mathbb{R}$ неперервні. Тому постає *питання*: для яких послідовностей функцій $\alpha_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ з першого класу Бера можна визначити нарізно неперервну функцію $f\colon [0,1]^2\to\mathbb{R}$, для якої $E_n(f^x)=\alpha_n(x)$ на $[0,1]$ для кожного n? Нетривіальною є і нульова обернена *задача*: для яких функцій $\alpha_0\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ з першого класу Бера існує така нарізно неперервна функція $f\colon [0,1]^2\to\mathbb{R}$, що $E_0(f^x)=\alpha_0(x)$? Тут ми даємо відповідь на це останнє питання, встановивши, що для функції $\alpha_0\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ існує така нарізно неперервна функція

2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 41A10, 54B10, 54C05, 54C08, 54C30, 54D30.
Keywords: Inverse Bernstein's theorem; Hahn's pair; separately continuous function.
doi:10.15330/ms.48.1.74-81

$f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що $E_0(f^x) = \alpha_0(x)$ на $[0,1]$, тоді і тільки тоді, коли α_0 — невід'ємна напівнеперервна знизу функція.

2. Формула для $E_0(f)$. Для довільної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$, заданої на множині X розглянемо числа

$$M(f) = \sup_{x\in X} f(x) \quad \text{і} \quad m(f) = \inf_{x\in X} f(x),$$

які належать до розширеної числової прямої $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, точніше $M(f) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ і $m(f) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Вони є скінченними, якщо функція f обмежена.

Покладемо $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|\{|f(x)|\colon x \in X\}$. Функцію $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^X \to [0; +\infty]$, яка може набувати і значення $+\infty$, ми називатимемо *рівномірною нормою*, а функцію

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

рівномірною відстанню або *відхиленням.*

Для топологічного простору X символом $C(X)$ ми позначаємо простір неперервних функцій $f\colon X \to \mathbb{R}$. Якщо X — компактний простір, то рівномірна норма $\|\cdot\|$ на $C(X)$ набуває скінченних значень і $\|f\| = \max\{|f(x)|\colon x \in X\}$ для кожної $f \in C(X)$.

Нехай $X = [a, b]$ — відрізок числової прямої і $P_n[a, b]$ — лінійний підпростір простору $C[a, b]$, що складається з усіх многочленів $g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n$, степінь яких не перевищує n. Для функції $f \in C[a, b]$ число

$$E_n(f) = d(f, P_n[a, b]) = \inf\{\|f - g\|\colon g \in P_n[a, b]\}$$

називається *n-им рівномірним наближенням* f. Зокрема, $E_0(f) = \inf\{\|f - c\|\colon c \in \mathbb{R}\}$. Оскільки сталі функції можна розглядати на довільній множині X, то і число $E_0(f)$ визначається формулою для довільних функцій $f\colon X \to \mathbb{R}$, заданих на непорожній множині X.

Теорема 1. *Нехай X — непорожня множина, $f\colon X \to \mathbb{R}$ — обмежена функція і $\mu = \frac{1}{2}(M(f) - m(f))$. Тоді $E_0(f) = \mu$, при цьому стала функція $c_0 = \frac{1}{2}(M(f) + m(f))$ є єдиною серед сталих функцій, для якої виконується рівність*

$$E_0(f) = \mu = \|f - c_0\|.$$

Доведення. Доведемо, що $\|f - c_0\| = \mu$. Нехай $x \in X$. Тоді $m(f) \le f(x) \le M(f)$, отже, $m(f) - c_0 \le f(x) - c_0 \le M(f) - c_0$. Але $m(f) - c_0 = -\mu$, а $M(f) - c_0 = \mu$, тому $-\mu \le f(x) - c_0 \le \mu$, тобто $|f(x) - c_0| \le \mu$. Звідси і $\|f(x) - c_0\| \le \mu$.

Далі, для довільного $\varepsilon > 0$ існують такі точки x_1 і x_2 з X, що $f(x_1) < m(f) + \varepsilon$ і $f(x_2) > M(f) - \varepsilon$. В такому разі $f(x_1) - c_0 < m(f) - c_0 + \varepsilon = -\mu + \varepsilon$ і $f(x_2) - c_0 > M(f) - c_0 - \varepsilon = \mu - \varepsilon$. Тому, $\|f - c_0\| \ge |f(x_1) - c_0| \ge c_0 - f(x_1) > \mu - \varepsilon$, так само $\|f - c_0\| \ge |f(x_2) - c_0| \ge f(x_2) - c_0 > \mu - \varepsilon$. Тобто, ми двома способами пояснили, що $\|f - c_0\| > \mu - \varepsilon$. Спрямувавши ε до 0, отримаємо, що $\|f - c_0\| \ge \mu$.

З обох отриманих нерівностей випливає, що $\|f - c_0\| = \mu$.

Далі доведемо, що при $c \ne c_0$ виконується нерівність $\|f - c\| > \mu$. Припустимо, що $c < c_0$. Розглянемо додатне число $\varepsilon_0 = c_0 - c$. Існує така точка $x^* \in X$, що $f(x^*) > M(f) - \varepsilon_0$. Але,

$$M(f) - \varepsilon_0 = M(f) - c_0 + c = \mu + c.$$

Тому, $\|f - c\| \ge |f(x^*) - c| \ge f(x^*) - c > M(f) - \varepsilon_0 - c = \mu$, звідки випливає, що $\|f - c\| > \mu$.

Подібно, при $c > c_0$ розглянемо число $\varepsilon_0 = c - c_0$ і знайдемо таку точку $x_* \in X$, що $f(x_*) < m(f) + \varepsilon_0$. Тут $m(f) + \varepsilon_0 = m(f) - c_0 + c = -\mu + c$, тому, $\|f - c\| \geq |f(x_*) - c| \geq c - f(x_*) > c - (m(f) + \varepsilon_0) = c - (-\mu + c) = \mu$.

З доведеного випливає, що $E_0(f) = \mu$, при цьому стала функція c_0 є єдиною серед сталих функцій, для якої $E_0(f) = \mu = \|f - c_0\|$, адже для інших сталих $c \neq c_0$ виконується нерівність $\|f - c\| > \mu$. $\square$

3. Пара Гана, що пов'язана з нарізно неперервною функцією. Нехай X — топологічний простір і $x_0 \in X$. Функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ називається *напівнеперервною зверху (знизу) в точці* x_0, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ ($f(x) > f(x_0) - \varepsilon$) на U, і просто *напівнеперервною зверху (знизу)*, якщо вона є такою у кожній точці x з X. *Парою Гана* на просторі X ми називаємо таку пару (g, h) функцій $g, h\colon X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq h(x)$ на X, g — напівнеперервна зверху і h — напівнеперервна знизу. Будь-яка функція $f\colon X \to \mathbb{R}$, для якої $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X, називається *проміжною* для пари Гана (g, h). Відомо [7, с.105], що T_1-простір X є нормальним тоді і тільки тоді, коли кожна пара Гана (g, h) на X має неперервну проміжну функцію. Це твердження ми називаємо *теоремою Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова* чи, коротше, *теоремою Гана*, який довів існування проміжної неперервної функції для кожної пари Гана у випадку метричного простору X [8]. Виявляється, що з кожною обмеженою за другою змінною нарізно неперервною функцією $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, заданою на добутку непорожніх топологічних просторів X і Y природним чином пов'язана певна пара Гана на X.

Для відображення $f\colon X \times Y \to Z$ і точки $(x, y) \in X \times Y$ покладемо

$$f^x(y) = f(x, y) = f_y(x).$$

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, Y — непорожня множина, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — неперервна за першою змінною і обмежена за другою змінною функція, а $g(x) = \inf\{f^x(y)\colon y \in Y\}$ і $h(x) = \sup\{f^x(y)\colon y \in Y\}$ на X. Тоді (g, h) — пара Гана на X.*

Доведення. Зрозуміло, що функції g і h набувають скінченних значень. Нерівність $g(x) \leq h(x)$, очевидно, виконується для кожного $x \in X$. Доведемо, що функція $g\colon X \to \mathbb{R}$ напівнеперервна зверху, а h — знизу. Нехай $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. З означення inf випливає, що існує така точка $y_1 \in Y$, що $f^{x_0}(y_1) < g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. З неперервності функції f_{y_1} у точці x_0 випливає, що існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f_{y_1}(x) < f_{y_1}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$ на U. Тоді при $x \in U$ виконується нерівність

$$g(x) \leq f^x(y_1) = f_{y_1}(x) < f_{y_1}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} = f^{x_0}(y_1) + \frac{\varepsilon}{2} < g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = g(x_0) + \varepsilon,$$

що дає нам напівнеперервність зверху функції g в точці x_0.

Так само існує $y_2 \in Y$, що $f^{x_0}(y_2) > h(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$. З неперервності функції f_{y_2} у точці x_0 випливає, що існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f_{y_2}(x) > f_{y_2}(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$ на U. Тоді для $x \in U$ маємо

$$g(x) \geq f^x(y_2) = f_{y_2}(x) > f_{y_2}(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} = f^{x_0}(y_2) - \frac{\varepsilon}{2} > h(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = h(x_0) - \varepsilon,$$

а це означає, що функція h напівнеперервна знизу в точці x_0. $\square$

Зауваження. Зрозуміло, що для доведення напівнеперервності зверху функції g ми використали лише те, що функції f_y напівнеперервні зверху, а для напівнеперервності знизу функції h — лише те, що функції f_y напівнеперервні знизу.

Наслідок 1. *Нехай X — топологічний простір, Y — непорожній компактний простір, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція і $g(x) = \min_{y\in Y} f^x(y)$, а $h(x) = \max_{y\in Y} f^x(y)$ на X. Тоді (g, h) — пара Гана на X.*

4. Побудова нарізно неперервної функції з даними максимумами чи мінімумами. Для довільної функції $f\colon X\times Y \to \mathbb{R}$ визначимо функції $S_f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ та $I_f\colon X \to [-\infty, +\infty)$ формулами

$$S_f(x) = \sup_{y\in Y} f(x, y) \quad \text{та} \quad I_f(x) = \inf_{y\in Y} f(x, y).$$

У попередньому пункті ми з'ясували, що для довільних топологічних просторів X і Y і нарізно неперервної функції f функції S_f та I_f будуть напівнеперервними знизу і зверху відповідно, якщо вони набувають скінченних значень. Легко перевірити, що це збережеться і у випадку нескінченних значень. Природно постають і обернені *задачі*: для для напівнеперервних зверху і знизу функцій $h\colon X \to \mathbb{R}$ і $g\colon X \to \mathbb{R}$ побудувати нарізно неперервну функцію $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, таку, що: а) $S_f = h$; б) $I_f = g$; в) $(I_f, S_f) = (g, h)$, якщо $g(x) \le h(x)$ на X. Тут ми займемося двома першими задачами а) і б).

Для цього нам потрібний один результат Тонґа ([8, с.106]), який ми подамо у такій розширеній редакції.

Теорема А. *Для T_1-простору X наступні умови рівносильні:*

- *(i) X — досконало нормальний простір;*
- *(ii) для кожної напівнеперервної знизу функції $h\colon X \to \mathbb{R}$ існує така зростаюча послідовність неперервних функцій $h_n\colon X \to \mathbb{R}$, що $h_n(x) \to h(x)$ на X;*
- *(iii) для кожної напівнеперервної зверху функції $g\colon X \to \mathbb{R}$ існує така спадна послідовність неперервних функцій $g_n\colon X \to \mathbb{R}$, що $g_n(x) \to g(x)$ на X;*
- *(iv) для кожної напівнеперервної знизу функції $h\colon X \to \mathbb{R}$ існує така послідовність неперервних функцій $h_n\colon X \to \mathbb{R}$, що $h_n(x) \to h(x)$ на X і $h_n(x) \le h(x)$ на X для кожного n;*
- *(v) для кожної напівнеперервної зверху функції $g\colon X \to \mathbb{R}$ існує така послідовність неперервних функцій $g_n\colon X \to \mathbb{R}$, що $g_n(x) \to g(x)$ на X і $g_n(x) \ge g(x)$ на X для кожного n.*

Скористаємося методом, застосованим в [9] для побудови нарізно неперервної функції $f\colon X^2 \to \mathbb{R}$ з даною діагоналлю, що належить до першого класу Бера.

Теорема 3. *Нехай $h\colon X \to \mathbb{R}$ — напівнеперервна знизу функція, що задана на досконало нормальному просторі X з нормальним квадратом X^2, в якому діагональ $\Delta = \{(x, x)\colon x \in X\}$ є G_δ-множиною, і $h_0\colon X \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, для якої $h_0(x) \le h(x)$ на X. Тоді існує така нарізно неперервна функція $f\colon X^2 \to \mathbb{R}$, що $h_0(x) \le f(x, y) \le h(x)$ на X^2 і $S_f(x) = h(x)$ на X.*

Доведення. За теоремою Тонґа, існує така послідовність неперервних функцій $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, що $f_n(x) \to h(x)$ на X і $f_n(x) \le h(x)$ на X для кожного n. Функції $h_n(x) = \max\{f_n(x), h_0(x)\}$ теж неперервні і для них $h_0(x) \le h_n(x) \le h(x)$ на X, при цьому, як і раніше, $h_n(x) \to h(x)$ на X.

Використовуючи побудову з доведення теореми 1 з [9], ми можемо визначити таку локально скінченну послідовність неперервних функцій $\varphi_n\colon X^2 \to [0,1]$, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(p) = 1$$

на $X^2 \setminus \Delta$ і $\varphi_k(p) = 0$ на Δ для довільного k, для якої функція

$$f(x,y) = h(x)\chi_\Delta(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x,y) h_n(x)$$

нарізно неперервна і $f(x,x) = h(x)$ на X (тут χ_A — характеристична функція множини A). Оскільки $h_0(x) \le h_n(x) \le h(x)$ на X, $\varphi_n(x,y) \ge 0$ на X^2 для кожного n і $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(p) = 1$ при $x \ne y$, то при $x \ne y$

$$h_0(x) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x,y)\Big) h_0(x) \le f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x,y) h_n(x) \le \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x,y)\Big) h(x) = h(x).$$

Але, $f(x,x) = h(x)$. Отже, $h_0(x) \le f(x,y) \le h(x)$ на X^2.

Нарешті, для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ маємо $f(x,y) \le h(x) = f(x,x)$, отже, $S_f(x) = \max\{f^x(y)\colon y \in Y\} = h(x)$. □

З цієї теореми нескладно вивести наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай $g\colon X \to \mathbb{R}$ — напівнеперервна зверху функція, що задана на досконало нормальному просторі X з нормальним квадратом X^2, в якому діагональ $\Delta = \{(x,x)\colon x \in X\}$ є G_δ-множиною, і $g_0\colon X \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, для якої $g_0(x) \ge g(x)$ на X. Тоді існує така нарізно неперервна функція $f\colon X^2 \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x,y) \le g_0(x)$ на X^2 і $I_f(x) = g(x)$ на X.*

5. Побудова нарізно неперервної функції з даною парою Гана, що з нею пов'язана. Розглянемо тепер задачу в) для випадку $X = [a,b]$ і $Y = [c,d]$, де $a < b$ і $c < d$. При цьому ми використаємо теорему Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова ([8, с. 105]).

Теорема B. *Для T_1-простору X наступні умови рівносильні:*

(i) *X — нормальний;*

(ii) *для кожної пари Гана (g,h) на X існує така неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X.*

Спочатку модифікуємо теореми 3 і 4 для прямокутника.

Теорема 5. *Нехай $X = [a,b]$, $Y = [c,d]$, $P = X \times Y$ — прямокутник, $D = \{(x, l(x))\colon x \in X\}$ — його діагональ, де $l\colon X \to Y$ — лінійна функція, у якої $l(a) = c$, $l(b) = d$, (g,h) — пара Гана на X і $f\colon X \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, для якої $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X. Тоді існують такі нарізно неперервні функції $f_1\colon P \to \mathbb{R}$ і $f_2\colon P \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f_1(x,y) \le f(x) \le f_2(x,y) \le h(x)$ на P, $I_{f_1}(x) = g(x) = f_1(x, l(x))$ і $S_{f_2}(x) = h(x) = f_2(x, l(x))$ на X.*

Доведення. Розглянемо лінійні заміни

$$x = \varphi(t) = a + (b-a)t \quad \text{і} \quad y = \psi(s) = c + (d-c)s,$$

які гомеоморфно відображають відрізок $[0,1]$ на відрізки X і Y відповідно і гомеоморфізм $\gamma\colon [0,1]^2 \to P$, $\gamma(t,s) = (\varphi(t), \psi(s))$, для якого $\gamma(\Delta) = D$, де Δ — діагональ квадрата $[0,1]^2$. Застосувавши до функцій $\widetilde{h} = h \circ \varphi^{-1}$, $\widetilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ та $\widetilde{g} = g \circ \varphi^{-1}$ і $\widetilde{f}$ теореми 3 і 4 відповідно, отримаємо, що існують такі нарізно неперервні функції $\widetilde{f}_1\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ і $\widetilde{f}_2\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що $\widetilde{g}(t) \le \widetilde{f}_1(t,s) \le \widetilde{f}(t) \le \widetilde{f}_2(t,s) \le \widetilde{h}(t)$ на $[0,1]^2$ і $I_{\widetilde{f}_1}(t) = \widetilde{f}_1(t,t) = \widetilde{g}(t)$, а $S_{\widetilde{f}_2}(t) = \widetilde{f}_2(t,t) = \widetilde{h}(t)$ на [0,1]. Функції $f_i(x,y) = \widetilde{f}_i(\varphi^{-1}(x), \psi^{-1}(y))$ теж нарізно неперервні при $i \in \{1,2\}$ і для них

$$g(x) = \widetilde{g}(\varphi^{-1}(x)) \le f_1(x,y) \le f(\varphi^{-1}(x)) = f(x) \le f_2(x,y) \le \widetilde{h}(\varphi^{-1}(x)) = h(x)$$

на прямокутнику P. При цьому, якщо $x = \varphi(t) \in X$, то

$$I_{f_1}(x) = \min_{y \in Y} f_1(x,y) = \min_{0 \le s \le 1} f_1(\varphi(t), \psi(s)) = I_{\widetilde{f}_1}(t) = \widetilde{f}_1(t,t) = \widetilde{g}(t) = g(x)$$

і

$$S_{f_2}(x) = \max_{y \in Y} f_2(x,y) = \max_{0 \le s \le 1} f_2(\varphi(t), \psi(s)) = S_{\widetilde{f}_2}(t) = \widetilde{f}_2(t,t) = \widetilde{h}(t) = h(x)$$

Разом з тим, з співвідношення $x = \varphi(t) = a + (b-a)t$ знаходимо, що $t = \frac{x-a}{b-a}$, і тому, $y = \psi(t) = c + (d-c)t = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a) = l(x)$. Звідки,

$$\widetilde{f}_i(t,t) = f_i(\varphi(t), \psi(t)) = f_i(x, l(x)), \quad i \in \{1,2\}.$$

Отже, $I_{f_1}(x) = f_1(x, l(x)) = g(x)$ і $S_{f_2}(x = f_2(x, l(x))) = h(x)$ на X. □

Теорема 6. *Нехай $X = [a,b]$, $Y = [c,d]$, де $a < b$, $c < d$ і (g,h) — довільна пара Гана на відрізку X. Тоді існує така нарізно неперервна функція $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, що $(I_f, S_f) = (g,h)$.*

Доведення. За теоремою B існує така неперервна функція $f_0\colon X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f_0(x) \le h(x)$ на X. Візьмемо довільні точки y_i, де $i \in \{1,2\}$, такі, що $c < y_1 < y_2 < d$ і покладемо $Y_1 = [c, y_1]$, $Y_2 = [y_1, y_2]$, $Y_3 = [y_2, d]$, $P = X \times Y$ та $P_i = X \times Y_i$ при $i \in \{1,2\}$. За теоремою 5, застосованою до прямокутника P_1, існує така нарізно неперервна функція $f_1\colon P_1 \to \mathbb{R}$, що

$$g(x) = \min_{v \in Y_1} f_1(x,v) \le f_1(x,y) \le f_0(x) \quad \text{на} \quad P_1.$$

З цієї ж теореми, застосованої вже до прямокутника P_3, випливає, що існує нарізно неперервна $f_3\colon P_3 \to \mathbb{R}$ така, що

$$f_0(x) \le f_3(x,y) \le \max_{v \in Y_3} f_3(x,v) = h(x) \quad \text{на} \quad P_3.$$

Для кожної точки $(x,y) \in P_2$ покладемо

$$f_2(x,y) = f_1(x,y_1) + \frac{f_3(x,y_2) - f_1(x,y_1)}{y_2 - y_1}(y - y_1).$$

Функція $f_2\colon P_2 \to \mathbb{R}$, очевидно, неперервна і

$$f_2(x, y_1) = f_1(x, y_1), \quad \text{а} \quad f_2(x, y_2) = f_3(x, y_2) \ \text{ на } \ X.$$

Функція $f\colon P \to \mathbb{R}$, для якої $f|_{P_i} = f_i$ при $i \in \{1, 2, 3\}$ визначена коректно і є нарізно неперервною. Для кожного $x \in X$ за побудовою

$$g(x) \le f_1(x, y_1) \le f_0(x) \le f_3(x, y_2) \le h(x),$$

тому $f_1(x, y_1) \le f_2(x, y_2)$. В такому разі при $y \in Y_2$

$$f(x, y) = f_2(x, y) \ge f_1(x, y_1) \ge g(x)$$

і при $y \in Y_3$

$$f(x, y) = f_3(x, y) \ge f_0(x) \ge g(x),$$

звідки випливає, що $g(x) = \min\limits_{y \in Y} f(x, y) = I_f(x)$.

Так само при $y \in Y_1$

$$f(x, y) = f_1(x, y) \le f_0(x) \le h(x),$$

а при $y \in Y_2$

$$f(x, y) = f_2(x, y) \le f_3(x, y_2) \le h(x),$$

звідки випливає, що $h(x) = \max\{f(x, y)\colon y \in Y\} = S_f(x)$.

Отже, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — шукана функція. □

6. Нарізно неперервні функції з даним нульовим наближенням. За теоремою 1, для кожної нарізно неперервної функції $f\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ її нульове найкраще наближення α_f визначається на відрізку $X = [a, b]$ формулою

$$\alpha_f(x) = \frac{M(f^x) - m(f^x)}{2},$$

а тому, за теоремою 2, є невід'ємною і напівнеперервною знизу функцією. Справджується також і обернене твердження.

Теорема 7. *Для довільного прямокутника $P = X \times Y$, де $X = [a, b]$ і $Y = [c, d]$ і кожної невід'ємної напівнеперервної знизу функції $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ існує така нарізно неперервна функція $f\colon P \to \mathbb{R}$, що $\alpha_f = \varphi$.*

Доведення. Функції $h = 2\varphi$ і $g = 0$ утворюють пару Гана (g, h) на відрізку X. Тому за теоремою 6 існує така нарізно неперервна функція $f\colon P \to \mathbb{R}$, що $(I_f, S_f) = (g, h)$. В такому разі $m(f^x) = I_f(x) = 0$ і $M(f^x) = S_f(x) = h(x)$ на X. Тоді,

$$\alpha_f(x) = \frac{M(f^x) - m(f^x)}{2} = \varphi(x)$$

на X, тобто $\alpha_f = \varphi$. □

7. Прикінцеві зауваження. Розглянуті в теоремах 6 і 7 обернені задачі, розв'язані лише для прямокутника $[a, b] \times [c, d]$, а обернені задачі з теорем 3 і 4 для квадрата X^2 з певними властивостями. Природно розглянути їх у загальнішій ситуації для функції $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, але це вже справа майбутнього.

ЛІТЕРАТУРА

1. Bernstein S.N. *Sur problème inverse de la théorie de la meilleure approximation des fonctions continues*// Comp. Rend. – 1938. – P. 1520–1523.
2. Bernstein S.N. *On an inverse problem of approximation theory*// Collected works in 4 volumes. – M.:Publ. house of the Academy of Sciences of the USSR. 1954. – V.2. – P. 292–294. (in Russian)
3. Vasiliev A.I. *An inverse problem of the theory of the best approximation in F-spaces*// Reports of the Academy of Sciences. — 1999. – P. 583–585. (in Russian)
4. Voloshyn H.A., Maslyuchenko V.K. *The generalization of one Bernstein's theorem*// Mat. Visn. NTSh. – 2009. – V.6. – P. 62–72. (in Ukrainian)
5. Vlasyuk H., Maslyuchenko V.K. *Bernstein's polinomials and separately continuous functions*// Nauk. Visn. Cherniv. Univ., Mat. – V.336–337. – 2007. – P. 52–59. (in Ukrainian)
6. Voloshyn H.A., Maslyuchenko V.K. *The functional generalization of one Bernstein's theorem*// Mat. Stud. – 2010. – V.33, №2. – P. 220–224. (in Ukrainian)
7. Engelking R. General Topology. – Moscow: Mir, 1986. — 752 p. (in Russian)
8. Hahn H. *Über halbstetige und unstetige Functionen*// Sitzungsberichte Acad. Wiss. Wien. Math.-naturwiss. Kl. Abt. IIa. – 1917. – V.126. – S. 91–110.
9. Maslyuchenko V.K., Mykhayuk V.V., Sobchuk O.V. *Construction of the separately continuous function of n variables with a given diagonal*// Mat. Stud. – 1999. – V.12, №1. – P. 101–107. (in Ukrainian)

Chernivtsi National University
galja.vlshin@gmail.com
v.maslyuchenko@gmail.com
windchange7@gmail.com

Надійшло 30.06.2017
Після переробки 23.08.2017