УДК 517.5

Е. А. Севостьянов, Д. С. Доля

ОБ УСТРАНИМЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ОДНОГО КЛАССА ОТОБРАЖЕНИЙ

E. A. Sevost'yanov, D. S. Dolya. *On removable singularities of a class of mappings*, Mat. Stud. **44** (2015), 171–184.

A paper is devoted to study of local behavior of so-called Q-mappings including quasiconformal mappings and mappings with bounded distortion. It is showed that, such mappings have removable isolated singularities whenever the growth of the mappings is not more than some function of a radius of a ball.

Е. А. Севостьянов, Д. С. Доля. *Об устранимых особенностях одного класса отображений* // Мат. Студії. – 2015. – Т.44, №2. – С.171–184.

В настоящей работе исследованы вопросы, связанные с локальным поведением так называемых Q-отображений, включающих в себя классы квазиконформных отображений и отображений с ограниченным искажением. Показано, что, если отображение такого типа растёт в окрестности изолированной точки границы не быстрее некоторой функции радиуса шара, то эта точка является устранимой особой точкой отображения, либо полюсом.

1. Введение. Настоящая заметка посвящена поиску условий на отображение $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$, заданное в окрестности точки b пространственной области $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, при которых это отображение продолжается в точку b непрерывным образом. Известно, что даже аналитическая функция $\varphi\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{C}$, $D\subset\mathbb{C}$, заданная в области $D\setminus\{b\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, вообще говоря, не продолжается в точку b по непрерывности ($\varphi(z)=\exp\{1/z\},\ b=0$). Однако, как было показано в работе [1], такое продолжение имеет место для некоторого класса отображений даже более общих, чем аналитические функции, в том случае, если рост отображения в окрестности точки b не слишком велик (в случае отображений с ограниченным искажением см. также работу [2] по этому поводу, кроме того, в работе [3] также имеются некоторые продвижения указанных результатов, полученные первым автором).

В настоящей работе класс отображений, для которых имеется подобное непрерывное продолжение, будет ещё более расширен. Здесь мы покажем, что для утверждения такого рода достаточно обобщённого неравенства типа Полецкого, определяющего открытые дискретные кольцевые Q-отображения (см. [4]–[5], [6], [7]). При этом, на порядок роста самих отображений, к сожалению, необходимо потребовать несколько более жёсткие условия аналогичного же характера (здесь имеются в виду степенно-логарифмические ограничения, где «порядок степени» может быть заранее неизвестен).

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30C65, 31A15, 32U20.
Keywords: quasiconformal mappings; mappings with bounded and finite distortion; removable singularities; moduli of families of curves.
doi:10.15330/ms.44.2.171-184

Всё сказанное, что следует отдельно отметить, не является содержательным в случае гомеоморфизмов (см., напр., [8]). В этом случае, никаких ограничений на рост отображений не требуется, кроме, разумеется, аналитических условий на функцию Q, отвечающую за меру искажения модуля семейств кривых при отображении.

Теперь более подробно о содержательной части работы и её основных результатах. Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, m — мера Лебега $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{dist}(A,B)$ — евклидово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{dist}(A,B) = \inf\limits_{x\in A, y\in B} |x-y|$, (x,y) обозначает (стандартное) скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{diam}\, A$ — евклидов диаметр множества $A \subset \mathbb{R}^n$, $B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x-x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n := B(0,1)$, $S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x-x_0| = r\}$, $\mathbb{S}^{n-1} := S(0,1)$, ω_{n-1} означает площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, Ω_n — объём единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, запись $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f, заданное в области D, непрерывно. Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Кривой γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ (открытого интервала (a,b), либо полуоткрытого интервала вида $[a,b)$ или $(a,b]$) в $\mathbb{R}^n$, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ, а $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma | \gamma \in \Gamma\}$. Следующие определения могут быть найдены, напр., [9, разд. 1–6, гл. I]. Борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если криволинейный интеграл первого рода от функции ρ по каждой (локально спрямляемой) кривой $\gamma \in \Gamma$ удовлетворяет условию $\int_\gamma \rho(x)|dx| \geqslant 1$. В этом случае мы пишем: $\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma} \int_D \rho^n(x) \ \ dm(x).$$

Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$. Именно, модуль пустого семейства кривых равен нулю, $M(\varnothing) = 0$, модуль обладает свойством монотонности относительно семейств кривых Γ_1 и $\Gamma_2 : \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \Rightarrow M(\Gamma_1) \leqslant M(\Gamma_2)$, а также свойством полуаддитивности: $M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i)$, см. [9, теорема 6.2]. Далее символ $\Gamma(E,F,D)$ означает семейство всех кривых $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a,b)$.

Пусть $r_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $S_i = S(x_0, r_i)$, $i \in \{1,2\}$. Отображение $f\colon D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $\overline{\mathbb{R}^n} := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, называется *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0 \in D$, если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1, S_2, A\right)\right)\right) \ \leqslant \int_A Q(x) \cdot \eta^n(|x-x_0|)\, dm(x)$$

выполнено для любого кольца $A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon r_1 < |x-x_0| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1,r_2) \to [0,\infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \geqslant 1. \tag{1}$$

Всюду далее $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $S(x_0,r)$,

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S(x_0,r)} Q(x)dS,$$

где dS — элемент площади поверхности S.

Напомним, что изолированная точка x_0 границы ∂D области D называется *устранимой* для отображения f, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Если $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, точку x_0 будем называть *полюсом.* Изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенно особой точкой* отображения $f\colon D\to\mathbb{R}^n$, если при $x\to x_0$ нет ни конечного, ни бесконечного предела. Основной результат настоящей статьи заключает в себе следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $Q\colon D\to[1,\infty]$ *— измеримая по Лебегу функция,* $b\in D$ *и* $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$ *— открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке b. Зафиксируем* $\varepsilon_0>0$, *такое что* $\varepsilon_0<\mathrm{dist}(b,\partial D)$. *Предположим, что*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)}=\infty, \qquad (2)$$

$q_b(t)<\infty$ *при почти всех* $t\in(0,\varepsilon_0)$. *Тогда, если при* $0<p<\left(\frac{1}{4}\right)^{1/(n-1)}$ *и некоторой постоянной* $C>0$

$$|f(x)|\leqslant C\cdot\exp\left\{p\int\limits_{|x-b|}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)}\right\}\qquad\forall x\in B(b,\varepsilon_0)\setminus\{b\}, \qquad (3)$$

то отображение f имеет конечный предел в точке b.

Отметим, что для отображений с ограниченным искажением (когда функция $Q(x)$ ограничена) теорема 1 была получена в работе [2, теорема 4.2]. Вариант теоремы 1 для более узкого класса отображений с конечным искажением длины может быть найден в статье [3].

2. Основная лемма. Компактное множество $G\subset\mathbb{R}^n$ условимся называть *множеством нулевой ёмкости,* пишем $\operatorname{cap} G=0$, если существует ограниченное открытое множество $A\subset\mathbb{R}^n$, содержащее G, такое что $M(\Gamma(G,\partial A,A))=0$, см., напр., [10, разд. 2, гл. III и предложение 10.2, гл. II]. Будем говорить, что произвольное множество $G\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ имеет ёмкость нуль, если произвольное компактное подмножество $G_0\subset G\setminus\{\infty\}$ имеет нулевую ёмкость. Множества ёмкости нуль, как известно, всюду разрывны (любая компонента их связности вырождается в точку), т.е., условие $\operatorname{cap} G=0$ влечёт, что $\operatorname{Int} G=\varnothing$, см., напр., [10, следствие 2.5, гл. III]. Открытое множество $U\subset D$, $\overline{U}\subset D$, называется *нормальной окрестностью* точки $x\in D$ при отображении $f\colon D\to\mathbb{R}^n$, если $U\cap f^{-1}\left(f(x)\right)=\{x\}$ и $\partial f(U)=f(\partial U)$, см., напр., [10, разд. 4, гл. I]. Согласно [10, лемма 4.9, гл. I], имеет место следующее

Предложение 1. *Пусть* $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ *— открытое дискретное отображение. Тогда для каждого* $x\in D$ *существует* s_x, *такое, что при всех* $s\in(0,s_x)$ *компонента связности множества* $f^{-1}\left(B(f(x),s)\right)$, *содержащая точку* x, *и обозначаемая символом* $U(x,f,s)$, *является нормальной окрестностью точки x при отображении f, при этом* $f(U(x,f,s))=B(f(x),s)$ *и* $\operatorname{diam} U(x,f,s)\to 0$ *при* $s\to 0$.

Для отображения $f\colon D\to\mathbb{R}^n$, множества $E\subset D$ и $y\in\mathbb{R}^n$, определим *функцию кратности* $N(y,f,E)$, называемую также *индикатрисой Банаха,* как число прообразов точки y во множестве E, т.е. $N(y,f,E)=\operatorname{card}\{x\in E\colon f(x)=y\}$. Для доказательства основных результатов работы нам необходимо воспользоваться следующим утверждением, см. [11, лемма 5.1].

Предложение 2. *Пусть* $Q\colon \mathbb{B}^n \to [0,\infty]$ *— измеримая по Лебегу функция,* $f\colon \mathbb{B}^n\setminus\{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, *— открытое дискретное кольцевое* Q*-отображение в точке 0. Пусть, кроме того,* $\mathrm{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\right)\right) > 0$. *Предположим, что существует* $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *такое, что при* $\varepsilon \to 0$ $\int_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\,dm(x) = o\left(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\right)$, *где* $\psi(t)$ *— измеримая по Лебегу функция, такая что* $\psi(t)>0$ *п.в., и* $I(\varepsilon,\varepsilon_0)=\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt<\infty$ *для всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. *Тогда* f *имеет непрерывное продолжение* $f\colon \mathbb{B}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *в* $\mathbb{B}^n$.

Пусть Y — измеримое множество относительно меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^{n-1}$, лежащее на единичной сфере $\mathbb{S}^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n\colon |x|=1\}$, и $C=\{x\in\mathbb{R}^n\colon x/|x|\in Y\}$ — конус. Как обычно, $|\gamma|$ обозначает носитель кривой $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $|\gamma|=\{x\in\mathbb{R}^n\colon \exists t_0\in(a,b)\colon \gamma(t_0)=x\}$, а $\Gamma(E,F,D)$ обозначает семейство кривых, соединяющих множества E и F во множестве D. Следующее утверждение сформулировано в виде замечания в работе [2, замечание 7.7].

Предложение 3. *Пусть* D *— область в* $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, $x_0\in D$, $\Gamma^*(S_1,S_2,A)=\{\gamma_y = x_0+ty,\quad y\in\mathbb{S}^{n-1},\quad t\in[r_1,r_2]\}$ *— семейство всех радиальных отрезков, соединяющих сферы* $S_i=S(x_0,r_i)$, $i\in\{1,2\}$, $0<r_1<r_2<\mathrm{dist}(x_0,\partial D)$, *в кольце* $A=\{x\in\mathbb{R}^n\colon r_1<|x-x_0|<r_2\}$, *а* Γ *— подсемейство всех отрезков* $\gamma\in\Gamma^*(S_1,S_2,A)$ *таких, что* $|\gamma|\in C$. *Тогда*

$$M(\Gamma)=\frac{\mathcal{H}^{n-1}(Y)}{(\log\frac{r_2}{r_1})^{(n-1)}},$$

где множество Y *было определено выше.*

При исследовании открытых дискретных отображений с ветвлением (отображений, не являющихся гомеоморфизмами) ключевую роль так называемые поднятия кривых. Следующие определение может быть найдено в [10, гл. II, п. 3].

Пусть $f\colon D\to\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, — отображение, $\beta\colon[a,b)\to\mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и $x\in f^{-1}\left(\beta(a)\right)$. Кривая $\alpha\colon[a,c)\to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если (1) $\alpha(a)=x$; (2) $f\circ\alpha=\beta|_{[a,c)}$; (3) если $c<c'\leq b$, то не существует кривой $\alpha'\colon[a,c')\to D$, такой что $\alpha=\alpha'|_{[a,c)}$ и $f\circ\alpha=\beta|_{[a,c')}$.

Ключевую роль при доказательстве основных результатов работы играет следующая лемма, в которой интегральное условие вида (2) «спрятано» в некоторое более общее требование, сформулированное в терминах фиксированных функций φ и ψ.

Лемма 1. *Пусть* $Q\colon D\to(0,\infty]$ *— измеримая по Лебегу функция,* $b\in D$ *и* $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$ *— открытое дискретное кольцевое* Q*-отображение в точке* b.

Предположим, найдутся $0<\varepsilon_0<\mathrm{dist}(b,\partial D)$, $A>0$, *строго убывающая функция* $\varphi\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$, $\varphi(t)\to\infty$ *при* $t\to 0$, *а также измеримая по Лебегу функция* $\psi\colon(0,\varepsilon_0)\to(0,\infty)$ *такие что при* $\varepsilon\to 0$

$$\int_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x-b|)\,dm(x)\leqslant\frac{A\cdot I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)}{\left(\log\varphi(\varepsilon)\right)^{n-1}},\tag{4}$$

где

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0):=\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt<\infty\quad\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0).\tag{5}$$

Предположим также, найдутся $0<p<\left(\frac{\omega_{n-1}}{4A}\right)^{1/(n-1)}$ *и* $C>0$ *такие что*

$$|f(x)|\leqslant C\cdot\varphi^p(|x-b|)\quad\forall x\in B(0,\varepsilon_0)\setminus\{0\}.\tag{6}$$

Тогда f *имеет предел (конечный либо бесконечный) в точке* b.

Доказательство. Предположим противное, а именно, что точка b является существенно особой точкой отображения f. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b=0$ и $C=1$. Поскольку сфера $S(0,\varepsilon_0)$ является компактным множеством в $D\setminus\{0\}$, найдётся $R>0$, такое что

$$f\left(S(0,\varepsilon_0)\right)\subset B(0,R). \tag{7}$$

Поскольку $b=0$ является существенно особой точкой отображения f, в виду условия (4) и предложения 2 отображение f в $B(0,\varepsilon_0)\setminus\{0\}$ принимает все значения в $\mathbb{R}^n$, за исключением, может быть, некоторого множества ёмкости нуль, т.е., $N\left(y,f,B(0,\varepsilon_0)\setminus\{0\}\right)=\infty$ при всех $y\in\mathbb{R}^n\setminus E$, где $\operatorname{cap}E=0$. Так как E имеет ёмкость нуль, множество $\mathbb{R}^n\setminus E$ не может быть ограниченным. В таком случае, найдётся $y_0\in\mathbb{R}^n\setminus(E\cup B(0,R))$ а, значит, найдётся точка $x_1\in f^{-1}(y_0)\cap(B(0,\varepsilon_0)\setminus\{0\})$. По предложению 1, при некотором фиксированном $r>0$, такая точка имеет нормальную окрестность $U_1:=U(x_1,f,r)$, удовлетворяющую условию $f(U_1)=B(y_0,r)$.

Полагаем $d:=\operatorname{dist}\left(0,\overline{U_1}\right)$. Пусть $a\in(0,d)$ и $V:=B(0,\varepsilon_0)\setminus\overline{B(0,a)}$. В силу неравенства (6), строгого убывания функции φ, а также предположения о том, что $C=1$, имеем

$$f(V)\subset B\left(0,\varphi^p(a)\right). \tag{8}$$

Пусть $e\in\mathbb{S}^{n-1}$ — единичный вектор. Поскольку $z_0:=y_0+re\in\overline{B(y_0,r)}=f(\overline{U(x_1,f,r)})$, будем иметь: $z_0\in f(V)$. Следовательно, найдётся точка $\widetilde{x_1}\in\overline{U_1}$, такая что $f(\widetilde{x_1})=z_0$. Обозначим через H полусферу $H=\{e\in\mathbb{S}^{n-1}\colon(e,y_0)>0\}$, через Γ' — семейство всех кривых $\beta\colon[r,\varphi^p(a))\to\mathbb{R}^n$ вида $\beta(t)=y_0+te$, $e\in H$, а через Γ — семейство максимальных поднятий Γ' при отображении f относительно области V с началом в точке $\widetilde{x_1}$, которые существуют в силу [10, теорема 3.2, гл. II] (см. здесь же определение максимальных поднятий).

При любом фиксированном $e\in H$, покажем, что для каждой кривой $\beta=y_0+te$ и каждого максимального её поднятия $\alpha(t)\colon[r,c)\to V$ с началом в точке $\widetilde{x_1}$, $\alpha\in\Gamma$, существует последовательность $r_k\in[r,c)$, такая что $r_k\to c-0$ при $k\to\infty$ и $\operatorname{dist}(\alpha(r_k),\partial V)\to 0$ при $k\to\infty$. Предположим противное, тогда найдётся $e_0\in H$, такое, что кривая $\alpha(t)$, $t\in[r,c)$, являющаяся максимальным поднятием кривой $\beta=y_0+te_0$, лежит внутри V вместе со своим замыканием. Пусть $C(c,\alpha(t))$ обозначает предельное множество кривой α при $t\to c-0$,

$$C(c,\alpha(t))=\{x\in\mathbb{R}^n\colon x=\lim_{k\to\infty}\alpha(t_k),t_k\to c-0,k\to\infty\},$$

тогда для каждого $x\in C(c,\alpha(t))$ найдётся последовательность $t_k\to c-0$, такая, что $x=\lim\limits_{k\to\infty}\alpha(t_k)$. По непрерывности f, поскольку, по предположению, $C(c,\alpha(t))\subset V$, будем иметь $f(x)=f(\lim\limits_{k\to\infty}\alpha(t_k))=\lim\limits_{k\to\infty}\beta(t_k)=\beta(c)$, откуда следует, что отображение f постоянно на множестве $C(c,\alpha(t))$. Так как по условию f дискретно, а множество $C(c,\alpha(t))$, очевидно, является связным, будем иметь $C(c,\alpha(t))=p_1\in V$.

Полагаем $b_0:=\varphi^p(a)$. Пусть $c\neq b_0$. Тогда можно построить новое максимальное поднятие α' кривой β с началом в точке p_1. Объединяя поднятия α и α', получаем ещё одно поднятие α'' кривой β с началом в точке $\widetilde{x_{j_0}}$, что противоречит свойству максимальности исходного поднятия α. Значит, $c=b_0$.

В таком случае, $C(b_0,\alpha(t))$ континуум внутри V, при этом, $C(b_0,\alpha(t))=p_1'\in V$ и, значит, α продолжается до замкнутой кривой, определённой на отрезке $[r,\varphi^p(a)]$.

Обозначим эту кривую снова через α (обозначения не меняем). Тогда при всех $t \in [r, \varphi^p(a)]$ имеем $\beta(t) = f(\alpha(t)) \subset f(V)$, в частности, полагая $t := \varphi^p(a)$, рассмотрим элемент z_1, определяемый по правилу $z_1 := y_0 + \varphi^p(a)e_0$. Ввиду включения (8), имеем

$$z_1 = y_0 + \varphi^p(a)e_0 \in f(V) \subset B\left(0, \varphi^p(a)\right). \tag{9}$$

Однако, поскольку $e_0 \in H$,

$$|z_1| = |y_0 + \varphi^p(a)e_0| = \sqrt{|y_0|^2 + 2\left(y_0, \varphi^p(a)e_0\right) + \varphi^{2p}(a)} \geqslant \sqrt{|y_0|^2 + \varphi^{2p}(a)} \geqslant \varphi^p(a). \tag{10}$$

Заметим, что соотношение (10) противоречит (9), что, в свою очередь, опровергает предположение о включении замыкания кривой $\alpha(t)$ во множество V.

Следовательно, $\mathrm{dist}(\alpha(r_k), \partial V) \to 0$ при $k \to \infty$ и некоторой последовательности $r_k \in [r, c)$, такой что $r_k \to c - 0$ и $k \to \infty$, что и требовалось установить.

Заметим, что ситуация, когда $\mathrm{dist}(\alpha(r_k), S(0, \varepsilon_0)) \to 0$ при $k \to \infty$, исключена. Действительно, пусть эта ситуация имеет место. Тогда найдутся $p_2 \in S(0, \varepsilon_0)$ и подпоследовательность номеров k_l, $l \in \mathbb{N}$, такие, что $\alpha(r_{k_l}) \to p_2$ при $l \to \infty$. Отсюда, по непрерывности f, получаем, что $\beta(r_{k_l}) \to f(p_2)$ при $l \to \infty$, что невозможно ввиду соотношения (7), поскольку, при каждом фиксированном $e \in H$ и $t \in [r, \varphi^p(a))$, имеем $|\beta(t)| = |y_0 + te| = \sqrt{|y_0|^2 + 2t(y_0, e) + t^2} \geqslant |y_0| > R$ по выбору y_0.

Из сказанного выше следует, что найдётся последовательность $r_k \in [r, c)$, такая что $r_k \to c - 0$ при $k \to \infty$, и $\alpha(r_k) \to p_3 \in S(0, a)$. Кроме того, каждая такая кривая $\alpha \in \Gamma$ пересекает сферу $S(0, d)$, поскольку, согласно построению, α имеет начало вне шара $B(0, d)$. В силу сказанного, $\Gamma > \Gamma(S(0, a+\varepsilon), S(0, d), A(0, a+\varepsilon, d))$ при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$. Заметим, что $\Gamma' > f(\Gamma)$, поэтому по определению кольцевого Q-отображения в нуле

$$M(\Gamma') \leqslant M(f(\Gamma)) \leqslant M(\Gamma(S(0, a+\varepsilon), S(0, d), A(0, a+\varepsilon, d))) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{A(0, a+\varepsilon, d)} Q(x) \cdot \eta^n(x) dm(x) \tag{11}$$

для каждой измеримой по Лебегу функции η, удовлетворяющей соотношению (1) при $r_1 := a + \varepsilon$ и $r_2 := d_0$.

Рассмотрим функцию

$$\eta_{a+\varepsilon}(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(a+\varepsilon, d), & t \in (a+\varepsilon, d);\\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (a+\varepsilon, d), \end{cases}$$

где величина $I(a+\varepsilon, d)$ определена также, как в (5), а ψ — функция из условия леммы.

Заметим, что функция $\eta_{a+\varepsilon}(t)$ является измеримой по Лебегу, кроме того, $\int_{a+\varepsilon}^{d} \eta_{a+\varepsilon}(t)dt = 1$. В таком случае, из соотношения (11) получаем

$$M(\Gamma') \leqslant \frac{1}{I^n(a+\varepsilon, d)} \int\limits_{a+\varepsilon<|x|<d} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) dm(x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{I^n(a+\varepsilon, \varepsilon_0)}{I^n(a+\varepsilon, d) \cdot I^n(a, \varepsilon_0)} \int\limits_{a+\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) dm(x) \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{I(d, \varepsilon_0)}{I(a+\varepsilon, d)}\right)^n \frac{1}{\cdot I^n(a+\varepsilon, \varepsilon_0)} \int\limits_{a+\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) dm(x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{I^n(a+\varepsilon, \varepsilon_0)} \int\limits_{a+\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) dm(x) \tag{12}$$

при всех $a+\varepsilon\in(0,d_1)$ и некотором d_1, $d_1\leqslant d$, поскольку, в силу соотношения (4), $I^n(a+\varepsilon,d)\to\infty$ при $a+\varepsilon\to 0$. Соотношение (4) означает, что

$$\int\limits_{\sigma<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\;dm(x)\leqslant\frac{A\cdot I^n(\sigma,\varepsilon_0)}{(\log\varphi(\sigma))^{n-1}}$$

при достаточно малых $\sigma>0$. Переобозначая $\sigma:=\varepsilon+a$ и деля обе части последнего неравенства на $I^n(\sigma,\varepsilon_0)$, мы получим, что

$$\frac{1}{I^n(a+\varepsilon,\varepsilon_0)}\cdot\int\limits_{a+\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\;dm(x)\leqslant\frac{A}{(\log\varphi(\varepsilon+a))^{n-1}}. \tag{13}$$

Тогда из (12) и (13) мы получим, что при $a+\varepsilon\in(0,d_1)$

$$M(\Gamma')\leqslant\frac{2A}{(\log\varphi(a+\varepsilon))^{n-1}}. \tag{14}$$

С другой стороны, по предложению 3,

$$M(\Gamma')=\frac{1}{2}\frac{\omega_{n-1}}{(\log\frac{\varphi^p(a+\varepsilon)}{r})^{n-1}}. \tag{15}$$

Тогда из неравенства (14) и равенства (15) получаем:

$$\frac{1}{2}\frac{\omega_{n-1}}{\left(\log\frac{\varphi^p(a+\varepsilon)}{r}\right)^{n-1}}\leqslant\frac{2A}{(\log\varphi(a+\varepsilon))^{n-1}},$$

откуда

$$\left(\log\left(\frac{\varphi^p(a+\varepsilon)}{r}\right)^{\left(\frac{2}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\right)^{n-1}\geqslant\left(\log\left(\varphi(a+\varepsilon)\right)^{\left(\frac{1}{2A}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\right)^{n-1},\quad \log\left(\frac{\varphi^p(a+\varepsilon)}{r}\right)^{\left(\frac{2}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\geqslant$$

$$\geqslant\log\left(\varphi(a+\varepsilon)\right)^{\left(\frac{1}{2A}\right)^{\frac{1}{n-1}}},\quad \frac{1}{r^{\left(\frac{2}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}}\geqslant\left(\varphi(a+\varepsilon)\right)^{\left(\frac{1}{2A}\right)^{\frac{1}{n-1}}-p\left(\frac{2}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Поскольку по выбору $0<p<\left(\frac{\omega_{n-1}}{4A}\right)^{1/(n-1)}$, в правой части последнего соотношения величина $\varphi(a+\varepsilon)$ берётся в некоторой положительной степени. Переходя здесь к пределу при $a+\varepsilon\to 0$ и учитывая, что по условию леммы $\varphi(a)\to\infty$ при $a\to 0$, получаем, что $\frac{1}{r^{\left(\frac{2}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}}\geqslant\infty$, что невозможно. Полученное противоречие означает, что точка $b=0$ не может быть существенно особой для отображения f. □

В дальнейшем в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n}=\mathbb{R}^n\bigcup\{\infty\}$ используется *сферическая (хордальная) метрика* $h(x,y)=|\pi(x)-\pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1},\frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+{|x|}^2}},\quad h(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+{|x|}^2}\sqrt{1+{|y|}^2}},\quad x\ne\infty\ne y.$$

Хордальным диаметром множества $E\subseteq\overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина $h(E)=\sup\limits_{x,y\in E}h(x,y)$. Следующее утверждение доказано в [12, лемма 3.3].

Предложение 4. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, — открытое дискретное кольцевое Q-отображение, такое что $D' = f(D) \subset B(0,r)$ с $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(0,r)\right) \geqslant \delta > 0$. Предположим, что для $x_0 \in D$ и $0 < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x-x_0|)\, dm(x) \leqslant K \cdot I^p(\varepsilon, \varepsilon_0), \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{16}$$

где $p \leqslant n$ и $\psi(t)$ — некоторая измеримая (по Лебегу) неотрицательная на $(0,\infty)$ функция, такая что

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty, \qquad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Тогда

$$h(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x-x_0|, \varepsilon_0)\} \tag{17}$$

для всех $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$, где

$$\alpha_n = 2\lambda_n^2, \quad \beta_n = \left(\frac{\omega_{n-1}}{K}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \gamma_{n,p} = 1 - \frac{p-1}{n-1}, \tag{18}$$

$\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_n^{1/n} \to e$ при $n \to \infty$.

Для дальнейшего изложения понадобится также следующее утверждение, содержащее некоторый результат об искажении евклидова расстояния.

Лемма 2. *Предположим, $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $b \in D$, $f\colon D \to B(0,R)$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке b, при этом, существуют числа $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(b, \partial D)$, и $A > 0$, а также строго убывающая функция $\varphi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to 0$, и измеримая по Лебегу функция $\psi\colon (0,\varepsilon_0) \to (0,\infty)$ такие что при $\varepsilon \to 0$ имеют место соотношения (4)–(5).*

Пусть, кроме того, существует постоянная $M > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$, такие что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ выполнено условие

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) \leqslant M \cdot \log \varphi(\varepsilon), \tag{19}$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ определяется соотношением (5). Тогда при всех $x \in B(b, \varepsilon_1)$ имеет место оценка

$$|f(x) - f(b)| \leqslant \frac{\alpha_n(1+R^2)}{\delta} \exp\{-\widetilde{\beta_n} I\,(|x-b|, \varepsilon_0)\}, \tag{20}$$

где постоянные α_n и $\widetilde{\beta_n} = \left(\frac{\omega_{n-1}}{AM^{n-1}}\right)^{1/(n-1)}$ зависят только от n, а δ — от R.

Доказательство. Необходимое утверждение вытекает из предложения 4. Действительно, условия (4)–(5) гарантируют выполнение условия (17). В частности, левая часть в (17) есть o от $I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)$, поскольку имеет место неравенство (4), кроме того, в этом неравенстве следует учесть требование (19) и условие $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to 0$.

Итак, все условия предложения 4 выполнены и, значит, в силу этого предложения,

$$|f(x) - f(b)| \leqslant \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x-b|, \varepsilon_0)\} \tag{21}$$

при всех $x \in B(b, \varepsilon_1)$. Здесь также использовано, что на шаре $B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство: $|a-b| \leqslant (1+R^2) \cdot h(a,b) \forall a, b \in B(0,R)$. $\square$

Отдельный случай в лемме 1 представляет собой ситуация, когда $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\leqslant M\cdot\log\varphi(\varepsilon)$ при некоторой постоянной $M>0$ и $\varepsilon\to 0$. В этом случае, мы имеем следующее следствие.

Следствие 1. *Предположим, что в условиях леммы 1, помимо соотношений (4) и (5) имеет место условие (19), а вместо условия (6) имеет место более сильное предположение*
$$\lim_{x\to b}|f(x)|\cdot\exp\{-\beta_nI\left(|x-b|,\varepsilon_0\right)\}=0, \tag{22}$$
где $\beta_n=(\frac{\omega_{n-1}}{qAM^{n-1}})^{1/(n-1)}$, $q>4$ *и* $M\geqslant 1$. *Тогда точка* $x=b$ *является устранимой для отображения* f.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b=0$. Заметим, что $\beta_n=(\frac{\omega_{n-1}}{qAM^{n-1}})^{1/(n-1)}<(\frac{\omega_{n-1}}{4A})^{1/(n-1)}$, так что по лемме 1 точка b не может быть существенно особой для f. Предположим, что $b=0$ является для отображения f полюсом. Тогда рассмотрим композицию отображений $h=g\circ f$, где $g(x)=\frac{x}{|x|^2}$ — инверсия относительно единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$. Заметим, что h — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в нуле и $h(0)=0$. Кроме того, в некоторой окрестности нуля отображение h (по построению) является ограниченным. В таком случае, найдутся $\varepsilon_0>0$ и $R>0$, такие, что $|h(x)|\leqslant R$ при $|x|<\varepsilon_0$. Следовательно, возможно применение предложения 4. По неравенству (20),
$$|h(x)|=\frac{1}{|f(x)|}\leqslant\frac{\alpha_n(1+R^2)}{\delta}\exp\{-\beta_nI\left(|x|,\varepsilon_0\right)\}.$$
Отсюда следует, что $|f(x)|\cdot\exp\{-\beta_nI\left(|x|,\varepsilon_0\right)\}\geqslant\frac{\delta}{\alpha_n(1+R^2)}$. Однако, последнее соотношение противоречит (22). Полученное противоречие доказывает, что точка $b=0$ является устранимой для отображения f. $\square$

3. Основные следствия. Прежде всего, проведём *доказательство теоремы 1.* В лемме 1 полагаем
$$\psi(t)=1/(tq_b^{1/(n-1)}(t)),\ \varphi(t)=\exp\Big\{\int_t^{\varepsilon_0}\frac{dr}{rq_b^{1/(n-1)}(r)}\Big\}.$$
Отметим, что по условию теоремы, при почти всех $r\in(0,\varepsilon_0)$ имеем $q_b(r)<\infty$, откуда вытекает строгое убывание функции φ. Кроме того, по теореме Фубини имеем
$$\int_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0}Q(x)\cdot\psi^n(|x-b|)dm(x)=\int_\varepsilon^{\varepsilon_0}\int_{S(b,r)}Q(x)\cdot\psi^n(|x-b|)dSdr=$$
$$=\omega_{n-1}\cdot\int_\varepsilon^{\varepsilon_0}r^{n-1}\psi^n(r)q_b(r)dr=\omega_{n-1}\cdot I(\varepsilon,\varepsilon_0)=\omega_{n-1}\cdot\log\varphi(\varepsilon).$$
Отсюда, в частности, следует, что выполнено условие (19) при $M=1$, а также условие (4) при $A=\omega_{n-1}$. Более того, из условия (4) вытекает также, что при некотором $0<p'<\left(\frac{1}{4}\right)^{1/(n-1)}$
$$\lim_{x\to b}|f(x)|\cdot\exp\left\{-p'\int_{|x-b|}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)}\right\}=0.$$
Оставшаяся часть утверждения следует из леммы 1 и следствия 1. $\square$

Полагая в лемме 1 в качестве функции $\psi(t)=1/t$, а в качестве $\varphi(t)=t^{-q}$, $q>0$, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $Q\colon D\to(0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $b\in D$ и $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке b. Зафиксируем $\varepsilon_0>0$, такое что $\varepsilon_0<\operatorname{dist}(b,\partial D)$. Пусть, кроме того, существует число $\varepsilon_0\in(0,1)$ такое, что при $\varepsilon\to 0$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0}\frac{Q(x)}{|x-b|^n}dm(x)\leqslant C_1\cdot\log\frac{1}{\varepsilon},$$

где $C_1=C_1(b)$ — некоторая положительная постоянная. Тогда существует некоторое число $q>0$ и постоянная $C>0$ такие, что условие $|f(x)|\leqslant C|x-b|^{-q}$ $\forall x\in B(b,\varepsilon_0)\setminus\{b\}$ влечёт наличие предела (конечного либо бесконечного) отображения f в точке b. Кроме того, существует постоянная $p>0$, такая что оценка вида $\lim\limits_{x\to b}|f(x)|\cdot|x-b|^p=0$ влечёт, что точка b является устранимой для отображения f.

Доказательство. Заметим, что $I(\varepsilon,\varepsilon_0)=\log\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$, где, как и прежде, $I(\varepsilon,\varepsilon_0)$ задаётся соотношением вида (5). Всё остальное непосредственно вытекает из леммы 1 и следствия 1. □

Теорема 3. *Пусть $Q\colon D\to(0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $b\in D$ и $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке b. Зафиксируем $\varepsilon_0>0$, такое что $\varepsilon_0<\operatorname{dist}(b,\partial D)$. Предположим, что при почти всех $x\in D$ и при некотором $K>0$*

$$q_b(r)\leqslant K\cdot\left(\log\frac{1}{r}\right)^{\alpha} \tag{23}$$

при $r\to 0$. Тогда найдётся число $p>0$ такое, что неравенство (6), выполненное при $\varphi(t)=\exp\log^{\frac{n-\alpha-1}{n-1}}(1/t)$ и некотором $\alpha\in(0,n-1)$ (где $p>0$ и $C>0$ — фиксированные постоянные) влечёт, что точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

Доказательство. Предположим, $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0\in(0,\min\{1,\operatorname{dist}(b,\partial D)\})$. Полагаем $\psi(t)=1/t$, $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\colon=\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt$. Тогда при некоторой постоянной $C_1>0$ и $\varepsilon\to 0$, учитывая условие (23), имеем

$$\frac{1}{I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)}\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0}\frac{Q(x)dm(x)}{|x-b|^n}\leqslant C_1\cdot\frac{1}{\log^{n-\alpha-1}(1/\varepsilon)}=C_1\log^{1-n}\varphi(\varepsilon),$$

откуда вытекает выполнение условий (4)–(5) леммы 1. Применяя эту лемму, заключаем, что точка b не может быть существенно особой для отображения f. □

Следствие 2. *Пусть $Q\colon D\to(0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $b\in D$ и $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке b, где Q удовлетворяет условию (23). Зафиксируем $\varepsilon_0>0$, такое что $\varepsilon_0<\operatorname{dist}(b,\partial D)$. Тогда найдётся положительная постоянная $\gamma>0$, $\gamma<1$, со следующим свойством. Если отображение f удовлетворяет более сильному, чем (6) (при $\varphi(t)=\exp\log^{\frac{n-\alpha-1}{n-1}}(1/t)$), условию*

$$\lim\limits_{x\to b}|f(x)|\cdot\exp\left\{-\gamma\log^{\frac{n-1-\alpha}{n-1}}(\varepsilon_0/|x-b|)\right\}=0, \tag{24}$$

то f имеет устранимую особенность в точке b.

Доказательство. По теореме 3 точка b не может быть существенно особой для отображения f. Осталось показать, что при выполнении более сильных условий (23)–(24) точка b для отображения f также не может быть полюсом. Заметим, что при достаточно большом $M_1 > 0$, некотором $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$

$$\int_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)dm(x)}{|x-b|^n} \leqslant M_1 \cdot I^{\alpha+1}(\varepsilon, \varepsilon_0), \tag{25}$$

где $\psi(t) = 1/t$ и $I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt$. Предположим, что точка b является для отображения f полюсом. Рассмотрим композицию отображений $h = g \circ f$, где $g(x) = \frac{x-b}{|x-b|^2}$ — инверсия относительно единичной сферы $S(b, 1)$. Заметим, что отображение h является кольцевым Q-отображением в нуле, и $h(0) = 0$. Кроме того, в некоторой окрестности нуля отображение h, по построению, является ограниченным. В таком случае, найдутся $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, и $R > 0$, такие, что $|h(x)| \leqslant R$ при $|x - b| < \varepsilon_2$. Согласно [12, лемма 3.3], учитывая соотношение (25), получаем

$$|h(x)| = \frac{1}{|f(x)|} \leqslant \frac{\alpha_n(1+R^2)}{\delta} \exp\left\{-\gamma \cdot \log^{\frac{n-1-\alpha}{n-1}} \frac{\varepsilon_0}{|x-b|}\right\},$$

где постоянные α_n и $\gamma = (\frac{\omega_{n-1}}{M_1})^{1/(n-1)}$ зависят только от n, а δ — от R. Не ограничивая общности, можно считать, что $\gamma < 1$. Тогда

$$|f(x)| \cdot \exp\left\{-\gamma \cdot \log^{\frac{n-1-\alpha}{n-1}} \frac{\varepsilon_0}{|x-b|}\right\} \geqslant \frac{\delta}{\alpha_n(1+R^2)}.$$

Однако, если при этом выполнено условие (24), мы приходим к противоречию, что и доказывает следствие. □

Пусть $\Phi\colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ — неубывающая функция. Тогда *обратная функция* Φ^{-1} может быть корректно определена следующим образом

$$\Phi^{-1}(\tau) \;=\; \inf_{\Phi(t) \geqslant \tau} t. \tag{26}$$

Как обычно, inf в (26) равен ∞, если множество $t \in [0, \infty]$, таких что $\Phi(t) \geqslant \tau$, пусто. Заметим, что функция Φ^{-1} также является неубывающей.

Теорема 4. *Пусть $Q\colon D \to (0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $b \in D$ и $f\colon D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке b. Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$, такое что $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(b, \partial D)$. Кроме того, предположим, что существуют число $M > 0$, неубывающая выпуклая функция $\Phi\colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ и окрестность U точки b, такие что*

$$\int_U \Phi\left(Q(x)\right) \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \;\leqslant\; M, \quad \int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{27}$$

при некотором $\delta_0 > \Phi(0)$. Тогда найдётся число $p > 0$, такое что неравенство (3), выполненное с некоторой постоянной $C > 0$, влечёт наличие предела отображения f в точке b.

Доказательство. Из условий (27) и [13, теорема 3.1] следует расходимость интеграла вида $\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)} = \infty$. Всё остальное следует из теоремы 1. □

Следуя [8], будем говорить, что локально интегрируемая функция $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0\in D$, пишем $\varphi\in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{\Omega_n\varepsilon^n}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)}|\varphi(x)-\overline{\varphi}_{\varepsilon}|dm(x)<\infty,$$

где $\overline{\varphi}_{\varepsilon}=\frac{1}{\Omega_n\varepsilon^n}\int_{B(x_0,\varepsilon)}\varphi(x)dm(x)$.

Заметим, что, как известно, $\Omega_n\varepsilon^n=m(B(x_0,\varepsilon))$. Имеет место следующая

Теорема 5. *Пусть $Q\colon D\to(0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $b\in D$ и $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке b. Предположим, что $Q\in FMO(b)$. Тогда найдётся показатель степени p', зависящий только от функции Q, такой что неравенство*

$$|f(x)|\leqslant C\left(\log\frac{1}{|x-b|}\right)^p, \tag{28}$$

выполненное при некотором $C>0$ и $p\in(0,p')$ влечёт наличие предела отображения f в точке b.

Более того, существует $0<p_0<p'$, такое, что оценка вида

$$\lim_{x\to b}\frac{|f(x)|}{\left(\log\frac{1}{|x-b|}\right)^{p_0}}=0 \tag{29}$$

влечёт, что $b=0$ является устранимой особой точкой для отображения f.

Доказательство. В лемме 1 положим $\psi(t):=\frac{1}{t\log\frac{1}{t}}$, т.е.,

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0)=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt=\log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}},$$

кроме того, $\varphi(\varepsilon):=\log\frac{1}{\varepsilon}$. Заметим, что для функций класса FMO в точке b

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<e_0}\frac{Q(x+b)dm(x)}{(|x|\log\frac{1}{|x|})^n}=O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

при $\varepsilon\to 0$ и для некоторого $e_0>0$, $e_0\leqslant\operatorname{dist}(0,\partial D)$ (см. [5, следствие 6.3]). Поэтому мы сразу получаем выполнение условий (4) и (5), что доказывает возможность непрерывного продолжения в точку b. Оставшаяся часть утверждения вытекает из следствия 1. $\Box$

Теорема 6. *Пусть $Q\colon D\to(0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $b\in D$ и $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке b. Пусть, кроме того, $q_b(r)\leqslant C\cdot\left(\log\frac{1}{r}\right)^{n-1}$ при $r\to 0$. Тогда существует $0<p_0<\infty$ такое, что точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой, как только соотношение (28) выполнено при произвольном $0<p<p_0$.*

Кроме того, найдётся $0<p_1<\infty$ такое, что если при $0<p<p_1$ имеет место оценка вида (29), то точка $b=0$ является устранимой для отображения f.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b=0$. Фиксируем $\varepsilon_0<\min\left\{\mathrm{dist}\,(0,\partial D)\,,1\right\}$. Полагаем $\psi(t)=\frac{1}{t\log\frac{1}{t}}$, $\varphi(\varepsilon):=\log\frac{1}{\varepsilon}$. Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0}\frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n}=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\left(\int\limits_{|x|=r}\frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n}dS\right)dr\leqslant C\cdot\omega_{n-1}\cdot I(\varepsilon,\varepsilon_0),$$

где, как и прежде,

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0):=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt=\log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}.$$

Отсюда заключаем, что при указанной выше функции ψ имеют место условия (4) и (5) леммы 1. Таким образом, первая часть заключения теоремы 6 установлена. Второе утверждение этой теоремы вытекает из следствия 1. $\Box$

Напоследок сформулируем ещё одно важное утверждение, относящееся к одному достаточно широкому классу отображений, для которого основные результаты заметки имеют место. Напомним, что точка $x_0\in D$ называется *точкой ветвления отображения* f, если ни в какой окрестности U точки x_0 сужение $f|_U$ не является гомеоморфизмом. Множество точек ветвления отображения f принято обозначать символом B_f. Поскольку произвольное открытое дискретное отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ класса $W_{\mathrm{loc}}^{1,n}(D)$, для которого $K_I(x,f)\in L_{\mathrm{loc}}^1$ и $m(B_f)=0$, является кольцевым Q-отображением в произвольной точке заданной области, см. [14, теорема 1] и [4, следствие 3.14 и предложение 4.3]), из теорем 1–4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. *Каждое из заключений теорем 1–4, а также следствий 1–2, справедливо для произвольных открытых дискретных отображений* $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$ *класса* $W_{\mathrm{loc}}^{1,n}(D\setminus\{b\})$, *таких что* $K_I(x,f)\in L_{\mathrm{loc}}^1$ *и* $m(B_f)=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. E.A. Sevost'yanov, *On the local behavior of mappings with an unbounded quasiconformality coefficient*, Sib. Math. J., **53** (2012), №3, 520–531. (in Russian)
2. J. Väisälä, *Modulus and capacity inequalities for quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math., **509** (1972), 1–14.
3. E.A. Sevost'yanov, *On removable singularities of maps with growth bounded by a function*, Math. Notes., **97** (2015), №3, 110–121. (in Russian)
4. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion*, J. d'Anal. Math., **93** (2004), №1, 215–236.
5. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, Moduli in Modern Mapping Theory, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York etc., 2009.
6. C.J. Bishop, V.Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, *On conformal dilatation in space*, Intern. Journ. Math. and Math. Sci., **22** (2003), 1397–1420.
7. V.Ya. Gutlyanskii, V.I. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, The Beltrami Equation: A Geometric Approach, Developments in Mathematics, V.26, Springer, New York etc., 2012.
8. A. Ignat'ev, V. Ryazanov, *Finite mean oscillation in the mapping theory*, Ukr. Math. Bull., **2** (2005), №3, 403–424, 443. (in Russian)
9. J. Väisälä, *Lectures on n–Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math., V.229, Springer–Verlag, Berlin etc., 1971.

10. S. Rickman, Quasiregular mappings, Results in Mathematic and Related Areas (3), 26, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
11. R.R. Salimov, E.A. Sevost'yanov, *The theory of shell-based Q-mappings in geometric function theory*, Sb. Math., **201** (2010), №5-6, 909–934. (in Russian)
12. E.A. Sevost'yanov, *Theory of moduli and capacities, and normal families of mappings that admit branching*, Ukr. Math. Bull., **4** (2007), №4, 573–593. (in Russian)
13. V.I. Ryazanov, E.A. Sevost'yanov, *Equicontinuity of mean quasiconformal mappings*, Sib. Math. J., **52** (2011), №3, 524–536. (in Russian)
14. E.A. Sevost'yanov, *Generalization of one Poletskii lemma to classes of space mappings*, Ukrainian Math. J., **61** (2009), №7, 1151–1157. (in Russian)

esevostyanov2009@mail.ru
dasha.dolja@mail.ru

Поступило 28.09.2015
После переработки 21.11.2015