УДК 517.93

І. А. Бойцова

ЗНАХОДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНО ОПТИМАЛЬНИХ КЕРУВАНЬ В ЗАДАЧАХ ЗІ ШВИДКИМИ ТА ПОВІЛЬНИМИ ЗМІННИМИ

I. A. Boitsova. *On asymptotically optimal controls in problems with fast and slow variables*, Mat. Stud. **44** (2015), 45–55.

The problem of optimal control for a system of ordinary differential equations with fast and slow variables and the terminal criterion of quality is studied. It is proved that for any admissible control of the initial system or averaged system there exists the corresponding trajectories of this systems that are approximately equal on the asymptotically large time interval. It is proved that an optimal control of the averaging problem is also an asymptotically optimal control for the two-scale problem.

И. А. Бойцова. *Нахождение асимптотически оптимальных управлений в задачах с быстрыми и медленными переменными* // Мат. Студії. – 2015. – Т.44, №1. – С.45–55.

Задача оптимального управления описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными и терминальным критерием качества. Доказывается, что любое допустимое управление данной системы или усредненной системы позволяет построить соответствующие этому управлению траектории этих систем, которые являются близкими на асимптотически большом промежутке времени. Доказывается, что оптимальное управление усредненной задачи является также асимптотически оптимальным управлением данной задачи.

1. Вступ. При моделюванні поведінки динамічних систем, у яких присутні різношвидкісні складові руху використовуються диференціальні рівняння зі швидкими та повільними змінними. Для визначення повільних змінних у диференціальних рівняннях застосовується малий параметр. Тому для дослідження таких систем можна використовувати асимптотичні методи, які дозволяють спростити саму систему та значно скоротити об'єм необхідних обчислень при її чисельному розв'язуванні.

Загальна схема усереднення для систем диференціальних рівнянь зі швидкими та повільними змінними була доведена В. М. Волосовим ([1, 2]). Велике значення для розвитку методу усереднення стосовно зазначеного класу систем мали роботи Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка [3–5], О. Н. Філатова [6, 7], Д. Д. Байнова, М. М. Константинова, С. Д. Милушевої [8].

Особливість застосування методу усереднення до різношвидкісних систем полягає в необхідності врахування впливу швидких змінних на поведінку повільної підсистеми. Для цього використовується схема М. М. Хапаєва ([9–11]), у якій усереднення повільної підсистеми проводиться вздовж швидких розв'язків виродженої задачі.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34C29, 49J15.
Keywords: task of optimal control; system of differential equations with fast and slow variables; method of averaging; asymptotically optimal control.
doi:10.15330/ms.44.1.45-55

Починаючи з робіт М. М. Мойсеєва [12, 13], асимптотичні методи використовуються при дослідженні задач оптимального керування. Багатьма вченими за допомогою цих методів були розв'язані важливі для практичного впровадження задачі керування рухом об'єктів.

В роботах Ф. Л. Черноуська, Л. Д. Акуленка, Б. Н. Соколова [14], Р. І. Петришина, Я. Р. Петришина [15] асимптотичні методи використовуються для дослідження коливальних одночастотних та багаточастотних задач оптимального керування та відповідних до них крайових задач принципа максимуму. Використання асимптотичних методів основано на усередненні рівнянь повільної підсистеми за швидкими фазами, що дозволяє розділити швидкі та повільні рухи.

Повне та часткове усереднення за часом рівнянь керованого руху для систем стандартного виду обґрунтовано у роботах В. О. Плотнікова та його учнів ([16–18]). В них запропоновано різноманітні алгоритми відновлення керування даної задачі, якщо знайдено оптимальне керування усередненої задачі.

У роботах А. М. Самойленка, О. М. Станжицкого, Т. В. Добродзій [19–21] розглядаються нелінійні та лінійні за керуванням задачі оптимального керування, що описуються системами диференціальних рівнянь у стандартному виді. В них доводиться, що оптимальне керування усередненої задачі за зазначеними умовами буде асимптотично оптимальним керуванням для даної задачі. У роботі [22] отримано аналогічний результат для лінійних за керуванням задач зі швидкими та повільними змінними.

Запропонована робота присвячена знаходженню асимптотично оптимального керування нелінійної задачі зі швидкими та повільними змінними, яке фактично є оптимальним керуванням відповідної усередненої задачі.

2. Постановка задачі. Розглянемо задачу оптимального керування, що описується системою диференціальних рівнянь зі швидкими та повільними змінними

$$\dot{x} = \varepsilon f\left(t, x, y, u\right), \ x\left(0\right) = x_0, \qquad \dot{y} = g\left(t, x, y\right), \ \ y\left(0\right) = y_0, \tag{1}$$

та термінальним критерієм якості

$$J\left[u\right] = \Phi\left(x\left(T\right)\right) \to \min_{u \in U}, \tag{2}$$

де час $t \in [0, T]$, $T = L\varepsilon^{-1}$, $L > 0$ — задана постійна, $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $x\left(t\right) \in D_x \subset \mathbb{R}^n$ — повільні змінні, $y\left(t\right) \in D_y \subset \mathbb{R}^m$ — швидкі змінні, $f\left(t, x, y, u\right)$ — задана вектор-функція розмірності n, $g\left(t, x, y\right)$ — задана вектор-функція розмірності m, $\Phi\left(x\right)$ — задана скалярна функція, $u\left(t\right) \in U \subset \mathbb{R}^r$ — керування системою, значення x_0, y_0 — задані початкові умови задачі.

Означення 1. *Керування $u(t)$ вважаються допустимими* для задачі (1), якщо задовольняють умовам:

a) $u(t)$ — вимірні, локально інтегровані при $t \geq 0$ та $u(t) \in U$ при $t \geq 0$;

b) для кожного керування $u(t) \in U$ існує стала $u_c \in U$ така, що $\|u(t) - u_c\| \leq \alpha(t)$, де $\alpha(t)$ не залежить від $u(t)$ і $\int_0^\infty \alpha(t)dt < +\infty$;

c) існує $\varepsilon_0 > 0$, яке не залежить від $u(t)$, що для усіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ відповідні до цих керувань розв'язки $x\left(t\right) \in D_x$, $y\left(t\right) \in D_y$ задачі Коші для системи диференціальних рівнянь (1) визначені для усіх $t \in [0, T]$ ([21]).

Означення 2. *Оптимальним керуванням* задачі (1), (2) вважається таке допустиме керування $u^*(t)$, яке критерію якості (2) забезпечує мінімальне значення $J^* = J[u^*]$.

3. Побудова усередненої задачі оптимального керування. Побудову усередненої задачі почнемо з того, що у системі диференціальних рівнянь (1) покладемо $\varepsilon = 0$ та отримаємо відповідну вироджену задачу

$$\dot{x} = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{y} = g(t, x, y), \quad y(0) = y_0. \tag{3}$$

Припустимо, що для довільного y_0 існує розв'язок $y = h(t, x, y_0)$ виродженої задачі (3) для швидких змінних, визначений для усіх $t \geq 0$, де x вважається параметром.

Нехай рівномірно відносно x, u, y_0, t_0 існує границя

$$f_0(x, u) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(s, x, h(s, x, y_0), u) ds. \tag{4}$$

Тоді задачі оптимального керування (1), (2) поставимо у відповідність усереднену задачу оптимального керування, що описується системою диференціальних рівнянь

$$\dot{z} = \varepsilon f_0(z, v), \quad z(0) = x_0, \tag{5}$$

та термінальним критерієм якості

$$J_0[v] = \Phi(z(T)) \to \min_{v \in U}, \tag{6}$$

де функції $v = v(t)$ — допустимі керування задачі (5), які обираються з тієї ж множини U, з якої обираються керування задачі (1), та задовольняють означенню 1, де умова c) виконується для розв'язків початкової задачі (5).

За $v^*(t)$ візьмемо оптимальне керування задачі (5), (6), яке критерію якості (6) забезпечує мінімальне значення $J_0^* = J_0[v^*]$.

4. Знаходження асимптотичного розв'язку задачі. Доведемо, що допустимі керування для системи (1) або (5) забезпечують побудову відповідних траєкторій даної та усередненої систем, що є близькими на асимптотично скінченному інтервалі часу.

Теорема 1. *Нехай для систем диференціальних рівнянь (1) і (5) на множині* $Q = \{t \geq 0, x \in D_x \subset \mathbb{R}^n, y \in D_y \subset \mathbb{R}^m, u \in U \subset \mathbb{R}^r\}$ *виконані наступні умови:*

1) *функції $f(t, x, y, u)$, $g(t, x, y)$ — вимірні за змінною t, функція $g(t, x, y)$ задовольняє умову Липшиця за змінними x, y з постійною λ, функція $f(t, x, y, u)$ задавольняє умову Липшиця за змінними x, y, u з постійною λ та рівномірно обмежена константою M;*

2) *розв'язок $y = h(t, x, y_0)$ виродженої задачі (3) існує для довільного y_0, визначений для усіх $t \geq 0$ та задовольняє умову Липшиця за змінною x з постійною λ;*

3) *рівномірно відносно x, u, y_0, t_0 існує границя (4);*

4) *для будь-якого допустимого керування $v(t) \in U$ усередненої системи (5) відповідна траєкторія $z(t)$, $z(0) = x_0$ разом зі своїм ρ-околом належить множині D_x.*

Тоді для будь-яких $\eta > 0$ та $L > 0$ існує $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ таке, що для усіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ та $t \in [0, T]$ виконується наступне:

I) *будь-яке допустиме керування $u(t) \in U$ системи (1) є допустимим керуванням усередненої системи (5) та відповідні траекторії $x(t) \in D_x$ системи (1) та $z(t) \in D_x$ системи (5) при умові $x(0) = z(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$ задовольняють нерівність*

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \eta; \tag{7}$$

II) *будь-яке допустиме керування $v(t) \in U$ усередненої системи (5) є допустимим керуванням системи (1) та відповідні траекторії $z(t) \in D_x$ системи (5) та $x(t) \in D_x$ системи (1) при умові $z(0) = x(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$ задовольняють нерівність (7).*

Доведення. Доведемо першу частину теореми. Для цього оберемо допустиме керування $u(t) \in U$ системи (1), тоді $x(t)$, $y(t, x_0, y_0)$ — відповідна траєкторія цієї системи, яка за умовою 1) теореми визначена для усіх $t \geq 0$, $h(t, x, y_0)$ — розв'язок виродженої задачі (3) для швидких змінних, який за умовою 2) теореми існує та визначений для усіх $t \geq 0$, а $z(t)$ — траєкторія усередненої системи (5), яка відповідає тому ж керуванню. При цьому, обране керування $u(t) \in U$ повинно бути таким, щоб виконувалася умова 4) теореми, тобто повинно бути допустимим і для системи (5).

Зауважимо, що при виконанні умови 1) теореми для функції $f(t, x, y, u)$ та за умови існування рівномірної границі (4), гранична функція $f_0(z, u)$ те ж буде обмеженою та задовільняти умову Липшиця за змінними z та u ([16]).

Оберемо довільне $\eta > 0$ таке, що $\eta < \rho$, та зафіксуємо його. Оцінимо різницю між відповідними розв'язками систем (1) та (5), враховуючи виконання умови 1) теореми

$$\begin{aligned}
\|x(t) - z(t)\| &\leq \varepsilon \left\| \int_0^t \left[f(s, x(s), y(s, x_0, y_0), u(s)) - f_0(z(s), u(s)) \right] ds \right\| \leq \\
&\leq \varepsilon \left\| \int_0^t \left[f(s, x(s), y(s, x_0, y_0), u(s)) - f(s, x(s), y(s, x_0, y_0), u_0) \right] ds \right\| + \\
&+ \varepsilon \left\| \int_0^t \left[f(s, x(s), y(s, x_0, y_0), u_0) - f_0(x(s), u_0) \right] ds \right\| + \\
&+ \varepsilon \left\| \int_0^t \left[f_0(x(s), u_0) - f_0(z(s), u(s)) \right] ds \right\| \leq \varepsilon\lambda \int_0^t \|u(s) - u_0\| \, ds + \\
&+ \varepsilon \left\| \int_0^t \left[f(s, x(s), y(s, x_0, y_0), u_0) - f_0(x(s), u_0) \right] ds \right\| + \\
&+ \varepsilon\lambda \int_0^t \|x(s) - z(s)\| \, ds + \varepsilon\lambda \int_0^t \|u_0 - u(s)\| \, ds,
\end{aligned}$$

де u_0 — деяке стале керування, яке є допустимим для системи (1) та для системи (5).

Крім того, обране допустиме керування $u(t) \in U$ повинно задовольняти умову b) означення 1, тому існує стала $K > 0$ така, що $\int_0^t \|u(s) - u_0\| \, ds \leq \int_0^t \|u(s) - u_c\| \, ds + \int_0^t \|u_c - u_0\| \, ds \leq 2 \int_0^\infty \alpha(s) ds = K$, тому останню нерівність можна представити у вигляді

$$\|x(t) - z(t)\| \leq I + 2\varepsilon\lambda K + \varepsilon\lambda \int_0^t \|x(s) - z(s)\| \, ds, \tag{8}$$

$$I = \varepsilon \left\| \int_0^t \left[f(s, x(s), y(s, x_0, y_0), u_0) - f_0(x(s), u_0) \right] ds \right\|. \tag{9}$$

Щоб оцінити вираз (9), спочатку розглянемо різницю між швидкими роз'язками системи (1) та виродженої системи (3). При виконанні умови 1) теореми отримаємо

$$\|y(t,x_0,y_0)-h(t,x_0,y_0)\| \le \int_0^t \|g(s,x(s),y(s,x_0,y_0))-g(s,x_0,h(s,x_0,y_0))\|ds \le$$
$$\le \lambda\int_0^t \|x(s)-x_0\|ds+\lambda\int_0^t \|y(s,x_0,y_0)-h(s,x_0,y_0)\|ds \le$$
$$\le \lambda\int_0^t \left\|\varepsilon\int_0^s f(\tau,x(\tau),y(\tau,x_0,y_0),u(\tau))d\tau\right\|ds+\lambda\int_0^t \|y(s,x_0,y_0)-h(s,x_0,y_0)\|ds \le$$
$$\le \varepsilon\lambda M\int_0^t sds+\lambda\int_0^t \|y(s,x_0,y_0)-h(s,x_0,y_0)\|ds,$$

звідки за лемою Гронуолла-Беллмана буде

$$\|y(t,x_0,y_0)-h(t,x_0,y_0)\| \le \varepsilon\lambda M\cdot\frac{t^2}{2}\cdot e^{\lambda t}=\varepsilon\beta(t). \tag{10}$$

Бачимо, що $\beta=\beta(t)$ — зростаюча за t функція. Візьмемо за $t^*(\varepsilon)$ — корінь рівняння $\beta(t)=\frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}$, де $C>0$ — деяка стала. Тоді $\varepsilon\beta(t^*)=C\sqrt{\varepsilon}$, а $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\beta(t^*)=0$.

Введемо до розгляду функцію

$$\Delta(\varepsilon)=\min\left\{1/\sqrt{\varepsilon};t^*(\varepsilon)\right\}, \tag{11}$$

яка задовольняє властивостям

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta(\varepsilon)=+\infty,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\Delta(\varepsilon)=0. \tag{12}$$

Розіб'ємо проміжок часу $[0,T]$ на відрізки довжиною Δ точками розбиття $t_i=i\Delta$, $i\in\{0,1,\ldots,N\}$, $N=E\left(\frac{T}{\Delta}\right)$, $E(a)$ — ціла частина числа a.

З (10) отримаємо, що на кожному інтервалі $t\in[t_i,t_{i+1}]$ різниця між швидкими розв'язками системи (1) та виродженої системи (3) оцінюється величиною

$$\|y(t,x_i,y_i)-h(t,x_i,y_i)\| \le \varepsilon\beta(\Delta)=C\sqrt{\varepsilon}. \tag{13}$$

Зафіксуємо довільний момент часу $t\in[0,T]$, для якого знайдеться відрізок $[t_k,t_{k+1})$ такий, що $t\in[t_k,t_{k+1})$. При цьому k буде найбільшим значенням номеру, при якому $t_k\le t$, при цьому буде

$$k\Delta\le T=L/\varepsilon,\quad \varepsilon k\Delta\le L. \tag{14}$$

Повернемося до виразу (9). Враховуючи, що $t\in[t_k,t_{k+1})$ отримаємо, що

$$\varepsilon\left\|\int_0^t[f(s,x(s),y(s,x_0,y_0),u_0)-f_0(x(s),u_0)]ds\right\|=\varepsilon\left\|\int_0^{t_k}[f(s,x(s),y(s,x_0,y_0),u_0)-\right.$$
$$\left.-f_0(x(s),u_0)]ds\right\|+\varepsilon\left\|\int_{t_k}^t[f(s,x(s),y(s,x_0,y_0),u_0)-f_0(x(s),u_0)]ds\right\|. \tag{15}$$

В (15) оцінимо другий доданок. При виконанні умови 1) теореми отримаємо

$$\varepsilon\left\|\int_{t_k}^t[f(s,x(s),y(s,x_0,y_0),u_0)-f_0(x(s),u_0)]ds\right\| \le \varepsilon\left\|\int_{t_k}^t f(s,x(s),y(s,x_0,y_0),u_0)ds\right\|+$$

$$+\varepsilon \left\| \int_{t_k}^{t} f_0 \left(x \left(s\right), u_0\right) ds \right\| \leq \varepsilon M \Delta + \varepsilon M \Delta = 2\varepsilon \Delta M. \tag{16}$$

Перший доданок у (15) перетворимо наступним чином

$$\varepsilon \left\| \int_0^{t_k} \left[f\left(s, x\left(s\right), y\left(s, x_0, y_0\right), u_0\right) - f_0\left(x\left(s\right), u_0\right)\right] ds \right\| \leq$$
$$\leq \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[f\left(s, x\left(s\right), y\left(s, x_0, y_0\right), u_0\right) - f_0\left(x\left(s\right), u_0\right)\right] ds \right\| \leq$$
$$\leq \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[f\left(s, x\left(s\right), y\left(s, x_0, y_0\right), u_0\right) - f\left(s, x\left(t_i\right), y\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right), u_0\right)\right] ds \right\| +$$
$$+\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[f\left(s, x\left(t_i\right), y\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right), u_0\right) - f\left(s, x\left(t_i\right), h\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right), u_0\right)\right] ds \right\| +$$
$$+\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[f\left(s, x\left(t_i\right), h\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right), u_0\right) - f_0\left(x\left(t_i\right), u_0\right)\right] ds \right\| +$$
$$+\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[f_0\left(x\left(t_i\right), u_0\right) - f_0\left(x\left(s\right), u_0\right)\right] ds \right\|, \tag{17}$$

у якому оцінимо послідовно кожний доданок. Для першого доданку у (17) при виконанні умови 1) теореми та співвідношень (14) отримаємо

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[f\left(s, x\left(s\right), y\left(s, x_0, y_0\right), u_0\right) - f\left(s, x\left(t_i\right), y\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right), u_0\right)\right] ds \right\| \leq$$
$$\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda \left(\left\|x\left(s\right) - x\left(t_i\right)\right\| + \left\|y\left(s, x_0, y_0\right) - y\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right)\right\|\right) ds \leq$$
$$\leq \varepsilon \lambda \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon M \Delta ds + \varepsilon \lambda \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\|y\left(s, x_0, y_0\right) - y\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right)\right\| ds \leq$$
$$\leq \varepsilon \lambda \cdot k \Delta \varepsilon \cdot M \Delta + 0 \leq \varepsilon \Delta \lambda L M. \tag{18}$$

Для другого доданку у (17) при виконанні умови 1) теореми та співвідношень (13) і (14) отримаємо

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[f\left(s, x\left(t_i\right), y\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right), u_0\right) - f\left(s, x\left(t_i\right), h\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right), u_0\right)\right] ds \right\| \leq$$
$$\leq \varepsilon \lambda \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\|y\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right) - h\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right)\right\| ds \leq \varepsilon \lambda \cdot k \Delta \varepsilon \cdot \beta\left(\Delta\right) \leq \varepsilon \beta\left(\Delta\right) \lambda L. \tag{19}$$

При виконанні умови 3) теореми існує монотонно спадаюча функція $\psi = \psi\left(\Delta\right)$ така, що $\lim\limits_{\Delta \to \infty} \psi\left(\Delta\right) = 0$, та для третього доданку у (17) буде справедливою оцінка

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[f\left(s, x\left(t_i\right), h\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right), u_0\right) - f_0\left(x\left(t_i\right), u_0\right)\right] ds \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} f\left(s, x\left(t_i\right), h\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right), u_0\right) ds - \Delta \cdot f_0\left(x\left(t_i\right), u_0\right) \right) \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon\Delta \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\Delta} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\left(s, x\left(t_i\right), h\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right), u_0\right) ds - f_0\left(x\left(t_i\right), u_0\right) \right) \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon k\Delta \cdot \psi\left(\Delta\right) \leq L\psi\left(\Delta\right). \qquad (20)$$

Для останнього доданку у (17) при виконанні умови 1) теореми та співвідношень (14) отримаємо

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f_0\left(x\left(t_i\right), u_0\right) - f_0\left(x\left(s\right), u_0\right)] ds \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|x\left(t_i\right) - x\left(s\right)\| ds \leq \varepsilon\lambda k\Delta \cdot \varepsilon M\Delta \leq \varepsilon\Delta\lambda LM. \qquad (21)$$

Враховуючи оцінки (18)–(21) для доданків з нерівності (17), отримаємо

$$\varepsilon \left\| \int_0^{t_k} [f\left(s, x\left(s\right), y\left(s, x_0, y_0\right), u_0\right) - f_0\left(x\left(s\right), u_0\right)] ds \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon\Delta\lambda LM + \varepsilon\beta\left(\Delta\right)\lambda L + L\psi\left(\Delta\right) + \varepsilon\Delta\lambda LM,$$

звідки з представлення (15) та оцінки (16) отримаємо оцінку для інтегралу (9) у вигляді

$$I = \varepsilon \left\| \int_0^{t} [f\left(s, x\left(s\right), y\left(s, x_0, y_0\right), u_0\right) - f_0\left(x\left(s\right), u_0\right)] ds \right\| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon\Delta\lambda LM + \varepsilon\beta\left(\Delta\right)\lambda L + L\psi\left(\Delta\right) + 2\varepsilon\Delta M = 2\varepsilon\Delta M\left(1 + \lambda L\right) + \varepsilon\beta\left(\Delta\right)\lambda L + L\psi\left(\Delta\right). \qquad (22)$$

Оцінка різниці розв'язків системи (1) та відповідної до неї усередненої системи (5) за повільними змінними, враховуючи нерівність (8) та оцінку (22), має вигляд $\|x\left(t\right) - z\left(t\right)\| \leq 2\varepsilon\Delta M\left(1 + \lambda L\right) + \varepsilon\beta\left(\Delta\right)\lambda L + L\psi\left(\Delta\right) + 2\varepsilon\lambda K + \varepsilon\lambda \int_0^t \|x\left(s\right) - z\left(s\right)\| ds$, звідки за лемою Гронуолла-Беллмана отримаємо

$$\|x(t) - z(t)\| \leq (2\varepsilon\Delta M(1 + \lambda L) + \varepsilon\beta(\Delta)\lambda L + L\psi(\Delta) + 2\varepsilon\lambda K) \cdot e^{\lambda L}. \qquad (23)$$

З означення (11) маємо, що $\Delta \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, звідки $\varepsilon\Delta \leq \sqrt{\varepsilon}$. З означення функції $\beta = \beta\left(t\right)$ в (10) та її властивостей маємо, що $\varepsilon\beta\left(\Delta\right) = C\sqrt{\varepsilon}$, де C — деяка стала, тоді частина виразу у нерівності (23) задовольняє властивість $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sqrt{\varepsilon}\left(2M\left(1 + \lambda L\right) + C\lambda L\right) \cdot e^{\lambda L} = 0$, тому для будь-якого $\eta_1 > 0$ знайдеться $\varepsilon_1\left(\eta_1\right) > 0$ таке, що для усіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ буде

$$\sqrt{\varepsilon}\left(2M\left(1 + \lambda L\right) + C\lambda L\right) \cdot e^{\lambda L} \leq \eta_1, \qquad (24)$$

звідки визначимо, що ε_1 можна узяти рівним

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{\eta_1}{\left(2M\left(1 + \lambda L\right) + C\lambda L\right) \cdot e^{\lambda L}} \right)^2. \qquad (25)$$

З означення (11) та властивостей функцій $\lim\limits_{\Delta\to\infty}\psi(\Delta)=0$ та $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\Delta(\varepsilon)=+\infty$ отримаємо, що для будь-якого $\eta_2>0$ знайдуться $\Delta_2(\eta_2)>0$ та відповідно

$$\varepsilon_2=(1/\Delta_2)^2 \tag{26}$$

такі, що для усіх $\Delta\geq\Delta_2$ та відповідно $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$ виконується нерівність

$$L\psi(\Delta(\varepsilon))\cdot e^{\lambda L}\leq\eta_2. \tag{27}$$

Далі, останній доданок у нерівності (23) задовольняє властивість $\lim\limits_{\varepsilon\to0}2\varepsilon\lambda K\cdot e^{\lambda L}=0$, тому для будь-якого $\eta_3>0$ знайдеться $\varepsilon_3(\eta_3)>0$ таке, що для усіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_3]$ буде

$$2\varepsilon\lambda K\cdot e^{\lambda L}\leq\eta_3, \tag{28}$$

звідки визначимо, що ε_3 можна узяти рівним

$$\varepsilon_3=\eta_3/(2\lambda K\cdot e^{\lambda L}). \tag{29}$$

Враховуючи отримані оцінки (24), (27), (28), для будь-якого $0<\eta<\rho$ та $L>0$ оберемо значення $\eta_1>0$, $\eta_2>0$ та $\eta_3>0$ такі, що $\eta_1+\eta_2+\eta_3\leq\eta$. За ними обчислюючи значення (25), (26) та (29) визначимо $\varepsilon_0=\min\{\varepsilon_1;\varepsilon_2;\varepsilon_3\}$ таке, що для усіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ та $t\in[0,T]$, $T=L\varepsilon^{-1}$ з нерівності (23) буде $\|x(t)-z(t)\|\leq\eta<\rho$.

Отримана оцінка $\|x(t)-z(t)\|<\rho$ для усіх $t\in[0,T]$ означає, що для будь-якого допустимого керування $u(t)$ та розв'язку $x(t)$, $y(t)$ системи (1) відповідний до цього ж керування розв'язок $z(t)$ усередненої системи (5) знаходиться у ρ-околі розв'язку $x(t)$ системи (1) і не виходить на границу множини D_x ні для якого моменту часу. Тому обране керування $u(t)$ системи (1) дійсно є допустимим і для системи (5). Тобто, для усіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ та $t\in[0,T]$ справедливою є оцінка (7). Перша частина теореми доведена.

Доведення другої частини теореми проводиться аналогічно. При цьому отримана оцінка $\|x(t)-z(t)\|<\rho$ для усіх $t\in[0,T]$ означає, що для будь-якого допустимого керування $v(t)$ та розв'язку $z(t)$ усередненої системи (5) відповідний до цього ж керування розв'язок $x(t)$ системи (1) знаходиться у ρ-околі розв'язку $z(t)$ усередненої системи (5), яка у наслідок виконання умови 4) теореми повністю належить множині D_x. Тому обране допустиме керування $v(t)$ усередненої системи (5) дійсно є допустимим і для системи (1). Тобто, для усіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ та $t\in[0,T]$ справедливою є оцінка (7). □

5. Знаходження асимптотично оптимального розв'язку задачі. Встановимо відповідність між оптимальним розв'язком задачі (1), (2) та оптимальним розв'язком усередненої задачі (5), (6), якщо такі розв'язки існують.

Теорема 2. *Нехай для задач оптимального керування (1), (2) та (5), (6) на множині $Q=\{t\geq0, x\in D_x\subset\mathbb{R}^n, y\in D_y\subset\mathbb{R}^m, u\in U\subset\mathbb{R}^r\}$ виконуються умови теореми 1. Крім того:*

5) функція $\Phi(x)$ — задовольняє умову Липшица за змінною x зі сталою λ;

6) існує оптимальне керування $v^*(t)\in U$ усередненої задачі (5), (6).

Тоді оптимальний розв'язок усередненої задачі (5), (6) є асимптотично оптимальним розв'язком задачі (1), (2), тобто для будь-яких $\eta>0$ та $L>0$ існує таке $\varepsilon_0(\eta,L)>0$, що для усіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ та $t\in[0,T]$ справедливими є оцінки

$$|J_0^*-J^*|\leq\eta;\quad J[v^*]-J^*\leq\eta, \tag{30}$$

де J_0^* *и* J^* *— оптимальні значення критеріїв якості усередненої задачі (5), (6) і задачі (1), (2) відповідно,* $J[v^*]$ *— значення критерію якості задачі (1), (2) на оптимальному керуванні усередненої задачі.*

Доведення. Задача оптимального керування (1), (2) є нелінійною, а допустимі керування задачі повинні задовольняти умови означення 1. Тому керування, на якому критерій якості досягає свого мінімального значення, може: 1) існувати єдине; 2) існувати не єдине; 3) не існувати. Однак само оптимальне значення критерію якості J^* задачі (1), (2) завжди існує та скінченне ([21, 23]).

Якщо оптимальне керування задачі (1), (2) існує єдине, то його і візьмемо у якості $u^*(t)$, на якому критерій приймає мінімальне значення $J^* = J[u^*(t)] = \min\limits_{u \in U} J[u(t)]$.

Якщо оптимальне керування задачі (1), (2) не єдине, то будь-яке з них можна взяти у якості $u^*(t)$, при цьому $J^* = J[u^*(t)] = \min\limits_{u \in U} J[u(t)]$.

Однак, якщо оптимальне керування задачі (1), (2) не існує, то знайдеться деяке допустиме керування $u^o(t)$ таке, що $J[u^o] - J^* \leq \eta/2$, яке назвемо η-оптимальним та візьмемо у якості керування $u^*(t)$, при цьому $J^* = \inf\limits_{u \in U} J[u(t)]$.

При виконанні умов теореми обране керування $u^*(t)$ задачі (1), (2) є допустимим керуванням для задачі (5), (6). Тому, для будь-яких $\eta_0 > 0$ та $L > 0$ існує $\varepsilon_0(\eta_0, L) > 0$ таке, що для усіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ та $t \in [0, T]$ відповідна до цього керування траєкторія $\tilde{z}(t)$, $\tilde{z}(0) = x^*(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$ усередненої системи (5) задовольняє нерівність $\|x^*(t) - \tilde{z}(t)\| \leq \eta_0$.

Нерівність виконується для будь-якого $t \in [0, T]$, тому і для $t = T$, тобто при виконанні умови 5) теореми, буде

$$|J^* - \tilde{J}_0| = |J[u^*(t)] - J_0[u^*(t)]| = |\varphi(x^*(T)) - \varphi(\tilde{z}(T))| \leq \lambda \|x^*(T) - \tilde{z}(T)\| \leq \lambda\eta_0 = \eta. \quad (31)$$

Аналогічно, існуюче за умовою 6) теореми оптимальне керування $v^*(t)$ задачі (5), (6) є допустимим керуванням для задачі (1), (2). Тому, відповідна до цього ж керування траєкторія $\tilde{x}(t)$, $\tilde{x}(0) = z^*(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$ системи (1) задовольняє нерівність $\|z^*(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \eta_0$. та відповідно,

$$\begin{aligned} |J_0^* - \tilde{J}| = |J_0[v^*(t)] - J[v^*(t)]| = \\ = |\varphi(z^*(T)) - \varphi(\tilde{x}(T))| \leq \lambda \|z^*(T) - \tilde{x}(T)\| \leq \lambda\eta_0 = \eta. \end{aligned} \quad (32)$$

Для оптимальних значень критеріїв якості (2) та (6) справедливі нерівності

$$J^* \leq \tilde{J}, \quad J_0^* \leq \tilde{J}_0 \quad (33)$$

та одне з відношень

$$J^* \geq J_0^* \quad \text{або} \quad J^* < J_0^*. \quad (34)$$

У першому випадку з нерівностей (33), (34), (32) буде $\tilde{J} \geq J^* \geq J_0^* \geq \tilde{J} - \eta$, звідки $|J_0^* - J^*| \leq \eta$. У другому випадку з нерівностей (33), (34), (31) буде $\tilde{J}_0 \geq J_0^* > J^* \geq \tilde{J}_0 - \eta$, звідки $|J_0^* - J^*| \leq \eta$.

Тому, в обох випадках вірним буде перша нерівність з (30). Виконання другої нерівності з (30) виходить з (32) та отриманої нерівності. □

Приклад. Розглянемо задачу керування, що описується системою диференціальних рівнянь зі швидкими та повільними змінними

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon\left[(y_2 - y_1)\, x_2 + (1 + \sin t) \cos u\right], & x_1(0) = x_1^0; \\ \dot{x}_2 = \varepsilon\left[e^{-t} y_2 x_1 + (0.5 + \cos t) \sin u\right], & x_2(0) = x_2^0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + 1, & y_1(0) = 0; \\ \dot{y}_2 = y_1, & y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок виродженої задачі $\begin{cases} h_1(t) = 0.5e^t - 0.5e^{-t}; \\ h_2(t) = 0.5e^t + 0.5e^{-t} - 1. \end{cases}$

Проводячи усереднення правих частин рівнянь повільної підсистеми вздовж розв'язків виродженої задачі, отримаємо наступну усереднену задачу керування

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \varepsilon\left[-z_2 + \cos u\right], & z_1(0) = x_1^0; \\ \dot{z}_2 = \varepsilon\left[0.5 z_1 + 0.5 \sin u\right], & z_2(0) = x_2^0. \end{cases}$$

У якості допустимого керування оберемо $u = e^{-t}$. Порівняємо розв'язки усередненої системи та даної системи за повільними змінними на цьому керуванні. Для цього візьмемо $L = 1$ та початкові умови для повільних змінних $x_1 = 1.0$, $x_2 = -0.5$.

Результати обчислень на різних значеннях малого параметру ε занесемо у таблицю, при цьому отримаємо значення N — кількість виконаних кроків чисельного інтегрування даної системи, а N_0 — кількість виконаних кроків чисельного інтегрування усередненої системи у повільному часі.

ε	N	N_0	$\max\lvert x_1 - z_1\rvert$	$\max\lvert x_2 - z_2\rvert$	$\max\lVert x - z\rVert$
0.1	1 000	3	0.1619	0.0628	0.1737
0.05	2 000	6	0.1131	0.0196	0.1148
0.03	3 333	10	0.0623	0.0074	0.0628
0.01	10 000	31	0.0316	0.0032	0.0484

Порівнюючи отримані результати можна зробити висновок, що при зменшенні значення малого параметру зменшується і різниця між розв'язками даної та усередненої задач. При цьому кількість обчислень, необхідних для отримання результату в усередненій задачі значно менше завдяки переходу до повільного часу та чисельному інтегруванню на скінченному інтервалі часу.

6. Висновки. Нелінійні задачі оптимального керування, які містять швидкі та повільні змінні, досить складні для дослідження, потребують багато часу для отримання результату за допомогою чисельних методів. Крім того, умови, які накладаються на допустимі керування, дуже суворі. Тому застосування до таких задач методу усереднення суттєво спрощує процес отримання результату.

Усереднення заданої нелінійної задачі здійснюється за часом, що явно входить у праві частини системи, вздовж швидких розв'язків виродженої задачі, вважаючи керування u параметром. При розв'язуванні усередненої системи розглядаються ті ж керування, що і для заданої системи. Таким чином, множина керувань U для заданої та усередненої систем співпадає, при цьому не вимагається, щоб множина U була компактом на відміну з вимогами у роботах [16–18].

Отримана усереднена задача оптимального керування потребує меньше часу для її розв'язування, а оптимальне керування усередненої задачі може бути узято у якості асимптотично оптимального керування заданої задачі. При цьому відповідні траєкторії та значення критеріїв якості є асимптотично близькими.

ЛІТЕРАТУРА

1. Volosov V.M. *Averaging in systems of ordinary differential equations*// Uspehi Mat. Nauk. – 1962. – №6. – P. 3–126. (in Russian)
2. Volosov V.M., Morgunov B.I. Averaging method in the teory of nonlinear oscilation systems. – Moscow: Moscow University, 1971. (in Russian)
3. Mitropolsky Yu.A. Averaging method in nonlinear machanics. – Kiev: Naukova Dumka, 1971. (in Russian)
4. Mitropolsky Yu.A., Homa G.P. Mathematical background of nonlinear mechanics asymptotic methods. – Kiev: Naukova Dumka, 1983. (in Russian)
5. Mitropolsky Yu.A., Samoilenko A.M. *On the question of asymptotic expansion in nonlinear mechanics*// Ukr. Math. Journal. – 1979. – №1. – P. 42–53. (in Russian)
6. Filatov A.N. Averaging methods for differential and integrodifferential equations. – Tashkent: FAN, 1971. (in Russian)
7. Filatov A.N. Asymptotic methods in theory of differential and integrodifferential equations. – Tashkent: FAN, 1974. (in Russian)
8. Bainov D.D., Konstantinov M.M., Milusheva S.D. *A boundary-value problem for systems of differential equations with fast and slow variables*// Ukr. Math. Journal. – 1980. – V.32, №3. – P. 301–313. (in Russian)
9. Khapaev M.M. Averaging in stability theory – Moscow: Nauka, 1986. (in Russian)
10. Khapaev M.M. Asymptotic methods and stability in nonlinear oscillation theory. – Moscow: Vyshaya Shkola, 1988. (in Russian)
11. Khapaev M.M. Averaging and stability. – Moscow: Znanie, 1991. (in Russian)
12. Moiseev N.N. Asymptotic methods in nonlinear mechanics. – Moscow: Nauka, 1981. (in Russian)
13. Moiseev N.N. Some fragments of optimal systems. – Moscow: Nauka, 1975. (in Russian)
14. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B.N. Control of oscillations. – Moscow: Nauka, 1980. (in Russian)
15. Petryshyn R.I., Petryshyn Y.R. *The averaging method of solving boundary-value problems for differential equation systems with slow and fast variables*// Nonlinear Oscillations. – 1998. – №1. – P. 51–65. (in Ukranian)
16. Plotnikov V.A. The averaging method in control problems. – Kiev-Odessa: Lybid, 1992. (in Russian)
17. Plotnikov V.A., Benumerova T.V., Boitsova I.A., Kichmarenko O.D. *Averaging equations of controlled motion*// Automatics, 2000: International conference on control, Lviv, 2000, V.1. – P. 189–193. (in Russian)
18. Plotnikov V.A., Boitsova I.A. *Averaging in problems of the optimal control of systems with fast and slow variables*// Problems of control and information. – 2000. – №5. – P. 152–156. (in Russian)
19. Samoilenko A.M., Stanzhitsky A.N. *On averaging differential equations on an infinite interval*// Differential Equations. – 2006. – V.42, №4. – P. 476–482. (in Russian)
20. Dobrodzii T.V. *An averaging method for periodic system control problems*// Nonlinear Oscillations. – 2010. – V.13, №2. – P. 147–154. (in Ukranian)
21. Stanzhitsky A.N., Dobrodzii T.V. *Study of optimal control problems on the half-line by the averaging method*// Differential Equations. – 2011. – V.47, №2. – P. 264–277. (in Russian)
22. Boitsova I.A. *Averaging in optimal control problem with fast and slow variables and linear control*// Bukovynsky Math. Journal. – 2015. – V.3, №1. – P. 7–15. (in Ukranian)
23. Lee E.B., Markus L. Foundations of optimal control theory. – Moscow: Nauka, 1972. (in Russian)

Odessa I.I.Mechnikov National University
boitsova.irina@mail.ru

Надійшло 30.01.2015
Після переробки 27.09.2015