УДК 517.9

М. В. Краснощок

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО ДРОБОВОЇ ЗАДАЧІ СТЕФАНА

M. V. Krasnoschok. *An application of integral equation method to fractional Stefan problem*, Mat. Stud. **44** (2015), 56–66.

Fractional Stefan problem is reduced to a nonlinear integral equation of the Volterra type. Solvability of this equation is established by the contraction mapping principle.

Н. В. Краснощек. *Применение метода интегральных уравнений к дробной задаче Стефана* // Мат. Студії. – 2015. – Т.44, №1. – С.56–66.

Дробная задача Стефана сведена к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерра. Разрешимость этого уравнения установлена при помощи принципа сжимающих отображений.

Вступ. Класична задача Стефана в найпростішому формулюванні полягає в знаходженні невідомих $u(x,t)$ і $s(t)$ за умовами

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in Q^s_\sigma = \{(x,t)|\ 0 < x < s(t),\ t \in [0,\sigma)\}, \tag{1}$$

$$s(0) = s_0, \quad u(x,0) = \varphi(x) > 0,\ x \in (0,s_0), \tag{2}$$

$$u(0,t) = f(t), \quad t \in [0,\sigma), \tag{3}$$

$$u(s(t),t) = 0, \quad t \in [0,\sigma), \tag{4}$$

$$s_t(t) = -u_x(s(t),t), \quad t \in [0,\sigma). \tag{5}$$

Зауваження 1. Виходячи з (2), (4) і сильного принципу максимума, при $t > 0$ маємо, що $u_x(s(t),t) < 0$, і, як наслідок (5), функція $s(t)$ є строго зростаючою. Отже, при $x \geq s_0$ існує обернена функція $l(x) = s^{-1}(x)$. (При $x < s_0$ вважаємо, що $l(x) = 0$).

Теорію класичної розв'язності задачі Стефана побудовано в роботах [1]–[4] (див. також наведену літературу).

Останнім часом було з'ясовано (див., наприклад, [5]–[7]), що фізичні, хімічні, механічні процеси в деяких матеріалах складної структури більш адекватно описуються математичними моделями із використанням похідних не цілого, а дробового порядку. Зокрема, замість рівняння дифузії (1) пропонується застосовувати рівняння аномальної дифузії

$${}_cD^\alpha_{0+,t} u(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad \alpha \in (0,1), \tag{6}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35R35.
Keywords: Stefan problem; free boundary; fractional integral; fractional derivative; Volterra integral equation.
doi:10.15330/ms.44.1.56-66

де ${}_cD^{\alpha}_{0+,t}u(x,t)$ — лівостороння похідна Капуто з початком у точці 0. Нагадаємо, що лівостороння похідна Капуто з початком у довільній точці a визначається за правилом:

$$ {}_cD^{\alpha}_{a+,t}u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha}u(x,\tau)d\tau - (t-a)^{-\alpha}u(x,a)\right]. \qquad (7)$$

Питання роз'вязності різних задач для рівняння аномальної дифузії вивчалося, зокрема, в [8]–[13]. Особливо візначимо роботи [14], [15], в яких використовується метод граничних інтегралів, за допомогою якого задачі Діріхле і Робіна зведено до інтегральних рівнянь типу Вольтера.

Дробова задача Стефана, яка є узагальненням класичної задачі Стефана на випадок аномальної дифузії, припускає наявність пам'яті в прихованій теплоті фазового переходу ([16], [17]). Тобто існують, як моделі з умовою Стефана (5) ([16], [18]), так і моделі, де в умові Стефана також використовується похідна Капуто ([19], [17])

$$ {}_cD^{\alpha}_{0+,t}s(t) = -u_x(s(t),t), \quad t\in(0,T). \qquad (8)$$

До цього часу були відомі лише роботи, де вивчалося питання існування автомодельних розв'язків дробової задачі Стефана з умовою (5) в [16], [18], і з умовою (8) — в [20], [21], [18], [22]–[24].

Як легко помітити, при загальних припущеннях відносно s_0 і f ми можемо використовувати рівняння (6) у довільній нециліндричній області Q^s_T лише у випадку, коли функція $s(t)$ є спадною, бо саме тоді функцію $u(x,\tau)$ визначено для всіх $\tau\in[0,t]$ (див. (7) при $a=0$). Якщо ж функція $s(t)$ є зростаючою, тоді функцію $u(x,\tau)$ визначено лише на відрізку $\tau\in[l(x),t]$, тому похідну ${}_cD^{\alpha}_{0+,t}u(x,t)$ природньо замінити на ${}_cD^{\alpha}_{l(x)+,t}u(x,t)$. Деякі міркування з цього приводу можна знайти в [25].

З попереднього досвіду дослідження задачі Стефана (див. зауваження 1) і вигляду автомодельних розв'язків дробової задачі Стефана, варто очікувати, що, принаймні для малих значень t, $s(t)$ буде строго зростаючою.

Через це ми розглянемо задачу (P_θ) $(\theta=\alpha;1)$: знайти $u(x,t)$, $s(t)$, які задовольняють рівняння

$$ {}_cD^{\alpha}_{l(x)+,t}u(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (x,t)\in Q^s_\sigma, \qquad (9)$$

умови (2)–(4), а також умову Стефана у вигляді

$$ {}_cD^{\theta}_{0+,t}s = -u_x(s(t),t), \quad t\in(0,\sigma). \qquad (10)$$

Сформулюємо припущення на дані задачі (P_θ)

$$\varphi(0)=f(0);\ \varphi(s_0)=0;\ \varphi(x)>0,\ x\in[0,s_0);\ \varphi\in C^2[0,s_0];\ \varphi'(s_0)<0;$$
$$ f,\ {}_cD^{\theta}_{0+,t}f\in C[0,T]. \qquad (11)$$

Означення. Назвемо пару функцій $u(x,t)$, $s(t)$ *роз'вязком задачі* (P_θ) для всіх $t<\sigma$, якщо

a) функція s монотонно зростає на відрізку $[0,\sigma)$, отже існує обернена функція l;

b) ${}_cD^{\alpha}_{l(x)+,t}u(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ є неперервними і обмеженими в Q^s_σ;

c) u, u_x є неперервними в $\overline{Q}^s_\sigma$;

d) $s(t)$, $D^{\alpha}_{0,t}s(t)$ є неперервними функціями при $t\in[0,\sigma]$,

e) виконано рівняння (9), (2)–(4), (10).

У даній роботі задачу (P_θ) зведено до нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра, для якого доведено існування єдиного розв'язку при достатньо малому значенні σ. При цьому ми наслідуємо підходи, розроблені в [1], [26] для класичної задачі Стефана. Також ми використовуємо деякі результати розд. 2 і 4 монографії [11]. При $\theta = 1$ ми доводимо, що для функції $s(t)$, знайденої із роз'язання інтегрального рівняння, маємо $s_t(t) > 0$. При $\theta = \alpha$ питання монотонності s залишається відкритим. Можна лише стверджувати, що $s(t) > s_0$ при всіх $0 < t < \sigma$.

Роботу побудовано наступним чином. У першому пункті визначено інтеграли і похідні дробового порядку, сформульовано деякі властивості фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння (8). У другому — отримано співвідношення на стрибку теплового потенціалу простого шару, на підставі якого, у третьому пункті задачу зведено до нелінійного інтегрального рівняння. Четвертий пункт містить основний результат роботи та його доведення.

1. Допоміжні твердження. Наведемо деякі відомості з дробового числення (див. [5], [6]). Нехай $a \in \mathbb{R}$, $\nu > 0$, $\alpha \in (0,1)$. Визначимо лівосторонній і правосторонній інтеграли Рімана-Ліувілля

$$I^{\nu}_{a+,\tau} g(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^{\tau} \frac{g(\eta)}{(\tau-\eta)^{1-\nu}} d\eta, \quad I^{\nu}_{a-,\tau} g(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{\tau}^{a} \frac{g(\eta)}{(\eta-\tau)^{1-\nu}} d\eta,$$

а також похідні Рімана-Ліувілля $D^{\alpha}_{a+,\tau} g(\tau) = \frac{d}{d\tau} I^{1-\alpha}_{a+,\tau} g(\tau)$, $D^{\alpha}_{a-,\tau} g(\tau) = -\frac{d}{d\tau} I^{1-\alpha}_{a-,\tau} g(\tau)$. Похідні Капуто (порів. з (7)) можна записати в наступному вигляді:

$${}_cD^{\alpha}_{a+,\tau} g(\tau) = D^{\alpha}_{a+,\tau} g(\tau) - \frac{g(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (\tau-a)^{-\alpha}, \ {}_cD^{\alpha}_{a-,\tau} g(\tau) = D^{\alpha}_{a-,\tau} g(\tau) - \frac{g(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (a-\tau)^{-\alpha}.$$

Легко перевірити, що

$$I^{\alpha}_{t-,\tau} g(t-\tau) = I^{\alpha}_{0+,\eta} g(\eta)|_{\eta=t-\tau}. \tag{12}$$

Нагадаємо також формули (див. відповідно формули (2.1.49) і (2.1.40) в [5])

$$\int_a^b g(\eta) I^{\alpha}_{a+,\eta} h(\eta) d\eta = \int_a^b h(\eta) I^{\alpha}_{b-,\eta} g(\eta) d\eta, \tag{13}$$

$$I^{\alpha}_{a+,\eta} \left(D^{\alpha}_{a+,\eta} g(\eta) \right) = g(\eta), \qquad \text{якщо } g \in C([a,b]). \tag{14}$$

Нижче нам будуть потрібні функції Райта ([10], [11]) $\phi(-\beta,\delta,z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\delta-\beta n)}$ із властивостями

$$\begin{gathered} I^{\nu}_{0+,t}(t^{\delta-1}\phi(-\beta,\delta,-ct^{-\beta})) = t^{\delta+\nu-1}\phi(-\beta,\delta+\nu,-ct^{-\beta}), \\ \tfrac{d}{dz}\phi(-\beta,\delta,-z) = -\phi(-\beta,\delta-\beta,-z), \end{gathered} \tag{15}$$

$$\int_0^{\infty} \phi(-\beta,1-\beta,-z) dz = 1, \tag{16}$$

$$|\phi(-\beta,\delta,-z)| \le \gamma \exp(-\gamma z^{\frac{1}{1-\beta}}). \tag{17}$$

Надалі через γ позначатимемо усі сталі, значення яких буде несуттєвим у подальшому розгляді.

Фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (6) (див. [6], [10]) має вигляд $K(x,t) = \frac{1}{2}t^{\alpha/2-1}\phi(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, -|x|t^{-\alpha/2})$. Використовуючи перетворення Лапласа і Фур'є функцію K можна записати у вигляді (див. також § 3.4.2 в [11])

$$K(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \lambda^{-1/2} \exp\Big(-\frac{x^2}{4\lambda}\Big) t^{-1}\phi(-\alpha, 0, -\lambda t^{-\alpha}). \tag{18}$$

Вираз (18) є більш зручним для знаходження похідних K за змінною x, оскільки не містить функцію модуль. Із (18) випливає

$$K_x(x,t) = -\frac{x}{2t^\alpha}\mathcal{L}(x,t),\ \ \mathcal{L}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \lambda^{-3/2} \exp(-\frac{x^2}{4\lambda}) t^{\alpha-1}\phi(-\alpha, 0, -\lambda t^{-\alpha}). \tag{19}$$

Правильні співвідношення (див. [11], [27])

$$D^\alpha_{0+,t}K(x,t) = K_{xx}(x,t),\ D^\alpha_{t-,\tau}K(x-\xi, t-\tau) = K_{xx}(x-\xi, t-\tau),\ x \neq \xi,\ t \neq \tau, \tag{20}$$

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} I^{1-\alpha}_{0+,t} K(x-\xi, t)\varphi(\xi)d\xi = \varphi(x). \tag{21}$$

$$|D^k_x(I^{1-\alpha}_{0+,t}K(x,t))| \leq \gamma t^{-\alpha/2-k\alpha/2} \exp(-\gamma(|x|t^{-\alpha/2})^{\frac{2}{2-\alpha}}),\ k = 0, 1, \tag{22}$$

$$|D^k_x K(x,t| \leq \gamma t^{\alpha/2-k\alpha/2-1} \exp(-\gamma(|x|t^{-\alpha/2})^{\frac{2}{2-\alpha}}),\ k = 0, 1, 2. \tag{23}$$

$$|D^k_x \mathcal{L}(x,t| \leq \gamma t^{\alpha/2-k\alpha/2-1} \exp(-\gamma(|x|t^{-\alpha/2})^{\frac{2}{2-\alpha}}),\ k = 0, 1. \tag{24}$$

Оцінки (20)–(24) виведено безпосередньо із (18), але ми не наводимо доведення цих оцінок, оскільки вони узгоджуються з оцінками [8], [10], [27].

2. Граничні значення похідної потенціалу простого шару.

Лема 1. *Нехай $h(t)$ є неперервною функцією на $[0,T]$ і $s(t)$ задовольняє умову*

$$|s(t) - s(\tau)| \leq \gamma|t-\tau|^\theta, \quad t, \tau \in [0,T], \quad \theta \in (\alpha/2, 1]. \tag{25}$$

Тоді для всіх $t \in [0,T)$

$$\limsup_{x\to s(t)-0} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t h(\tau)K(x-s(\tau), t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}h(t) + \int_0^t h(\tau)K_x(s(t)-s(\tau), t-\tau)d\tau. \tag{26}$$

Доведення. При доведенні формули (26) використовуємо схему, запропоновану в [1]. Позначимо

$$L = \int_0^t h(\tau)K_x(s(t)-s(\tau), t-\tau)d\tau - \int_0^t h(\tau)K_x(x-s(\tau), t-\tau)d\tau.$$

Треба довести, що $\limsup\limits_{x\to s(t)-0}(L + \frac{1}{2}h(t)) = 0$. Маємо $(0 < \delta < t)$

$$L \equiv L_1 + h(t)M + L_2 = \int_{t-\delta}^t (h(\tau) - h(t))(K_x(s(t)-s(\tau), t-\tau) - K_x(x-s(\tau), t-\tau))d\tau$$

$$+h(t)M + \int_0^{t-\delta} h(\tau)(K_x(s(t)-s(\tau), t-\tau) - K_x(x-s(\tau), t-\tau))d\tau,$$

де

$$M = \int_{t-\delta}^{t} (K_x(s(t)-s(\tau), t-\tau) - K_x(x-s(\tau), t-\tau))d\tau =$$
$$= \int_{t-\delta}^{t} \left(\frac{x-s(\tau)}{2(t-\tau)^{\alpha}} \mathcal{L}(x-s(\tau), t-\tau) - \frac{s(t)-s(\tau)}{2(t-\tau)^{\alpha}} \mathcal{L}(s(t)-s(\tau), t-\tau) \right) d\tau,$$

або, після очевидних перетворень,

$$M \equiv M_1 + M_2 + J = \int_{t-\delta}^{t} \frac{x-s(t)}{2(t-\tau)^{\alpha}} \left[\mathcal{L}(x-s(\tau), t-\tau) - \mathcal{L}(x-s(t), t-\tau)\right] d\tau$$
$$+ \int_{t-\delta}^{t} \frac{s(t)-s(\tau)}{2(t-\tau)^{\alpha}} \left[\mathcal{L}(x-s(\tau), t-\tau) - \mathcal{L}(s(t)-s(\tau), t-\tau)\right] d\tau - \int_{t-\delta}^{t} K_x(x-s(t), t-\tau) d\tau.$$

При $x < s(t)$, за допомогою формули (15) роботи [11] маємо

$$J = -\frac{1}{2} \int_0^{\delta} \tau^{\alpha/2-1} \left[\phi\Big(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, -\frac{s(t)-x}{\tau^{\alpha/2}}\Big) \right]_x d\tau =$$
$$= -\frac{\alpha}{4} \int_0^{\delta} \tau^{-\alpha/2-1} (s(t)-x) \phi\Big(-\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}, -\frac{s(t)-x}{\tau^{\alpha/2}}\Big) d\tau =$$
$$= -\frac{1}{2} \int_{(s(t)-x)\delta^{-\alpha/2}}^{\infty} \phi\Big(-\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}, -\eta\Big) d\eta.$$

Співвідношення (16), (17) дозволяють перейти до границі в J

$$\lim_{x \to s(t)-0} J = -\frac{1}{2}. \tag{27}$$

Позначимо через $\mathcal{T}_1(x)$, $\mathcal{T}_2(x)$ множини $\mathcal{T}_1(x) = \{\tau \in (t-\delta, t) \colon \ s(\tau) < x\}$, $\mathcal{T}_2(x) = \{\tau \in (t-\delta, t) \colon \ s(\tau) > x\}$. Представимо M_1 у вигляді суми

$$M_1 = M_1' + M_2'' \equiv \int_{\tau \in \mathcal{T}_1(x)} \frac{x-s(t)}{2(t-\tau)^{\alpha}} \left[\mathcal{L}(x-s(\tau), t-\tau) - \mathcal{L}(x-s(t), t-\tau)\right] d\tau +$$
$$+ \int_{\tau \in \mathcal{T}_2(x)} \frac{x-s(t)}{2(t-\tau)^{\alpha}} \left[\mathcal{L}(x-s(\tau), t-\tau) - \mathcal{L}(x-s(t), t-\tau)\right] d\tau.$$

Маємо $0 \le s(t) - x \le s(t) - s(\tau)$ при $\tau \in \mathcal{T}_1(x)$. Внаслідок (24) отримаємо

$$|M_1'| \le \gamma \int_{t-\delta}^{t} \frac{s(t)-s(\tau)}{2(t-\tau)^{\alpha}} \left[|\mathcal{L}(x-s(\tau), t-\tau)| + |\mathcal{L}(x-s(t), t-\tau)|\right] d\tau \le \gamma \delta^{\theta-\alpha/2}. \tag{28}$$

Далі

$$M_2'' = \int_{\tau \in \mathcal{T}_2(x)} d\tau \int_0^1 \frac{x-s(t)}{2(t-\tau)^{\alpha}} \mathcal{L}_x(x - s(\tau) + \mu(s(\tau)-s(t)), t-\tau)(s(\tau)-s(t)) d\mu.$$

Використовуючи (24), бачимо

$$|M_2''| \le \gamma \int_{\tau\in\mathcal{T}_2(x)} d\tau \int_0^1 \frac{(s(t)-x)(s(t)-s(\tau))}{(t-\tau)^{\alpha+1}} e^{-\gamma\left[\frac{(s(\tau)-x+\mu(s(t)-s(\tau)))^2}{(t-\tau)^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{2-\alpha}}} d\mu \le$$

$$\le \gamma \int_{t-\delta}^{t} \frac{(s(t)-x)(s(t)-s(\tau))}{(t-\tau)^{\alpha+1}} e^{-\gamma\left[\frac{|s(\tau)-x|}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}\right]^{\frac{2}{2-\alpha}}} d\tau \le$$

$$\le \gamma \int_{t-\delta}^{t} \frac{(s(t)-s(\tau))^2+|s(\tau)-x|(s(t)-s(\tau))}{(t-\tau)^{\alpha+1}} e^{-\gamma\left[\frac{|s(\tau)-x|}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}\right]^{\frac{2}{2-\alpha}}} d\tau \le$$

$$\le \gamma \int_{t-\delta}^{t} \left(\frac{(t-\tau)^{2\theta}}{(t-\tau)^{\alpha+1}} + \frac{(t-\tau)^{\theta}}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}+1}}\right) d\tau \le \gamma(\delta^{2\theta-\alpha}+\delta^{\theta-\frac{\alpha}{2}}). \tag{29}$$

За допомогою (23) при $k=1$ і $k=2$ отримаємо відповідно оцінки

$$|L_1| \le \gamma(1+\delta^{\theta-\frac{\alpha}{2}}) \sup_{t-\delta<\tau<t} |h(t)-h(\tau)|, \quad |L_2| \le C(t,\delta)|x-s(t)|. \tag{30}$$

Аналогично тому, як це зроблено в лемі 1 монографії [1], с. 217–219, з (27)–(30) випливає (26). □

3. Зведення задачі (P_θ) **до інтегрального рівняння.** Як і в [1] (див. формули (1.19), (1.23) розділу 8), визначимо функції Гріна задач Діріхле і Неймана для рівняння (6) на півосі $\{x>0\}$, відповідно

$$G(x,t,\xi,\tau) = K(x-\xi,t-\tau)-K(x+\xi,t-\tau),\ N(x,t,\xi,\tau) = K(x-\xi,t-\tau)+K(x+\xi,t-\tau). \tag{31}$$

.

Спочатку отримаємо зображення функції $u(x,t)$ у вигляді

$$u(x,t) = \int_0^t u_\xi(s(\tau),\tau)G(x,t,s(\tau),\tau)d\tau + \int_0^t f(\tau)G_\xi(x,t,0,\tau)d\tau + \int_0^{s_0} \varphi(\xi) I_{0+,t}^{1-\alpha} G(x,t,\xi,0)d\xi. \tag{32}$$

Використовуємо підхід, запропонований в [11]. Помножимо рівняння (9) на $G(x,t,\xi,\tau)$ і проінтегруємо по множині $Q_{t_\epsilon}^s$, $t_\epsilon = t-\epsilon > 0$:

$$\int_0^{s(t_\epsilon)} d\xi \int_{l(\xi)}^{t_\epsilon} \left[D_{l(\xi)+,\tau}^{\alpha} u(\xi,\tau) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{u(\xi,l(\xi))}{(\tau-l(\xi))^{\alpha}}\right] G(x,t,\xi,\tau)d\tau -$$

$$- \int_0^{t_\epsilon} d\tau \int_0^{s(\tau)} u_{\xi\xi}(\xi,\tau)G(x,t,\xi,\tau)d\xi = 0. \tag{33}$$

Нижче ми перейдемо до границі при $\epsilon \to 0$.

З леми 4.3.1 роботи [11] випливає, що функцію G можна записати у вигляді

$$G(x,t,\xi,\tau) = I_{t_\epsilon-,\tau}^{\alpha} D_{t-,\tau}^{\alpha} G(x,t,\xi,\tau) + \frac{(t_\epsilon-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[I_{t-,\tau}^{1-\alpha} G(x,t,\xi,\tau)\right]_{\tau=t_\epsilon} + S_{t_\epsilon t}^{1-\alpha} G(x,t,\xi,\tau),$$

$$S_{t_\epsilon t}^{1-\alpha} G(x,t,\xi,\tau) = \frac{\sin(\pi(\alpha-1))}{\pi} \int_{t_\epsilon}^{t} \frac{G(x,t,\xi,\eta)}{\eta-\tau} \left|\frac{\eta-t_\epsilon}{t_\epsilon-\tau}\right|^{1-\alpha} d\eta.$$

Тоді

$$\int_0^{s(t_\epsilon)} d\xi \int_{l(\xi)}^{t_\epsilon} D^\alpha_{l(\xi)+,\tau} u(\xi,\tau) I^\alpha_{t_\epsilon -,\tau} D^\alpha_{t-,\tau} G(x,t,\xi,\tau) d\tau = \int_0^{t_\epsilon} d\tau \int_0^{s(\tau)} u(\xi,\tau) D^\alpha_{t-,\tau} G(x,t,\xi,\tau) d\xi, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{s(t_\epsilon)} d\xi \int_{l(\xi)}^{t_\epsilon} D^\alpha_{l(\xi)+,\tau} u(\xi,\tau) \tfrac{(t_\epsilon-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[I^{1-\alpha}_{t-,\tau} G(x,t,\xi,\tau)\right]_{\tau=t_\epsilon} d\tau = \\ = \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{s(t_\epsilon)} u(\xi,t_\epsilon) \left[I^{1-\alpha}_{t-,\tau} G(x,t,\xi,\tau)\right]_{\tau=t_\epsilon} d\xi = u(x,t), \end{aligned} \tag{35}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{s(t_\epsilon)} d\xi \int_{l(\xi)}^{t_\epsilon} D^\alpha_{l(\xi)+,\tau} u(\xi,\tau) S^{1-\alpha}_{t_\epsilon t} G(x,t,\xi,\tau) d\tau = 0, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{s(t_\epsilon)} d\xi \int_{l(\xi)}^{t_\epsilon} \tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \tfrac{u(\xi,l(\xi))}{(\tau-l(\xi))^\alpha} G(x,t,\xi,\tau) d\tau = \\ = \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{s_0} \varphi(\xi) \left(\tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_\epsilon} \tau^{-\alpha} G(x,t,\xi,\tau) d\tau \right) d\xi = \int_0^{s_0} \varphi(\xi) I^{1-\alpha}_{0+,t} G(x,t,\xi,0) d\xi. \end{aligned} \tag{37}$$

Рівність (34) випливає з (13). Користуючись означенням інтеграла Рімана-Ліувілля і формулою (14), маємо

$$\int_{l(\xi)}^{t_\epsilon} D^\alpha_{l(\xi)+,\tau} u(\xi,\tau) \frac{(t_\epsilon-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau = I^\alpha_{l(\xi)+-,\eta} (D^\alpha_{l(\xi)+,\eta} u(\xi,\tau)|_{\tau=t_\epsilon} = u(\xi,t_\epsilon).$$

Далі співвідношення (35) фактично є наслідком (14). Граничний перехід (36) доводиться аналогично лемі 4.3.2 в [11]. При виведенні співвідношення (37) ми використовуємо означення дробового інтеграла а також той факт, що, за означенням (див. Зауваження 1), $u(\xi,l(\xi)) = \varphi(\xi)$ при $\xi \le s_0$ і $u(\xi,l(\xi)) = 0$ при $\xi > s_0$. Із (33) і наведених вище співвідношень випливає (32).

Зауваження 2. Варто зазначити, що зображення (32) розв'язку задачі (P_θ) надалі ми використовуємо при $x < s(t)$. При $x > s(t)$ права частина має дорівнювати нулю, оскільки при виведенні (32) ми скористалися тим, що $u(x,t) = 0$ при $x > s(t)$. Тим часом неважко переконатися в тому, що формально кожен з доданків у правій частині (32) є визначеним при всіх $x > 0$ і задовольняє рівняння (6).

Діємо за схемою з [1], с. 220–221. Позначимо $v(t) = u_x(s(t),t)$. Продиференціюємо обидві частини (32) за змінною x і спрямуємо x до $s(t) - 0$. Далі у першому інтегралі використовуємо лему 1, у другому і третьому- співвідношення $G_x = -N_\xi$, а потім інтегруємо частинами за допомогою формул (12), (13), (20). Таким чином із (32) отримаємо

$$\begin{aligned} v(t) = 2\int_0^{s_0} \varphi'(\xi) I^{1-\alpha}_{0+,\tau} N(s(t),\tau,\xi,0)|_{\tau=t} d\xi - 2\int_0^t {}_cD^\alpha_{0+,\eta} f(\eta) \cdot N(s(t),t,0,\eta) d\eta + \\ +2\int_0^t v(\eta) G_x(s(t),t,s(\eta),\eta) d\eta \equiv \mathcal{A}_1 v + \mathcal{A}_2 v + \mathcal{A}_2 v. \end{aligned} \tag{38}$$

За допомогою формули (3.5.16) [5] знаходимо s із (10)

$$s(t) = s_0 - \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^t \frac{v(\eta)}{(t-\eta)^{1-\theta}} d\eta. \tag{39}$$

4. Основний результат. Основним результатом даної роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконано припущення (11), тоді для достатньо малого σ існує єдиний роз'вязок задачі (38), (39).*

Позначимо $|v|_t = \max\limits_{\tau\in[0,t]} |v(\tau)|$. Спочатку розглянемо співвідношення (39).

Лема 2. *Правильні нерівності*

a) якщо s відповідає v в (39)

$$|s(t) - s(\tau)| \le C_\theta |v|_\sigma |t-\tau|^\theta,\ \ C_\theta = \frac{4}{\Gamma(\theta+1)},\ \ 0 \le \tau \le t \le \sigma, \tag{40}$$

$$|s(t) - s_0| \le \frac{s_0}{2},\quad \text{якщо}\ \ 2C_\theta |v|_\sigma \sigma^\theta \le s_0; \tag{41}$$

b) якщо s, $\overline{s}$ відповідають v і $\overline{v}$, тоді

$$|s(t) - \overline{s}(t) \le \frac{t^\theta}{\Gamma(\theta+1)} |v - \overline{v}|_t, \tag{42}$$

$$|s(t) - s(\tau) - (\overline{s}(t) - \overline{s}(\tau))| \le C_\theta |v-\overline{v}|_t |t-\tau|^\theta,\ \ 0 \le \tau \le t \le \sigma. \tag{43}$$

Нерівності (40), (43) випливають із тих саме міркувань, що і при доведенні теореми 3.1 ([28]). Твердження (41) є наслідком (40), а твердження (42) — зображення (39). Підкреслимо, що, завдяки (40) буде виконано умову (25).

Доведення теореми 1. Розглянемо наступну множину $\mathcal{S}_{r,\sigma} {=} \{v \in C[0,\sigma] : |v - \varphi'(s_0)|_\sigma \le r\}$, причому $r = |\varphi'(s_0)|/2$. Тоді

$$|v(t)| \le 3r, \quad v(t) \le \frac{\varphi'(s_0)}{2} = -r < 0. \tag{44}$$

Очевидно (див. (41), (44))

$$\frac{s_0}{2} \le s(t) \le \frac{3s_0}{2},\ \ \text{якщо}\ \ 6C_\theta r \sigma^\theta \le s_0. \tag{45}$$

Співвідношення (38), (39) можна записати у вигляді $v = \mathcal{A}v$. Застосуємо до оператора $\mathcal{A}$ принцип стискаючих відображень.

Для того, щоб знайти умови на σ за яких оператор $\mathcal{A}$ відображає множину $\mathcal{S}_{r,\sigma}$ в себе розглянемо спочатку різницю

$$\mathcal{A}_1 v - \varphi'(s_0) \equiv \mathcal{J}_1^{(1)} + \mathcal{J}_1^{(2)} + \mathcal{J}_1^{(3)} = \Big(2\int_0^{s_0} \varphi'(s_0) I_{0+,t}^{1-\alpha} N(s_0,t,\xi,0)d\xi - \varphi'(s_0)\Big) +$$
$$+2\int_0^{s_0} (\varphi'(\xi) - \varphi'(s_0) I_{0+,t}^{1-\alpha} N(s_0,t,\xi,0)d\xi +$$
$$+2\int_0^{s_0} \varphi'(\xi) \Big(I_{0+,\tau}^{1-\alpha} N(s(t),\tau,\xi,0)|_{\tau=t} - I_{0+,\tau}^{1-\alpha} N(s_0,\tau,\xi,0)|_{\tau=t}\Big) d\xi.$$

Маємо

$$\mathcal{J}_1^{(1)} v = \varphi'(s_0) \int_0^{s_0} t^{-\alpha/2} \Big(\phi\Big(-\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}, -\frac{s_0-\xi}{t^{\alpha/2}}\Big) + \phi\Big(-\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}, -\frac{s_0+\xi}{t^{\alpha/2}}\Big)\Big) d\xi - \varphi'(s_0) =$$
$$= \varphi'(s_0) \left(\int_0^{s_0 t^{-\alpha/2}} \phi\Big(-\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}, -z\Big) dz - 1 + \int_{s_0 t^{-\alpha/2}}^{2s_0 t^{-\alpha/2}} \phi\Big(-\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}, -z\Big) dz \right) =$$
$$= \varphi'(s_0) \phi\Big(-\frac{\alpha}{2}, 1, -2s_0 t^{-\alpha/2}\Big).$$

Будемо позначати через $\mathcal{C}$ всі сталі, що залежать лише від s_0, α, θ. Отже (див. (16))

$$|\mathcal{J}_1^{(1)}v|_\sigma \le \mathcal{C}|\varphi'(s_0)|\sigma^{\alpha/2}. \tag{46}$$

Нерівності (22), (40) приводять до оцінок

$$|\mathcal{J}_2^{(1)}v|_\sigma \le \mathcal{C}\max_{x\in[0,s_0]}|\varphi''(x)|\sigma^{\alpha/2}, \tag{47}$$

$$|\mathcal{J}_3^{(1)}v|_\sigma \le \mathcal{C}\max_{x\in[0,s_0]}|\varphi'(x)|\sigma^{\alpha/2}. \tag{48}$$

Завдяки оцінкам (23), (40) отримаємо

$$|\mathcal{A}_2v|_\sigma \le \mathcal{C}|{}_cD^\alpha_{0+,t}f(t)|_\sigma\sigma^{\theta-\alpha/2}, \ \ |\mathcal{A}_3v|_\sigma \le \mathcal{C}|v|^2_\sigma\sigma^{\theta-\alpha/2}. \tag{49}$$

Таким чином з (46)–(49), за умовою (45), випливає

$$|\mathcal{A}v|_\sigma \le \mathcal{C}\left(|\varphi|_{C^2([0,s_0])} + |{}_cD^\alpha_{0+,t}f(t)|_\sigma + r^2\right)\sigma^{\theta-\alpha/2}. \tag{50}$$

Розглянемо різницю $\mathcal{A}_1v - \mathcal{A}_1\overline{v}$. Маємо (див. (31))

$$\mathcal{A}_1v - \mathcal{A}_1\overline{v} = 2\int_0^b d\xi\int_0^1 \varphi'(\xi)\left[I^{1-\alpha}_{0+,\tau}K_x(s(t)+\mu(s(t)-\overline{s}(t))+\xi,\tau)\right]_{\tau=t}d\mu \equiv J_1 + J_2.$$

Маємо (див. (18), (31), (15))

$$I^{1-\alpha}_{0+,\tau}K_x(x-\xi,\tau) = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^\infty (x-\xi)\lambda^{-3/2}\exp\Big(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\Big)t^{-\alpha}\phi(-\alpha,1-\alpha,-\lambda t^{-\alpha})d\lambda.$$

Далі застосовуємо в J_1 заміну $\xi \to z = \frac{(s(t)+\mu(s(t)-\overline{s}(t))-\xi)^2}{4\lambda}$ і в J_2 аналогічну заміну $\xi \to z = \frac{(s(t)+\mu(s(t)-\overline{s}(t))+\xi)^2}{4\lambda}$. Зазначимо, що в J_1 слід звернути увагу на те, що вираз $s(t) + \mu(s(t)-\overline{s}(t)) - \xi$ змінює знак залежно від значення ξ. Після простих обчислень бачимо, що

$$|\mathcal{A}_1v-\mathcal{A}_1\overline{v}|_\sigma \le \mathcal{C}\max_{x\in[0,s_0]}|\varphi''(x)|\sigma^\theta|v-\overline{v}|_\sigma\int_0^\infty\exp(-z)dz\int_0^\infty\lambda^{-1/2}t^{-\alpha}\phi(-\alpha,1-\alpha,-\lambda t^{-\alpha})d\lambda.$$

Далі заміна $\lambda \to \eta = \frac{\lambda}{t^\alpha}$ приводить до оцінки

$$|\mathcal{A}_1v - \mathcal{A}_1\overline{v}|_\sigma \le \mathcal{C}\max_{x\in[0,s_0]}|\varphi''(x)|\sigma^{\theta-\alpha/2}|v-\overline{v}|_\sigma, \tag{51}$$

Використовуючи оцінки (22), (23), (42), (43) аналогічно [29], [30] (див. також, наприклад, [31]) дістанемо нерівності

$$|\mathcal{A}_2v - \mathcal{A}_2\overline{v}|_\sigma \le \mathcal{C}|{}_cD^\alpha_{0+,t}f(t)|_\sigma\sigma^{\theta-\alpha/2}|v-\overline{v}|_\sigma, \tag{52}$$

$$|\mathcal{A}_3v - \mathcal{A}_3\overline{v}|_\sigma \le \mathcal{C}(1+\max\{|v|_\sigma,|\overline{v}|_\sigma\})\sigma^{\theta-\alpha/2}|v-\overline{v}|_\sigma. \tag{53}$$

Отже, за умовою (45),

$$|\mathcal{A}v - \mathcal{A}\overline{v}|_\sigma \le \mathcal{C}\left(|\varphi|_{C^2([0,s_0])} + |{}_cD^\alpha_{0+,t}f(t)|_\sigma + r\right)\sigma^{\theta-\alpha/2}|v-\overline{v}|_\sigma. \tag{54}$$

Із співвідношень (45), (50), (54) знаходимо достатньо мале значення σ таке, що, по-перше, $|\mathcal{A}v|_\sigma \le r$ і $\mathcal{A}v \in \mathcal{S}_{r,\sigma}$ для всіх $v \in \mathcal{S}_{r,\sigma}$, і, по-друге, що $|\mathcal{A}v - \mathcal{A}\overline{v}|_\sigma \le |v-\overline{v}|_\sigma$ для всіх v, $\overline{v} \in \mathcal{S}_{r,\sigma}$. Звідси випливає існування і єдиність розв'язку задачі (38), (39). $\square$

Із (39), (44) випливає, що у випадку $\theta = 1$ вільна межа монотонно зростає, а якщо $\theta = \alpha$, тоді $s(t) > s_0$ при $t \in [0,\sigma)$.

Питання еквівалентності задачі (P_θ) і інтегрального рівняння (38), (39) залишається відкритим питанням.

ЛІТЕРАТУРА

1. Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. – R.E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1983.
2. Meirmanov A.M. The Stefan Problem. – De Gruyter, Berlin, 1992. Russian edition: Nauka, Novosibirsk, 1986.
3. Bazaliy B.V., Degtyarev S.P. *On the classical solvability of the multidimensional Stefan problem for convective motion of a viscous incompressible fluid*// Math. USSR Sb. – 1988. – V.60, №1. – P. 11–17.
4. Bizhanova G.I., Solonnikov V.A. *On free boundary problems for the second order parabolic equations*// Algebra Anal. – 2000. – V.12, №6. – P. 98–139.
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., Theory and applications of fractional differential equations. North Holland, Mathematical studies, 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.
6. Podlubny I. Fractional differential equations. – Academic Press, San-Diego, 1999.
7. Frömberg D. Reaction kinetics under anomalous diffusion. – Ph. D. Thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, 2011.
8. Kochubei A.N. *Fractional-order diffusion*// Differential Equations. – 1990. – V.26. – P. 485–492.
9. Kochubei A.N. *Fractional parabolic systems*// Potential analysis. – 2012. – V.37. – P. 1–30.
10. Pskhu A.V. *A fundamental solution for a fractional diffusion wave equation*// Izvestia RAN. – 2009. – V.73. – P. 141–181. (in Russian)
11. Pskhu A.V. Partial differential equation equations of the fractional order. – Nauka, Moscow, 2005. (in Russian)
12. Cle'ment Ph., Londen S.-O., Simonett G. *Quasilinear evolutionary equations and continuous interpolation spaces*// J. Diff. Eqs. – 2004. – V.196, №2. – P. 418–447.
13. Lopushans'ka H.P., Lopushans'kyi A. O. *Space-time fractional Cauchy problem in spaces of generalized functions*// Ukrainian Math. J. – 2013. – V.64, №8. – P. 1215–1230.
14. Kemppainen J. *Existence and uniqueness of the solution for a time-fractional diffusion equation with Robin boundary condition*// Abstract and Applied Analysis. – 2011. – Article ID 321903, 11 p.
15. Kemppainen J., Ruotsalainen K. *Boundary integral solution of the time-fractional diffusion equation*// Integr. equ. oper. theory. – 2009. – V.64. – P. 239–249.
16. Liu J., Xu M. *An exact solution to the moving boundary problem with fractional anomalous diffusion in drug release devices*// Z. Angew. Math. Mech. – 2004. – V.84, №1. – P. 22–28.
17. Voller V.R., Falcini F., Garra R. *Fractional Stefan problems exhibiting lumped and distributed latent-heat memory effects*// Physical Review E. – 2013. – V.87. – P. 5622–5625.
18. Li X.C. Fractional moving boundary problems and some of its applications to controlled release system of Drug// Ph. D. Thesis, Shandong University, Jinan, 2009.
19. Voller V.R. *An exact solution of a limit case Stefan problem governed by a fractional diffusion equation*// Internat. J. Heat and Mass Transf. – 2010. – №53. – P. 5622–5625.
20. Liu J., Xu M. *Some exact solutions to Stefan problems with fractional differential equations*// J. Math. Anal. Appl. – 2009. – V.351. – P. 536–542.
21. Atkinson C. *Moving boundary problems for time fractional and composition dependent diffusion*// Frac. Calcul. and Appl. Analysis. – 2012. – V.15, №2. – P. 207–221.
22. Roscani R., Marcus E.S. *Two equivalent Stefan's problems for the time fractional diffusion equation*// Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2013. – V.16. – P. 802–815.
23. Roscani S., Marcus E.A.S. *A new equivalence of Stefan's problems for the time-fractional-diffusion equation*, http://arxiv.org/abs/1402.2191v2.

24. Błasik M. *Numerical scheme for one-phase 1d fractional Stefan problem using the similarity variable technique*// Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. – 2014. – V.13, №1. – P. 13–21.

25. Vogl C.J., Miksis M.J., Davis S.H. *Moving boundary problems governed by anomalous diffusion*// Proc. R. Soc. A. – 2012. – V.468. – P. 3348–3369.

26. Rubinstein L. The Stefan problem. – Trans. Math. Monographs, V.27, Providence, RI: American Mathematical Society.

27. Vasylyeva N., Krasnoschok M. *On a solvability of a nonlinear fractional reaction-diffusion system in the Hölder spaces*// J. Nonlinear Studies. – 2013. – V.20, №4. – P. 589–619.

28. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and Applications. – Nauka i tekhnika, Minsk, 1987. (in Russian)

29. Friedman A. *Free boundary problems for parabolic equations, I. Melting of solids*// J. Math. and Mech. – 1959. – V.8. – P. 499–518.

30. Sherman B. *A free boundary problem for the heat equation with prescribed flux at both fixed face and melting interface*// Quart. Appl. Math. – 1967. – V.25. – P. 53–63.

31. Briozzo A.C., Tarzia D.A. *A one-phase Stefan problem for a non-classical heat equation with a heat flux condition on the fixed face*// Appl. Math. Compt. – 2006. – V.182. – P. 809–819.

Division of Applied Problems of Modern Analysis
Institute of Mathematics of NASU
iamm012@ukr.net

Надійшло 17.05.2015
Після переробки 23.09.2015