УДК 517.9

Г. П. Лопушанська, А. О. Лопушанський, О. М. М'яус

КЛАСИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ДРОБОВОЇ ДИФУЗІЇ ПРИ ІНТЕГРАЛЬНІЙ ЗА ЧАСОМ УМОВІ ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯ

H. P. Lopushanska, A. O. Lopushansky, O. M. Myaus. *Classical solution of the inverse problem for fractional diffusion equation under time-integrated over-determination condition*, Mat. Stud. **44** (2015), 215–220.

We prove the correctness of the inverse problem on determination of a pare of functions: a classical solution u of the first boundary value problem for linear diffusion equation $D_t^\alpha u - u_{xx} = F_0(x),\ (x,t) \in (0,l) \times (0,T]$ with regularized fractional derivative of order $\alpha \in (0,1)$ with respect to time and function $F_0(x)$ under integral by time over-determination condition.

Г. П. Лопушанская, А. О. Лопушанский, О. М. Мяус. *Классическое решение обратной задачи для уравнения дробной диффузии при интегральном по времени условии переопределения* // Мат. Студії. – 2015. – Т.44, №2. – С.215–220.

Доказана корректность обратной задачи об определении пары функций: классического решения u первой краевой задачи для линейного уравнения диффузии $D_t^\alpha u - u_{xx} = F_0(x),\ (x,t) \in (0,l) \times (0,T]$ с регуляризованной дробной производной порядка $\alpha \in (0,1)$ по времени и функции $F_0(x)$ при интегральном по времени условии переопределения.

Вступ. Різні обернені задачі для рівнянь з регуляризованою дробовою похідною $D_t^\alpha u$ функції u (див. [1]–[3]) вивчались у [2], [4]–[10] та інших працях. Огляд деяких результатів по обернених задачах для таких рівнянь зроблено у [8], а порівняння з результатами для звичайного рівняння дифузії — у [6]. Деякі обернені задачі для рівняння дробової дифузії є коректними на відміну від таких задач для звичайного рівняння дифузії (наприклад, задача зі зворотним часом). У деяких працях [4, 7] використовують інтегральну за просторовими змінними умову перевизначення.

У даній статті встановлюємо існування, єдиність та неперервну залежність від даних розв'язку оберненої крайової задачі на відновлення правої частини у рівнянні дробової дифузії при інтегральній за часом умові перевизначення.

Зауважимо, що прямі задачі з інтегральною за часовою змінною умовою для рівнянь із частинними похідними вивчались, зокрема, у [11]–[15], а обернені задачі на визначення залежної тільки від просторової змінної компоненти правої частини в одновимірному рівнянні дробової дифузії при інших крайових даних чи умові перевизначення — у [4, 5, 8, 10].

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35S15.
Keywords: fractional derivative; inverse problem; Mittag-Leffler function, diffusion equation.
doi:10.15330/ms.44.2.215-220

1. Позначення та формулювання задачі. Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cap \mathbb{N}$, $Q = (0,l) \times (0,T]$, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ — простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ — простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $f*g$ — згортка узагальнених функцій f і g,

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ при } \lambda > 0 \text{ і } f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ при } \lambda \le 0 \quad ([16, \text{с. } 143]),$$

де $\Gamma(\lambda)$ — гама-функція, $\theta(t)$– одинична функція Хевісайда та штрихом позначено похідну в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Правильні співвідношення ([16, с. 143]) $f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}$.

Похідною Рімана-Ліувіля функції $v(t)$ називається функція $v^{(\alpha)}(t) = f_{-\alpha}(t) * v(t)$, $\alpha > 0$, зокрема, $v^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} v(\tau) d\tau$ при $\alpha \in (n-1,n)$.

Регуляризована дробова похідна (похідна Капуто-Джрбашяна [1, 2, 3]) визначається як $D^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} v(\tau) d\tau$ при $\alpha \in (n-1,n)$, а тоді $D_t^\alpha v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau - \frac{v(x,0)}{t^\alpha} \right]$ при $\alpha \in (0,1)$, $(x,t) \in Q$.

Звідси одержуємо зв'язок між регуляризованою похідною та похідною Рімана-Ліувіля дробового порядку $\alpha \in (0,1)$

$$D_t^\alpha v(x,t) = v_t^{(\alpha)}(x,t) - f_{1-\alpha}(t) v(x,0). \tag{1}$$

Використовуємо функцію Міттаг-Леффлера ([17, с. 117]) $E_{\alpha,\mu}(x) = \sum_{p=0}^\infty \frac{x^p}{\Gamma(p\alpha+\mu)}$. Функція $E_{\alpha,\mu}(-x)$ $(x > 0)$ нескінченно диференційовна при $\alpha \in (0,1)$, $\mu \in \mathbb{R}$ та має оцінку

$$E_{\alpha,\mu}(-x) \le \frac{r_{\alpha,\mu}}{1+x}, \quad x > 0, \quad \text{де } r_{\alpha,\mu} \text{ — додатна стала.}$$

Нехай $C(Q)$, $C(\bar{Q})$, $C[0,T]$ — класи неперервних відповідно в Q, $\bar{Q}$ та на $[0,T]$ функцій, $C_{2,\alpha}(Q) = \{v \in C(Q)\colon\ v_{xx}, D_t^\alpha v \in C(Q)\}$, $C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0) = C_{2,\alpha}(Q) \cap C(\bar{Q}_0)$, $\tilde{C}^{2s+j}(0,l)$ — клас функцій $F \in C^{2s+j-1}[0,l]$, що мають обмежену на $(0,l)$ похідну порядку $2s+j$ і таких, що $F(0) = F(l) = F''(0) = F''(l) = \dots = F^{(2s)}(0) = F^{(2s)}(l) = 0$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1,2\}$.

Позначаємо

$$\|v\|_{C(Q)} = \sup_{(x,t)\in Q} |v(x,t)|, \ \|v\|_{C^r(0,l)} = \|v\|_{\tilde{C}^r(0,l)} = \max_{m=\overline{0,r}} \sup_{x\in(0,l)} |v^{(m)}(x)|,$$

$$\|v\|_{\tilde{C}^r(Q)} = \max_{m=\overline{0,r}} \max_{t\in[0,T]} \sup_{(x,t)\in Q} \left|\frac{\partial^m v(x,t)}{\partial x^m}\right|, \ r \in \mathbb{Z}_+.$$

Вивчаємо обернену крайову задачу

$$D_t^\alpha u - u_{xx} = F_0(x), \quad (x,t) \in Q, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad x \in [0,l], \tag{4}$$

$$\int_0^T u(x,t)dt = F_2(x), \quad x \in [0,l], \tag{5}$$

де $\alpha \in (0,1)$, F_j, $j \in \{1,2\}$ — задані функції.

Означення. *Розв'язком задачі* (2)–(5) називається пара функцій

$$(u, F_0) \in \mathcal{M} := C_{2,\alpha}(\bar{Q}) \times \tilde{C}^1(0,l),$$

що задовольняє рівняння (2) в Q та умови (3)–(5).

Для існування такого розв'язку задачі необхідно, щоб $F_2(0) = F_2(l) = 0$.

1. Розв'язність задачі. Шукаємо розв'язок прямої задачі (2)–(4) у вигляді ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad (x,t) \in Q \tag{6}$$

за власними функціями $X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}$, що відповідають власним значенням $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ $(k \in \mathbb{N})$ задачі Штурма-Ліувілля

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0,l), \quad X(0) = X(l) = 0. \tag{7}$$

Далі через F_{jk} позначаємо коефіцієнти розвинення функції $F_j(x)$ за власними функціями задачі (7)

$$F_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{jk} \sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad j \in \{0,1,2\}. \tag{8}$$

Теорема. *Нехай* $\alpha \in (0,1)$, $F_1 \in \tilde{C}^4(0,l)$, $F_2 \in \tilde{C}^6(0,l)$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $(u, F_0) \in \mathcal{M}$ *оберненої задачі (2)–(5). Функція* u *визначається формулою (6), де*

$$T_k(t) = F_{0k} \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) d\tau + F_{1k} E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha), \quad t \in (0,T],\ k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

функція F_0 — *формулою (8) при* $j = 0$, *де*

$$F_{0k} = \frac{\lambda_k [F_{2k} - T F_{1k} E_{\alpha,2}(-\lambda_k T^\alpha)]}{T[1 - E_{\alpha,2}(-\lambda_k T^\alpha)]}, \ \ k \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Розв'язок задачі неперервно залежить від даних F_1, F_2 *та справджуються оцінки*

$$\|u\|_{C(Q)} + \|F_0\|_{C(0,l)} \le a_1 \|F_1\|_{C^3(0,l)} + a_2 \|F_2\|_{C^5(0,l)}, \tag{11}$$

$$\|u_{xx}\|_{C(Q)} + \|D_t^\alpha u\|_{C(Q)} + \|F_0\|_{C^1(0,l)} \le \hat{a}_1 \|F_1\|_{C^4(0,l)} + \hat{a}_2 \|F_2\|_{C^6(0,l)}, \tag{12}$$

де $a_j, \hat{a}_j$, $j \in \{1,2\}$ — *додатні сталі, що від даних задачі не залежать.*

Доведення. При $F_1 \in \tilde{C}^1(0,l)$ та відомій $F_0 \in \tilde{C}^1(0,l)$ існує єдиний розв'язок $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q})$ прямої задачі (2)–(4). Він має вигляд (6), де $T_k(t)$ визначаються формулами (9), і справджує оцінки

$$\|u\|_{C(Q)} \le b_0 \|F_0\|_{C(0,l)} + b_1 \|F_1\|_{C(0,l)}, \tag{13}$$

$$\|u_{xx}\|_{C(Q)} + \|D_t^\alpha u\|_{C(Q)} \le \hat{b}_0 \|F_0\|_{C^1(0,l)} + \hat{b}_1 \|F_1\|_{C^1(0,l)} \tag{14}$$

із додатними сталими $b_j, \hat{b}_j$, $j \in \{0,1\}$, що від F_j, $j \in \{0,1\}$ не залежать.

Справді, для знаходження невідомих функцій $T_k(t)$ одержуємо задачі Коші

$$D^\alpha T_k + \lambda_k T_k = F_{0k}, \quad t \in (0,T], \quad T_k(0) = F_{1k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

еквівалентні на підставі формул (1) рівнянням

$$T_k^{(\alpha)} + \lambda_k T_k = F_{0k} + f_{1-\alpha}(t) F_{1k}, \quad t \in (0,T], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Згідно з [17, с. 128], рівняння (16) мають розв'язки (9).

Функції $E_{\alpha,\mu}(-x) \geq 0$ для всіх $x \geq 0$, $\mu \geq \alpha$ та монотонно спадають ([18]), тому

$$\int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) d\tau = \frac{1 - E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha)}{\lambda_k} > 0, \ t > 0.$$

При $F_0 \in C[0,l]$ кожний із перших доданків у формулах (9) має оцінку

$$\left| F_{0k} \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) d\tau \right| = |F_{0k}| \frac{1 - E_{\alpha,1}(-\lambda_k \tau^\alpha)}{\lambda_k} \leq \frac{C_0}{\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При $F_1 \in C[0,l]$ матимемо $|F_{1k} E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha)| \leq \frac{C_1}{1+\lambda_k t^\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$. Тут і далі додатні сталі C_0, C_1, C_2 — одні й ті ж для всіх $k \in \mathbb{N}$. На підставі формул (9) та одержаних оцінок, ряд (6) рівномірно й абсолютно збігається на $\bar{Q}$ та справджує оцінку (13). Якщо ж $F_j \in \tilde{C}^1(0,l)$, то $|F_{jk}| = \left| \frac{2\int_0^l F_j'(x) \cos(\lambda_k^{1/2} x) dx}{l \lambda_k^{1/2}} \right| \leq \frac{C_2}{\lambda_k^{1/2}}$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in \{0,1\}$, і тоді продиференційований двічі за x ряд (6) збігається рівномірно та абсолютно на $\bar{Q}$, а на підставі рівняння (2) одержуємо існування неперервної похідної $D^\alpha u$ та оцінку (14).

Підставляємо розв'язок (6) прямої задачі (2)–(4) в умову перевизначення (5). Одержуємо

$$F_{0k} \int_0^T \Big(\int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) d\tau \Big) dt + F_{1k} \int_0^T E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha) dt = F_{2k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Обчислюємо

$$\int_0^T E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha) dt = \frac{1}{\alpha \lambda_k^{1/\alpha}} \int_0^{\lambda_k T^\alpha} E_{\alpha,1}(-z) z^{\frac{1}{\alpha}-1} dz = \frac{1}{\alpha \lambda_k^{1/\alpha}} \int_0^{\lambda_k T^\alpha} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{p+\frac{1}{\alpha}-1} dz}{\Gamma(p\alpha+1)} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k^{1/\alpha}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma(p\alpha+1)(p\alpha+1)} \Big|_{z=\lambda_k T^\alpha} = \frac{1}{\lambda_k^{1/\alpha}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\lambda_k T^\alpha)^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma(p\alpha+2)} = T E_{\alpha,2}(-\lambda_k T^\alpha),$$

і тоді

$$\int_0^T \Big(\int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) d\tau \Big) dt = \frac{T[1 - E_{\alpha,2}(-\lambda_k T^\alpha)]}{\lambda_k} > 0.$$

Тепер із формул (17) знаходимо вирази (10) для невідомих коефіцієнтів F_{0k}, $k \in \mathbb{N}$ розвинення функції $F_0(x)$ в ряд Фур'є.

Обґрунтуємо рівномірну збіжність такого розвинення та належність суми ряду до класу $\tilde{C}^1(0,l)$. Із зображення $E_{\alpha,\mu}(-\lambda_k t^\alpha)$ за допомогою H-функцій Фокса ([19]) та теореми 1.7 із [19] одержуємо асимптотику $E_{\alpha,\mu}(-\lambda_k t^\alpha) = O\big(\frac{1}{\lambda_k t^\alpha}\big)$ при $\lambda_k t^\alpha \to \infty$, $k \in \mathbb{N}$.

Враховуючи однаковий характер поведінки функцій $E_{\alpha,\mu}(-\lambda_k t^\alpha)$ ($\mu = 1, 2, \alpha$) при великих λ_k, одержуємо, що при $F_1 \in \tilde{C}^3(0,l)$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_{1k} \lambda_k E_{\alpha,2}(-\lambda_k t^\alpha)}{1 - E_{\alpha,2}(-\lambda_k T^\alpha)} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

рівномірно й абсолютно збігається в $\bar{Q}$, а при $F_1 \in \tilde{C}^4(0,l)$ допускає почленне диференціювання за x. При $F_2 \in \tilde{C}^5(0,l)$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k F_{2k}}{1 - E_{\alpha,2}(-\lambda_k T^\alpha)} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

рівномірно й абсолютно збігається на $\bar{Q}$, а при $F_2 \in \tilde{C}^6(0,l)$ допускає почленне диференціювання за x. Отож, за умов теореми рядом (8) при $j = 0$ визначена функція $F_0 \in \tilde{C}^1(0,l)$, а із формул (10) одержуємо оцінки

$$\|F_0\|_{C(0,l)} \leq c_1\|F_1\|_{C^3(0,l)} + c_2\|F_2\|_{C^5(0,l)}, \quad \|F_0\|_{C^1(0,l)} \leq \hat{c}_1\|F_1\|_{C^4(0,l)} + \hat{c}_2\|F_2\|_{C^6(0,l)},$$

де $c_j, \hat{c}_j$, $j \in \{1,2\}$ — додатні сталі, що від даних задачі не залежать. Звідси та з оцінок (13), (14) випливають потрібні оцінки (11), (12).

Єдиність та неперервна залежність розв'язку задачі від даних випливає з одержаних оцінок (11), (12). □

Висновки. Встановлено достатні умови класичної коректності задачі на відновлення залежної тільки від просторової змінної правої частини лінійного рівняння дифузії з регуляризованою дробовою похідною порядку $\alpha \in (0,1)$ за часом при інтегральній за часом умові перевизначення.

Результат є правильним також для звичайного рівняння дифузії $\frac{\partial u}{\partial t} - u_{xx} = F_0(x)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Caputo M. *Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent*// Il. Geofis. J. R. Astr. Soc. – 1967. – V.13. – P. 529–539.
2. Kochubei A.N. *Cauchy problem for the evolutionary equation fractional order*// Diff. Uravn. – 1989. – V.25, №8. – P. 1359–1368. (in Russian)
3. Povstenko Y. *Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engeneers.* – New-York, Birkhauser, 2015. – 460 p.
4. Aleroev T. S., Kirane M., Malik S. A. *Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determination condition*// Electronic J. of Differential Equations. – 2013.– V.270. – P. 1–16.
5. Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M. and Yamazaki T. *Uniqueness in an inverse problem for a one-dimentional fractional diffusion equation*// Inverse Problems. – 2009. – V. 25. – P. 1–16.
6. Jim B., Rundell W. *A turorial on inverse problems for anomalous diffusion processes* // Inverse Problems. – 2015. – V. 31.
7. Lopushanska H., Rapita V. *Inverse coefficient problem for semi-linear fractional telegraph equation*// Electronic J. of Differential Equations. – 2015. – V.153. – P. 1–13.
8. Nakagawa J., Sakamoto K., Yamamoto M. *Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equation – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration*// Journal of Math-for-Industry. – 2010. – V.2A. – P. 99–108.
9. Rundell W., Xu X., Zuo L. *The determination of an unknown boundary condition in fractional diffusion equation*// Applicable Analysis. – 2012. – V.1. – P. 1–16.
10. Zhang Y., Xu X. *Inverse source problem for a fractional diffusion equation*// Inverse Problems. – 2011. – V.27. – P. 1–12.
11. Kuz A.M. *The problem with integral conditions for factorized parabolic operator with variable coefficients*// Visnyk Nat. Univ. "Lviv Polytechnic". Phys.-Mat. Sci. – 2012. – №740. – P. 24–34. (in Ukrainian)
12. Ptashnyk B.Y., Ilkiv V.S., Kmit I.Ya., Polishchuk V.M. Nonlocal boundary value problems for equations with partial derivatives. – Kiev, Naukova dumka, 2002. – 416 p. (in Ukrainian)

13. Pulkina L.S. *Nonlocal problem for equation of heat-conducting*// Nonclassical problems of mathematical physics, IM SO A, Novosibirsk. – 2005. – P. 231–239. (in Russian)

14. Pukalsky I.D. *Parabolic Nonlocal boundary value problem and the optimal control problem for linear equations with degeneration*// Prykl. Problems. Mechanics and Mathematics. – 2012. – V.10. – P. 102–114. (in Ukrainian)

15. Isaryuk I.M., Pukalsky I.D. *Boundary value problems for parabolic equations with nonlocal conditions and degenerations*// Ukr. Mat. Visnyk. – 2014. – V.11, №4. – P. 480–496. (in Russian)

16. Vladimirov V.S. Generelized functions in mathematical physycs. – 4th Edition, Nauka, Moskow, 1981. – 512 p. (in Russian)

17. Dzhrbashyan M.M. Integral transforms and representations of functions in the complex domain. – Nauka, Moskow, 1966. – 671 p. (in Russian)

18. Pollard H. *The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function* $E_\alpha(-x)$// Bull. Amer. Math. Soc. – 1948. – V.68, №5. – P. 602–613.

19. Kilbas A.A., Sajgo M. H-Transforms: Theory and Applications. – Boca-Raton: Chapman and Hall/CRC. – 2004. – 401 p.

Ivan Franko National University of Lviv
University of Zheshiv
National University Lviv Polytechnic
lhp@ukr.net
alopushanskyj@gmail.com
myausolya@mail.ru

Надійшло 23.05.2015