УДК 517.5

Р. Р. Салимов

О НОВОМ УСЛОВИИ КОНЕЧНОЙ ЛИПШИЦЕВОСТИ КЛАССОВ ОРЛИЧА-СОБОЛЕВА

R. R. Salimov. *On a new condition of finite Lipschitz of Orlicz-Sobolev class*, Mat. Stud. **44** (2015), 27–35.

It is found a new sufficient condition of finite Lipschitz in terms of inner dilation for homeomorphisms of the Orlicz-Sobolev class $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ under a condition of the Calderon type on φ.

Р. Р. Салимов. *О новом условии конечной липшицевости классов Орлича-Соболева* // Мат. Студії. – 2015. – Т.44, №1. – С.27–35.

Найдено новое достаточное условие конечной липшицевости в терминах внутренней дилатации для гомеоморфизмов класса Орлича-Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ при наличии условия типа Кальдерона на φ.

1. Введение. В статье изучается локальное поведение пространственных гомеоморфизмов класса Орлича-Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$, с использованием модульной техники. На этой основе решена проблема, восходящая к Герингу, см. теорему 3 в [1], о локальной липшицевости. В данной работе установлено новое достаточное условие конечной липшицевости класса Орлича-Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ при условии типа Кальдерона на функцию φ в терминах внутренней дилатации. Построен пример гомеоморфизма, показывающий необходимость найденного условия.

Напомним некоторые определения. Борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, пишут $\rho \in \mathrm{adm}\Gamma$, если

$$\int_\gamma \rho(x)ds \geqslant 1 \tag{1}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Пусть $p \geqslant 1$. Тогда *p-модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho\in \mathrm{adm}\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)dm(x). \tag{2}$$

Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $n-1<p<n$ и

$$M_p(f\Gamma) \leqslant K M_p(\Gamma) \tag{3}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30C65, 30C75.
Keywords: p-moduli of the families of curves; p-moduli of the families of surfaces; mappings of finite distortion; Sobolev classes; Orlicz–Sobolev classes; local Lipschitz; finite Lipschitz.
doi:10.15330/ms.44.1.27-35

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D. При предположении, что f в (3) является гомеоморфизмом, Герингом было установлено, что отображение f является *локально липшицевым*, другими словами, для всех $x_0 \in D$ справедлива оценка

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leqslant K^{\frac{1}{n-p}}, \tag{4}$$

см., напр., теорему 2 в [1].

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Напомним, что гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением*, если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K(x) \cdot J(x, f) \tag{5}$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x) \geqslant 1$, где $f'(x)$ якобиева матрица f, $\|f'(x)\|$ — её операторная норма: $\|f'(x)\| = \sup\limits_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$ и $J(x, f) = \det f'(x)$ — якобиан отображения f.

Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f \in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [2], см. также [3].

Пусть $p > n - 1$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$. Ранее, см., например, [4], для формулировки условия конечной липшицевости классов отображений с конечным искажением мы пользовались *p-внешней дилатацией*

$$K_{O,p}(x, f) = \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^p}{|J(x,f)|}, & \text{если } J(x, f) \neq 0;\\ 1, & \text{если } f'(x) = 0;\\ \infty, & \text{в остальных точках.} \end{cases} \tag{6}$$

В данной работе мы устанавливаем усиление соответствующих результатов в терминах *α-внутренней дилатации*

$$K_{I,\alpha}(x, f) = \begin{cases} \frac{|J(x,f)|}{l^{\alpha}(f'(x))}, & \text{если } |J(x, f)| \neq 0;\\ 1, & \text{если } f'(x) = 0;\\ \infty, & \text{в остальных точках,} \end{cases} \tag{7}$$

где $l(f'(x)) = \min\limits_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$. Для этого заметим, что

$$K_{I,n}(x, f) \leqslant K^{n-1}_{O,n}(x, f)\ , \tag{8}$$

см., напр., раздел 1.2.1 в [5].

Из соотношения (8) легко следует неравенство

$$K_{I,\alpha}(x, f) \leqslant K^{\alpha-1}_{O,p}(x, f). \tag{9}$$

Действительно,

$$K_{I,\alpha}(x, f) = K^{\frac{\alpha}{n}}_{I,n}(x, f)|J^{1-\frac{\alpha}{n}}(x, f)| \leqslant K^{\frac{\alpha(n-1)}{n}}_{O,n}(x, f)|J^{1-\frac{\alpha}{n}}(x, f)| = K^{\alpha-1}_{O,p}(x, f). \tag{10}$$

Известно, что $K_{I,2} = K_{O,2}$ при $n = 2$, но при $n \geqslant 3$ в (8) может иметь место строгое неравенство, как это показывает элементарный пример сжатия вдоль одной из осей.

Следуя Орличу, для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$, обозначим символом L^{φ} пространство всех функций $f\colon D\to\mathbb{R}$, таких что

$$\int_D \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dm(x) < \infty \tag{11}$$

при некотором $\lambda>0$, см., напр., [6]. Здесь m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пространство L^{φ} называется *пространством Орлича.*

Классом Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f, заданных в D, с первыми обобщёнными производными по Соболеву, градиент ∇f которых принадлежит классу Орлича локально в области D. Если же, более того, ∇f принадлежит классу Орлича в области D, мы пишем $f\in W^{1,\varphi}(D)$. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\rm loc}\subset W^{1,1}_{\rm loc}$. Как обычно, мы пишем $f\in W^{1,p}_{\rm loc}$, если $\varphi(t)=t^p$, $p\geqslant 1$. Известно, что непрерывная функция f принадлежит классу $W^{1,p}_{\rm loc}$ тогда и только тогда, когда $f\in ACL^p$, т.е., если f локально абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, а первые частные производные f локально интегрируемы в степени p в области D, см. [7], разд. 1.1.3.

Далее, если f — локально интегрируемая вектор–функция n вещественных переменных $x_1,\ldots,x_n$, $f=(f_1,\ldots,f_m)$, $f_i\in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i\in\{1,\ldots,m\}$, и

$$\int_D \varphi\left(|\nabla f(x)|\right) dm(x) < \infty, \quad |\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}, \tag{12}$$

то мы снова пишем $f\in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$. Мы также используем обозначение $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в случае более общих функций φ, чем в классах Орлича, всегда предполагающих выпуклость функции φ и ее нормировку $\varphi(0)=0$.

Следующие свойства классов Орлича-Соболева можно найти в работе [10].

Предложение 1. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое отображение класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$, где $\varphi\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неубывающая функция, такая что для некоторого $t_*\in(0,\infty)$*

$$\int_{t_*}^{\infty}\left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{13}$$

Тогда отображение f имеет почти всюду полный дифференциал в Ω.

Замечание 1. В частности, заключение теоремы 1 имеет место, если $f\in W^{1,q}_{\rm loc}$ при некотором $q>n-1$. Последнее утверждение — результат Вяйсяля, см. лемму 3 в [11]. Теорема 1 является также распространением в пространство хорошо известной теоремы Меньшова-Геринга-Лехто на плоскости, см., напр., [13], [14] и [15].

Предложение 2. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое отображение класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$, где $\varphi\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию (13). Тогда отображение f имеет почти всюду полный дифференциал в Ω.*

Предложение 3. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию (13). Тогда любое непрерывное отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ обладает (N)-свойством, более того, локально абсолютно непрерывно относительно $(n-1)$-мерной хаусдорфовой меры на почти всех гиперплоскостях $\mathcal{P}$, параллельных произвольной фиксированной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$. Кроме того, на почти всех таких $\mathcal{P}$, $H^{n-1}(f(E)) = 0$, если $|\nabla f| = 0$ на $E \subset \mathcal{P}$.*

Заметим, что, если условие вида (13) имеет место для некоторой неубывающей функции φ, то функция $\varphi_c(t) = \varphi(ct)$ при $c > 0$ также удовлетворяет соотношению (13). Кроме того, хаусдорфовы меры являются квазиинвариантными при квазиизометриях.

Предложение 4. *При условии (13) любое непрерывное отображение $f \in W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ обладает (N)-свойством относительно $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа, более того, локально абсолютно непрерывно на почти всех сферах S с центром в заданной предписанной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, на почти всех таких сферах S выполнено условие $H^{n-1}(f(E)) = 0$ как только $|\nabla f| = 0$ на множестве $E \subset S$.*

2. Взаимосвязь нижних и кольцевых Q-гомеоморфизмов. Пусть $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая функция. Для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\fint_E Q(x)dm(x) = \frac{1}{m(E)} \int_E Q(x)dm(x).$$

Напомним следующие термины. Пусть $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольные множества. Обозначим через $\Delta(E,F;D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$. Пусть $x_0 \in D$, $d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$ и $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция.

Всюду далее $B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n = B(0,1)$, $B(r) = B(0,r)$ и $S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| = r\}$.

Для любых r_1 и r_2, где $0 < r_1 < r_2 < \infty$, обозначим

$$R(x_0,r_1,r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon r_1 < |x - x_0| < r_2\}, \quad S_i = S(x_0,r_i), \quad i \in \{1,2\}.$$

Будем говорить, что гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке* $x_0 \in D$, $p > 1$, если соотношение

$$M_p\left(\Delta\left(fS_1, fS_2; fD\right)\right) \leqslant \int_{R(x_0,r_1,r_2)} Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|)\ dm(x) \tag{14}$$

выполнено для любого кольца $R(x_0,r_1,r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$ и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1,r_2) \to [0,\infty]$, такой, что $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r)\ dr \geqslant 1$. Говорят, что гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в области D*, если условие (14) выполнено для всех точек $x_0 \in D$.

Для непрерывного отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ и $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, положим

$$L(x,f) = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}.$$

Говорят, что отображение f является *конечно липшицевым*, если $L(x,f) < \infty$ для всех $x \in D$.

Следующее утверждение см. напр., в [17], лемма 1 или в [9], лемма 3.3.

Лемма 1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $Q\colon D \to [0,\infty]$ — локально интегрируемая функция и $f\colon D \to D'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в точке $x_0 \in D$ с условием*

$$Q_0 = \limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)dm(x) < \infty.$$

Тогда при $n-1<p<n$ имеем

$$L(x_0,f) = \limsup_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leqslant \lambda_{n,p} Q_0^{\frac{1}{n-p}},$$

где $\lambda_{n,p}$ — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Ниже приведен результат о конечной липшицевости кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля, см. напр., теорему 2 в [17] или теорему 3.5 в [9].

Предложение 5. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $Q\colon D \to [0,\infty]$ — локально интегрируемая функция и $f\colon D \to D'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $n-1<p<n$ с условием*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)dm(x) < \infty \qquad \forall x_0 \in D.$$

Тогда гомеоморфизм f является конечно липшицевым.

В дальнейшем, мы придерживаемся следующих стандартных соглашений: $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$ и $a/0 = \infty$ для $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$, см., напр., [18], §3, гл. I.

Говорят, см. [12], разд. 9.2, что измеримая по Лебегу функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ является *обобщённо p-допустимой* для семейства Γ, состоящего из $(n-1)$-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in \operatorname{ext}_p \operatorname{adm} \Gamma$, если

$$\int_S \rho^{n-1}(x) d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{15}$$

для p-почти всех $S \in \Gamma$.

Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, $Q\colon D \to (0,\infty)$ измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ будем называть *нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке x_0*, если

$$M_p\left(f\Sigma_R\right) \geqslant \inf_{\rho \in \mathrm{ext_p adm}\Sigma_R} \int_R \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{16}$$

для каждого кольца $R = R(x_0,r_1,r_2), 0<r_1<r_2<d_0$, где $d_0 = \operatorname{dist}(x_0,\partial D)$, а Σ_R обозначает семейство всех сфер $S(x_0,r),\ r \in (r_1,r_2)$.

Следующее утверждение может быть найдено в работе [16], см. также теорему 3.8 в монографии [9].

Предложение 6. *В $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, всякий нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля $f\colon D \to D'$ в точке $x_0 \in D$, при $p > n-1$, $Q \in L^{\alpha-1}_{\mathrm{loc}}(D)$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$ является кольцевым Q_*-гомеоморфизмом относительно α-модуля в D с $Q_* = Q^{\alpha-1}$.*

3. Взаимосвязь нижних Q-гомеоморфизмов с классами Орлича-Соболева. Напомним, что отображение $g\colon X \to Y$ между метрическими пространствами X и Y называется *липшицевым,* если $\mathrm{dist}\,(g(x_1), g(x_2)) \leqslant M \cdot \mathrm{dist}\,(x_1, x_2)$ для некоторой постоянной $M < \infty$ и всех x_1, $x_2 \in X$. Говорят, что отображение $g\colon X \to Y$ *билипшицево,* если, оно, во-первых, липшицево, во-вторых, $M^* \cdot \mathrm{dist}\,(x_1, x_2) \leqslant \mathrm{dist}\,(g(x_1), g(x_2))$ для некоторой постоянной $M^* > 0$ и всех x_1, $x_2 \in X$.

Следующее утверждение является ключевым для дальнейшего исследования.

Теорема 1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию (13) и $p > n-1$. Тогда любой гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ является нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля с $Q = K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$.*

Доказательство. Обозначим через B (борелево) множество всех точек $x \in D$, где отображение f имеет полный дифференциал и $J_f(x) = \det f'(x) \neq 0$. Заметим, что множество B представляет собой не более чем счётное объединение борелевских множеств B_l, $l \in \{1, 2, \ldots\}$, таких что отображения $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами, см., напр., в [19], лемма 3.2.2. Без ограничения общности, можно считать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также через B_* оставшееся множество всех точек $x \in D$, где f имеет полный дифференциал, однако, $f'(x) = 0$.

По предложению 2 множество $B_0 := D \setminus (B \bigcup B_*)$ имеет меру Лебега нуль. Следовательно, по теореме 9.1 в [12] имеем, что $H^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для p-почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ с центром в произвольной точке $x_0 \in D$, где "p-почти всех" определяется в смысле p-модуля семейства поверхностей. Тогда, в силу леммы 9.1 в [12], $H^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$ и по предложению 4 получаем, что $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) = 0$ и $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$, где $S_r^* = f(S_r)$.

Заметим, что также $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) = 0$ и $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) = 0$ для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ в смысле p-модуля семейства поверхностей. Действительно, пусть Γ_0 — подсемейство всех сфер $S_r := S(x_0, r)$, для которых либо $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) > 0$, либо $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) > 0$. Обозначим через R множество всех $r \in \mathbb{R}$, для которых либо $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) > 0$, либо $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) > 0$. В силу сказанного выше, $m_1(R) = 0$. Тогда по теореме Фубини $m(E) = 0$, где $E = \{x \in D\colon |x - x_0| = r \in R\}$. Функция $\rho_1\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, определённая символом ∞ при $x \in E$ и равная нулю на оставшемся множестве обобщенно p-допустима для семейства Γ_0. Таким образом, по (9.18) в [12] $M_p(\Gamma_0) \leqslant \int_E \rho_1^p dm(x) = 0$, т.е., действительно, $M_p(\Gamma_0) = 0$.

По теореме Кирсбрауна, см. [19], теорема 2.10.43, каждое отображение f_l может быть продолжено до липшицевого отображения $\widetilde{f_l}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которое по теореме Радемахера-Степанова $\widetilde{f_l}$ дифференцируемо почти всюду в $\mathbb{R}^n$, см. [19, теорема 3.1.6]. В силу единственности аппроксимативного дифференциала (см. [19, пункт 3.1.2]), можно считать, что при всех $x \in B_l$ выполнено равенство $\widetilde{f_l}'(x) = f'(x)$.

Пусть Γ обозначает семейство всех сфер S_r, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$. Для произвольной функции $\rho_* \in \mathrm{adm} f(\Gamma)$, такой что $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне D и на B_0, и $\rho(x) := \Lambda(x) \cdot \rho_*(f(x))$ при $x \in B$, где

$$\Lambda(x) = \left[\frac{J(x,f)}{l(f'(x))}\right]^{\frac{1}{n-1}} = [\ \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n]^{\frac{1}{n-1}} \ \geqslant [\ J_{n-1}(x)]^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{для п.в. } x \in B;$$

здесь $\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1$ — главные дилатационные коэффициенты $f'(x)$, см., напр., раздел I.4.1 в [5], и $J_{n-1}(x)$ — $(n-1)$-мерный якобиан $f|_{S_r}$ в точке x, где $r = |x - x_0|$, см. раздел 3.2.1 в [19].

Рассуждая покусочно на каждом B_l, $l \in \{1, 2, \ldots\}$, и учитывая теорему Кирсбрауна, по теореме 3.2.5 о замене переменных в [19] имеем, что

$$\int_{S_r} \rho^{n-1} d\mathcal{A} = \int_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \frac{J(x,f)}{l(f'(x))J_{n-1}(x)} J_{n-1}(x) d\mathcal{A} \geqslant \int_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) J_{n-1}(x) d\mathcal{A} \geqslant 1$$

для p-п.в. S_r и, таким образом, $\rho \in \mathrm{ext_p adm}\Gamma$.

Используя замену переменных на каждом B_l, $l \in \{1, 2, \ldots\}$, см., напр., теорему 3.2.5 в [19], и счетную аддитивности интеграла, получаем оценку

$$\int_D \frac{\rho^p(x)}{K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}(x,f)} dm(x) \leqslant \int_{f(D)} \rho_*^p(x) dm(x),$$

где $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$. □

Следствие 1. *Любой гомеоморфизм с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, класса $W^{1,q}_{\mathrm{loc}}$ при $q > n - 1$ является нижним $K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}$-гомеоморфизмом относительно p-модуля при $p > n - 1$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$.*

Комбинируя теорему 1 и предложение 6, приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию (13) и $p > n-1$. Тогда любой гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ с $K_{I,\alpha} \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно α-модуля, где $Q = K_{I,\alpha}$.*

Следствие 2. *Пусть $n \geqslant 3$, $p > n-1$ и $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$. Тогда любой гомеоморфизм с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, класса $W^{1,q}_{\mathrm{loc}}$ при $q > n-1$ и $K_{I,\alpha} \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно α-модуля с $Q = K_{I,\alpha}$.*

4. Конечная липшицевость классов Орлича-Соболева. В этом разделе установлено свойство конечной липшицевости для гомеоморфизмов с конечным искажением класса Орлича-Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ при наличии условия типа Кальдерона на φ.

Комбинируя лемму 1 и теорему 2, приходим к следующему результату.

Теорема 3. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Предположим, что $f\colon D \to D'$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, где $\varphi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию (13) и, кроме того, при $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$*

$$k_\alpha(x_0) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} K_{I,\alpha}(x,f) dm(x) < \infty\ , \quad \alpha = \frac{p}{p-n+1}. \tag{17}$$

Тогда

$$L(x_0,f) = \limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leqslant c_{n,p} \cdot k_\alpha^\gamma(x_0) < \infty, \tag{18}$$

где $\gamma = \frac{p-n+1}{(p-n)(n-1)}$ и $c_{n,p}$ — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Следствие 3. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Предположим, что $f\colon D \to D'$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ с условием (13) и, кроме того, при $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} K_{I,\alpha}(x,f)dm(x) < \infty, \quad \alpha = \frac{p}{p-n+1} \quad \forall x_0 \in D. \tag{19}$$

Тогда гомеоморфизм f является конечно липшицевым.

Замечание 2. В соответствии с леммой 10.6 в [12] конечно липшицевые отображения обладают N-свойством относительно хаусдорфовых мер и, таким образом, являются абсолютно непрерывными на кривых и поверхностях.

Построим пример гомеоморфизма с конечным искажением, не являющегося конечно липшицевым.

Пример. Предположим, что $n \geqslant 3$ и $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$. Пусть $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, где

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\left(1+(p-n)\int_{|x|}^{1} \frac{dt}{t^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}\right)^{-\frac{1}{p-n}}$$

при $x \neq 0$ и $f(0)=0$.

Отметим, что f является гомеоморфизмом класса C^1 в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$, откуда следует, что, в частности $f \in W^{1,n-\frac{1}{2}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n\setminus\{0\})$. Определим касательные и радиальные растяжения в каждой точке воспользовавшись, правилами вычисления (1.1.20) и (1.1.23) см. [20], гл. I, предложение 1.1.1. Таким образом, имеем

$$\delta_T = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{\left(1+(p-n)\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}\right)^{-\frac{1}{p-n}}}{r},$$

$$\delta_r = \frac{\left(1+(p-n)\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}\right)^{-\frac{p-n+1}{p-n}}}{r^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}.$$

Покажем, что $f \in W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n)$ с $\varphi(t)=t^{n-\frac{1}{2}}$. Действительно,

$$\int_{\overline{B}(r)} \|f'(x)\|^{n-\frac{1}{2}}dm(x) = \int_{\overline{B}(r)} \left(\frac{|f(x)|}{|x|}\right)^{n-\frac{1}{2}} dm(x) \leqslant M_r \int_{\overline{B}(r)} \frac{1}{|x|^{n-\frac{1}{2}}}dm(x) =$$
$$= \omega_{n-1}M_r\int_0^r t^{-\frac{1}{2}} = 2\omega_{n-1}M_r r^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

где $M_r = \max\limits_{\overline{B}(r)}|f(x)|$ и ω_{n-1} — площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что $\delta_T^{p-n+1} = \delta_r \ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{r}\right)$. Следовательно, имеем

$$K_{I,\alpha}(x,f) = \frac{\delta_T^{n-1}\delta_r}{\delta_r^{\frac{p}{p-n+1}}} = \frac{\delta_T^{n-1}}{\delta_r^{\frac{n-1}{p-n+1}}} = \ln\left(\frac{e}{|x|}\right), \quad \alpha = \frac{p}{p-n+1}.$$

Очевидно, что

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(\varepsilon)} K_{I,\alpha}(x,f)\,dm(x) = \infty.$$

Тем не менее, как легко проверить по правилу Лопиталя, $\frac{|f(x)|}{|x|} \to \infty$ при $x \to 0$, т.е. гомеоморфизм f не является липшицевым в нуле.

Замечание 3. Пример показывает необходимость условия (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gehring F.W. *Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space*// Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies. – 1971. – V.66. – P. 175–193.
2. Iwaniec T., Sverák V. *On mappings with integrable dilatation*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – V.118. – P. 181–188.
3. Iwaniec T., Martin G. Geometrical function theory and non-linear analysis. – Clarendon Press, Oxford, 2001.
4. Salimov R.R. *On finite Lipschitz Orlicz–Sobolev classes*// Vladikavkaz. Mat. Zh. – 2015. – V.17, №1. – P. 64–77. (in Russian)
5. Reshetnyak Yu.G. Spatial mappings with bounded distortion. – Nauka, Novosibirsk, 1982. (in Russian)
6. Krasnosel'skii M.A., Rutickii Ja.B. Convex functions and Orlicz spaces. – Problems of Contemporary Mathematics Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1958. (in Russian)
7. Mazia V.H. Sobolev spaces. – Leningrad Univ., Leningrad, 1985. (in Russian)
8. Iwaniec T., Koskela P., Onninen J. *Mappings of finite distortion: Compactness*// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2002. – V.27, №2. – P. 391–417.
9. Kovtonyuk D.A., Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. To the theory of the mappings of Sobolev and Orlicz–Sobolev classes. – Naukova Dumka, Kyiv, 2013. (in Russian)
10. Kovtonyuk D.A., Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. *Toward the theory of the Orlicz-Sobolev classes*// Algebra i Analiz. – 2013. — V.25, №6. — P. 50–102. (in Russian)
11. Väisälä J. *Two new characterizations for quasiconformality*// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1965. – V.362. – P. 1–12.
12. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *Moduli in modern mapping theory*// Springer Monographs in Mathematics. – Springer, New York etc, 2009.
13. Menchoff D. *Sur les differencelles totales des fonctions univalentes*// Math. Ann. – 1931. – V.105. – P. 75–85.
14. Gehring F.W., Lehto O. *On the total differentiability of functions of a complex variable*// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1959. – V.272. – P. 3–8.
15. Lehto O., Virtanen K. Quasiconformal mappings in the plane. – Springer–Verlag, New York, 1973.
16. Golberg A., Salimov R. *Topological mappings of integrally bounded p–moduli*// Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. — 2012. — V.3(LXI), №1. — P. 49–66.
17. Salimov R. *One property of ring Q-homeomorphisms with respect to a p-module*// Ukr. Math. Journal — 2013. — V.65, №5.— P. 728–733. (in Russian)
18. Saks S. Theory of the integral. – IL, M., 1949. (in Russian)
19. Federer G. Geometric measure theory. – Nauka, Moscow, 1987. (in Russian)
20. Sevost'yanov E.A. Investigation of space mappings by geometric method. – Naukova Dumka, Kyiv, 2014. (in Russian)

Institute of Mathematics
Ukrainian National Academy of Sciences, Kyiv
ruslan623@yandex.ru, salimov07@rambler.ru

Поступило 27.06.2015