УДК 517.51

В. К. Маслюченко, О. Г. Фотiй

ПРО ФУНКЦIЇ, ЩО НЕПЕРЕРВНI НА ДИФЕРЕНЦIЙОВНИХ КРИВИХ

V. K. Maslyuchenko, O. G. Fotiy. *On functions that are continuous on differentiable curves*, Mat. Stud. **47** (2017), 202–206.

We prove that for a normed space X, a topological space Y, a point $x_0 \in X$, and a mapping $f\colon X \to Y$, the continuity of all compositions $f \circ \omega\colon [0,1] \to Y$ at zero on differentiable curves $\omega\colon [0,1] \to X$ with $\omega(0) = x_0$ yields the continuity of f at x_0.

1. Вступ. А. Розенталь ([1]) встановив, що функцiя $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка неперервна вздовж кожної опуклої диференцiйовної кривої, що проходить через через точку $p_0 = (x_0, y_0)$, сама буде неперервною в цiй точцi, разом з тим iснує розривна в точцi p_0 функцiя f, яка неперервна вздовж кожної двiчi диференцiйовної кривої, що проходить через точку p_0.

У працi [2] для довiльних топологiчних просторiв X i Y, точки $x_0 \in X$ i множини Ω_{x_0} кривих, тобто якоїсь множини вiдображень $\omega\colon [0,1] \to X$, для яких $\omega(0) = x_0$, було введене поняття Ω_{x_0}*-неперервностi* вiдображення $f\colon X \to Y$, яке означає, що для кожного $\omega \in \Omega_{x_0}$ композицiя $f \circ \omega$ є неперервною у точцi 0. Там було з'ясовано, що для довiльного топологiчного векторного простору X, множини C_{x_0} неперервних кривих $\omega\colon [0,1] \to X$, для яких $\omega(0) = x_0$, i кожного топологiчного простору Y вiдображення $f\colon X \to Y$ буде C_{x_0}-неперервним тодi i тiльки тодi, коли f є секвенцiально неперервним у точцi x_0. Якщо простiр X задовольняє першу аксiому злiченностi (чи, загальнiше, є простором Фреше-Урисона), то C_{x_0}-неперервнiсть рiвносильна звичайнiй неперервностi в точцi x_0.

Природно постало питання: що буде, коли множину C_{x_0} замiнити на множину D_{x_0} всiх диференцiйовних кривих $\omega\colon [0,1] \to X$, для яких $\omega(0) = x_0$? Тут ми з'ясовуємо, що для нормованого простору X вiдображення $f\colon X \to Y$ буде D_{x_0}-неперервним тодi i лише тодi, коли воно неперервне у точцi x_0.

2. Диференцiйовнi кривi. Нехай X — топологiчний векторний простiр ([3, с. 11]), $I = [\alpha, \beta]$ — невироджений вiдрiзок числової прямої $\mathbb{R}$ i $t_0 \in I$. *Похiдною* функцiї $\omega\colon I \to X$ у точцi t_0 називається вектор

$$\omega'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\omega(t) - \omega(t_0)}{t - t_0}$$

з простору X. Функцiя ω називається *диференцiйовною в точцi* t_0, якщо iснує її похiдна $\omega'(t_0)$ i просто *диференцiйовною*, якщо вона є такою у кожнiй точцi t з I. Ясно, що з диференцiйовностi функцiї ω у точцi t_0 випливає її неперервнiсть у цiй точцi.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46B99, 46T20, 58C07.
Keywords: normed space; continuity; differentiable curve.
doi:10.15330/ms.47.2.202-206

Многочленом на відрізку I з коефіцієнтами з X ми називаємо функцію $\omega\colon I \to X$, яка задається формулою

$$\omega(t) = a_0 + ta_1 + \ldots + t^n a_n = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n,$$

де $a_0, \ldots, a_n$ — деякі вектори з X. Легко перевірити, що многочлен $\omega(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ — це диференційовна функція і $\omega'(t) = \sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1}$. Якщо $a_n \neq 0$, то n — це степінь многочлена $\omega(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$.

Для наших побудов нам буде потрібно кілька допоміжних інтерполяційних тверджень.

Лема 1. *Нехай X — топологічний векторний простір, a, b, c, d — довільні вектори з X, $e = \frac{b-a}{\beta-\alpha}$, $I = [\alpha, \beta]$ — невироджений відрізок числової прямої. Тоді формулою*

$$\omega(t) = \frac{(\beta - t)a + (t-\alpha)b}{\beta-\alpha} + \frac{(t-\alpha)^2(t-\beta)(d-e) + (t-\alpha)(t-\beta)^2(c-e)}{(\beta-\alpha)^2}$$

задається многочлен $\omega\colon I \to X$ степеня ≤ 3, для якого $\omega(\alpha) = a, \omega(\beta) = b, \omega'(\alpha) = c$ і $\omega'(\beta) = d$.

Доведення. Побудуємо лінійну функцію $\omega_0\colon I \to X$, для якої $\omega(\alpha) = a, \omega(\beta) = b$. Така функція визначається однозначно формулою

$$\omega_0(t) = \frac{(\beta - t)a + (t-\alpha)b}{\beta-\alpha}.$$

Для неї $\omega_0'(t) = \frac{-a+b}{\beta-\alpha} = \frac{b-a}{\beta-\alpha} = e$, зокрема, $\omega_0'(\alpha) = e = \omega_0'(\beta)$.

Розглянемо функцію $\varphi(t) = A(t-\alpha)^2(t-\beta) + B(t-\alpha)(t-\beta)^2$, де A і B — вектори з X. Підберемо їх так, щоб

$$\varphi'(\alpha) = c - e \ \text{ і } \ \varphi'(\beta) = d - e.$$

Маємо $\varphi'(t) = 2A(t-\alpha)(t-\beta) + A(t-\alpha)^2 + B(t-\beta)^2 + 2B(t-\alpha)(t-\beta)$. Тому $\varphi'(\alpha) = B(\alpha-\beta)^2$ і $\varphi'(\beta) = A(\beta-\alpha)^2$. З рівнянь

$$A(\beta-\alpha)^2 = d - e \ \text{ і } \ B(\alpha-\beta)^2 = c - e$$

знаходимо, що $A = \frac{d-e}{(\beta-\alpha)^2}$ і $B = \frac{c-e}{(\beta-\alpha)^2}$.

Для многочлена $\omega(t) = \omega_0(t) + \varphi(t)$ зі знайденими A і B (а він і є многочлен з формулювання леми) будемо мати, що

$$\omega(\alpha) = \omega_0(\alpha) + \varphi(\alpha) = a + 0 = a, \ \ \omega(\beta) = \omega_0(\beta) + \varphi(\beta) = b + 0 = b,$$

$$\omega'(\alpha) = \omega_0'(\alpha) + \varphi'(\alpha) = e + c - e = c, \ \ \omega'(\beta) = \omega_0'(\beta) + \varphi'(\beta) = e + d - e = d,$$

тим самим лема доведена. □

Зауважимо, доведення можна було б здійснити і прямою перевіркою, але ми хотіли пояснити і те, звідки береться такий вигляд у многочлена $\omega(t)$.

При $c = d = 0$ многочлен $\omega(t)$ з леми 1 набуває такого вигляду:

$$\omega(t) = \frac{(\beta-t)a+(t-\alpha)b}{\beta-\alpha} - \frac{(t-\alpha)^2(t-\beta)+(t-\alpha)(t-\beta)^2}{(\beta-\alpha)^3}(b-a) =$$

$$= \frac{(\beta-t)a+(t-\alpha)b}{\beta-\alpha} + \frac{(t-\alpha)(\beta-t)(2t-\alpha-\beta)}{(\beta-\alpha)^3}(b-a). \qquad (\star)$$

Для нормованого простору можна зробити оцінку норми многочлена $\omega(t)$.

Лема 2. *Нехай $(X, \|\cdot\|)$ — нормований простір, $I = [\alpha, \beta]$ і $a, b \in X$. Тоді формулою $(\star)$ задається многочлен $\omega\colon I \to X$ степеня ≤ 3, для якого $\omega(\alpha) = a, \omega(\beta) = b, \omega'(\alpha) = \omega'(\beta) = 0$ і $\|\omega(t)\| \le 3(\|a\| + \|b\|)$ на I.*

Доведення. Доведення випливає з оцінки

$$\|\omega(t)\| \le \frac{(\beta-\alpha)\|a\| + (\beta-\alpha)\|b\|}{\beta-\alpha} + \frac{2(\beta-\alpha)^3}{(\beta-\alpha)^3}\|b-a\| \le$$

$$\le \|a\| + \|b\| + 2(\|a\| + \|b\|) = 3(\|a\| + \|b\|).$$

□

3. Зв'язок між D_{x_0}-диференційовністю і неперервністю. Для топологічного векторного простору X і точки $x_0 \in X$ позначимо через D_{x_0} множину всіх диференційовних кривих $\omega\colon [0,1] \to X$, для яких $\omega(0) = x_0$. Зрозуміло, що $D_{x_0} \subseteq C_{x_0}$.

Теорема 1. *Нехай X — нормований простір, $x_0 \in X$ і Y — топологічний простір. Тоді D_{x_0}-неперервність відображення $f\colon X \to Y$ рівносильна його неперервності в точці x_0.*

Доведення. З неперервності відображення f у точці x_0 негайно випливає його D_{x_0}-неперервність, адже $D_{x_0} \subseteq C_{x_0}$, а композиція $f \circ \omega$ неперервних у відповідних точках функцій залишається неперервною.

Доведемо, що і навпаки з D_{x_0}-неперервності відображення $f\colon X \to Y$ випливає неперервність f в точці x_0. Для спрощення письма спочатку розглянемо випадок $x_0 = 0$. Ми встановимо, що з розривності f у точці 0 випливає те, що f не буде D_0-неперервним.

Припустимо, що f розривне в точці 0. Тоді існує такий окіл V точки $y_0 = f(0)$ в Y, що для довільного околу нуля U в X маємо, що $f(U) \nsubseteq V$. Ми побудуємо криву $\omega \in D_{x_0}$, таку, що композиція $f \circ \omega$ буде розривною в точці 0 з відрізка $[0, 1]$.

Виберемо довільну строго спадну до нуля послідовність чисел t_n з проміжка $(0, 1]$, у якої $t_1 = 1$, наприклад, можна взяти $t_n = \frac{1}{n}$. Розглянемо кулі

$$B_n = \{x \in X\colon \|x\| \le t_{n+1}^2\}$$

у просторі X для кожного номера n. Всі вони є околами нуля у просторі X, причому система $\mathcal{B} = \{B_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ є базою околів нуля в X, адже $t_{n+1}^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Згідно з вибором околу V ми будемо мати, що $f(B_n) \nsubseteq V$, для кожного n, отже, для кожного n існує точка $x_n \in B_n$, така, що $f(x_n) \notin V$.

Згідно з лемою 2 для кожного відрізка $I_n = [t_{n+1}, t_n]$ можна побудувати таку диференційовну криву $\omega_n\colon I_n \to X$, що

$$\omega_n(t_{n+1}) = x_{n+1},\ \omega_n(t_n) = x_n,\ \omega_n'(t_{n+1}) = \omega_n'(t_n) = 0 \text{ і } \|\omega_n(t)\| \le 3(\|x_n\| + \|x_{n+1}\|) \text{ на } I_n.$$

Визначимо тепер криву $\omega\colon [0,1] \to X$, покладаючи $\omega(0) = 0$ і $\omega(t) = \omega_n(t)$, якщо $t \in I_n$ для деякого n. Оскільки $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (0,1]$ і $\omega_{n+1}(t_{n+1}) = x_{n+1} = \omega_n(t_{n+1})$ для кожного n, то означення функції ω коректне.

Доведемо, що $\omega \in D_0$. Зрозуміло, що функція ω буде диференційовною на кожному інтервалі (t_{n+1}, t_n), адже звуження $\omega|_{(t_{n+1},t_n)} = \omega_n|_{(t_{n+1},t_n)}$. При цьому $\omega'_{n+1}(t_{n+1}) = 0 = \omega'_n(t_{n+1})$, для кожного $n \in \mathbb{N}$, тому ω диференційовна і в точках t_n для довільного n. Таким чином, ω диференційовна у кожній точці проміжка $(0,1]$.

Залишилось довести, що функція ω диференційовна і в точці 0. Для точок t з відрізка I_n згідно з лемою 2 справджується оцінка:

$$\Big\|\frac{\omega(t)}{t}\Big\| = \frac{\|\omega(t)\|}{t} \le \frac{3(\|x_n\| + \|x_{n+1}\|)}{t_{n+1}} \le \frac{3(t_{n+1}^2 + t_{n+2}^2)}{t_{n+1}} \le \frac{6t_{n+1}^2}{t_{n+1}} = 6t_{n+1}.$$

Оскільки $t_{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, то звідси негайно випливає, що $\|\frac{\omega(t)}{t}\| \to 0$ при $t \to 0$, а це означає, що $\omega'(0) = 0$, адже $\omega(0) = 0$. Таким чином, $\omega \in D_0$.

Нехай $g = f \circ \omega$. Тоді $g(t_n) = f(\omega(t_n)) = f(x_n) \notin V$ для кожного n за вибором точок x_n. При цьому $t_n \to 0$, а $g(t_n) \nrightarrow g(0) = f(\omega(0)) = f(0) = y_0$. Це показує, що композиція g розривна в точці 0, а значить, відображення f не є D_0-неперервним.

Нехай тепер x_0 — довільна точка з простору X. Розглянемо відображення зсуву $\varphi(x) = x + x_0$ і обернене до нього відображення $\psi(x) = x - x_0$. Припустимо, що f — це D_{x_0}-неперервне відображення і доведемо, що воно неперервне в точці x_0. Розглянемо відображення $g(x) = f(x + x_0) = f(\varphi(x))$ і покажемо, що g є D_0-неперервним. Візьмемо довільну криву $\omega_0 \in D_0$ і покладемо $\omega(t) = \omega_0(t) + x_0 = \varphi(\omega_0(t))$. Ясно, що $\omega \in D_{x_0}$, адже $\omega(0) = \omega_0(0) + x_0 = 0 + x_0 = x_0$ і крива ω диференційовна разом з кривою ω_0. З D_{x_0}-диференційовності функції f випливає, що композиція $f \circ \omega$ неперервна в точці 0. Але

$$(f \circ \omega)(t) = f(\omega(t)) = f(\omega_0(t) + x_0) = f(\varphi(\omega_0(t))) = g(\omega_0(t)) = (g \circ \omega_0)(t),$$

тому і композиція $g \circ \omega_0$ буде неперервною в точці 0, а значить, відображення g є D_0-неперервним. За доведеним відображення g буде неперервним в точці 0. Але

$$f(x) = g(\psi(x)),$$

звідки випливає неперервність f у точці x_0, адже $\psi(x_0) = 0$, ψ неперервне в точці x_0, g неперервне в 0. □

4. Прикінцеві зауваження. Звичайно, постає природнє питання про те, чи можна в теоремі 1 замінити множину D_{x_0} на множину $D_{x_0}^n$ всіх n раз диференційовних кривих $\omega\colon [0,1] \to X$ з $\omega(0) = x_0$. Можливо тут стане в пригоді загальна інтерполяційна формула Ньютона-Ерміта [4, с.150], з узагальнення якої можна вивести і лему 1. Але для цього потрібні точні оцінки, чому будуть присвячені наступні дослідження авторів. Негативний приклад А. Розенталя для $n = 2$ не прояснює картини, бо у нього розглядаються лише криві, які у деякому околі точки $p_0 = (x_0, y_0)$ задаються рівнянням $v = g(u)$ у певній прямокутній системі координат, а ми розлядаємо довільні параметризовані криві $x = x(t)$ і $y = y(t)$, що утворюють ширший клас. Тому дослідження поставленого питання потребує подальших додаткових зусиль навіть і у випадку $X = \mathbb{R}^2$.

ЛІТЕРАТУРА

1. A. Rosenthal, *On the continuity of functions of several variables*, Math. Zeitschr., **63** (1955), 31–38.
2. V. Maslyuchenko, O. Fotiy *On sequentially continuous functions*, Bukovinian Math. Journal, **5** (2017) 1-2, 105–111. (in Ukrainian)
3. Maslyuchenko V.K., Initial types of topological vector spaces, Chernivtsi: Ruta, 2002, 72 p. (in Ukrainian)
4. H. Grauert, I. Lieb, V. Fischer, Differential and integral calculus, Moscow: Mir, 1971, 680 p. (in Russian)

v.maslyuchenko@gmail.com
o.fotij@chnu.edu.ua
Chernivtsi National University

Надійшло 29.03.2017