УДК 517.51

В. К. Маслюченко, О. І. Філіпчук

ПРО ОСЛАБЛЕНУ ВЛАСТИВІСТЬ ГАНА ДЛЯ СИЛЬНО σ-МЕТРИЗОВНИХ ПРОСТОРІВ

V. K. Maslyuchenko, O. I. Filipchuk. *On a weakened Hahn property of strongly σ-metrizable spaces*, Mat. Stud. **43** (2015), 156–159.

Let X be a topological space, Y be a second countable topological space, Z be a strongly σ-metrizable space and $f\colon X \times Y \to Z$ be a separately continuous mapping. It is proved that the set of points x of X, for which the projection $\mathrm{pr}_Y(D(f) \cap (\{x\} \times Y))$ is nowhere dense in Y, is a residual subset of X.

В. К. Маслюченко, О. И. Филипчук. *Про ослабленное свойство Гана для сильно σ-метризируемых пространств* // Мат. Студії. – 2015. – Т.43, №2. – С.156–159.

Доказано, что для топологических пространств X, Y, сильно σ-метризируемого пространства Z и раздельно непрерывного отображения $f\colon X \times Y \to Z$ множество точек x из X, для которых проекция $\mathrm{pr}_Y(D(f) \cap (\{x\} \times Y))$ нигде не плотна в Y, является остаточным множеством в X, если Y удовлетворяет второй аксиоме счетности.

1. Вступ. Кажуть, що відображення $f\colon X \times Y \to Z$ добутку топологічних просторів X і Y у топологічний простір Z має *властивість Гана* ([1]), якщо множина

$$C_Y(f) = \{x \in X\colon \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$$

є залишковою в X. Тут символом $C(f)$ позначено множину точок сукупної неперервності відображення f. Відомо ([2]), що для довільного топологічного простору X і метризовного простору Z кожне нарізно неперервне відображення $f\colon X \times Y \to Z$ має властивість Гана, якщо простір Y задовольняє другу аксіому зліченності.

Топологічний простір Z називається *сильно σ-метризовним*, якщо $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$, де $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність замкнених метризовних підпросторів Z така, що для кожної збіжної в Z послідовності точок z_k існує номер m такий, що $\{z_k\colon k \in \mathbb{N}\} \subseteq Z_m$. Така послідовність просторів Z_n називається *вичерпанням σ-метризовного простору Z*. Багато результатів про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень та їх аналогів зі значеннями в метризовних просторах були перенесені у працях [3–5] на той випадок, коли простір значень сильно σ-метризовний (детальніше див. [6] і вказану там літературу). Але щодо властивості Гана був встановлений лише такий результат [4]: *для топологічного простору X, метризовного компакту Y і сильно σ-метризовного простору Z кожне нарізно неперервне відображення $f\colon X \times Y \to Z$ має властивість Гана* (насправді, в [4, 5] були доведені сильніші твердження для $\widetilde{K}C$- та K_hC-функцій).

2010 *Mathematics Subject Classification:* 26B05, 54C08.
Keywords: separately continuous mappings; points of joint continuity; (weakened) Hahn property; strongly σ-metrizable spaces; second countable spaces.
doi:10.15330/ms.43.2.156-159

Питання, чи справедливе таке ж твердження в тому випадку, коли Y задовольняє другу аксіому зліченності, залишається поки що невідомим.

В цій статті ми вводимо *ослаблену властивість Гана* для відображення $f\colon X\times Y \to Z$, яка полягає в тому, що множина

$$\widetilde{C}_Y(f) = \{x \in X\colon \mathrm{pr}_Y(D(f) \cap (\{x\} \times Y)) \text{ ніде не щільна в } Y\}$$

є залишковою в X (тут $\mathrm{pr}_Y\colon X \times Y \to Y$ — проекція на Y і $D(f) = (X \times Y) \setminus C(f)$ — множина точок розриву відображення f). Ми доводимо, що для топологічного простору X, сильно σ-метризовного простору Z кожне нарізно неперервне відображення $f\colon X \times Y \to Z$ має ослаблену властивість Гана, якщо простір Y задовольняє другу аксіому зліченності.

Попередню версію отриманого тут результату анонсовано в [7].

2. Допоміжні твердження. Нам знадобляться два твердження з [8] та [3] відповідно, які нескладно доводяться.

Лема 1. *Нехай X — топологічний простір, $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність замкнених підмножин F_n простору X, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ і $G_n = \mathrm{int} F_n$ для кожного n. Тоді відкрита множина $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ є залишковою в X.*

Лема 2. *Нехай Y — топологічний простір з першою аксіомою зліченності, Z — сильно σ-метризовний простір з вичерпанням $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ і $g\colon Y \to Z$ — неперервне відображення. Тоді для будь-якого $y \in Y$ існують окіл V точки y в Y і номер n, такі, що $g(V) \subseteq Z_n$.*

3. Застосування другої аксіоми зліченності. Приступимо до вивчення множини $C(f)$ нарізно неперервних відображень $f\colon X \times Y \to Z$ зі значеннями в сильно σ-метризовних просторах, коли простір Y задовольняє другу аксіому зліченності.

Для відображення $f\colon X \times Y \to Z$ функції $f^x\colon Y \to Z$ і $f_y\colon X \to Z$ визначаються за правилом

$$f^x(y) := f(x, y) =: f_y(x) \text{ для довільних } x \in X \text{ та } y \in Y.$$

Лема 3. *Нехай X, Y, Z — топологічні простори, $f\colon X \times Y \to Z$ — відображення, яке неперервне відносно першої змінної, $B \subseteq Y$ і C — замкнена підмножина Z. Тоді множина $A = \{x \in X\colon f^x(B) \subseteq C\}$ замкнена в X.*

Доведення. Неважко переконатися в тому, що $A = \bigcap_{y\in B} f_y^{-1}(C)$. Справді, якщо $x \in A$ і $y \in B$, то $f_y(x) = f^x(y) \in C$, отже, $x \in f_y^{-1}(C)$, а тому, $x \in \bigcap_{y\in B} f_y^{-1}(C)$. Навпаки, якщо $x \in \bigcap_{y\in B} f_y^{-1}(C)$, то $x \in f_y^{-1}(C)$ для кожного $y \in B$, а тому, $f^x(y) = f_y(x) \in C$ для кожного $y \in B$. Отже, $f^x(B) \subseteq C$, тобто $x \in A$.

З неперервності відображень $f_y\colon X \to Z$ випливає, що множини $f_y^{-1}(C)$ є замкненими в X, а тому, замкненим є і їхній перетин A. □

Теорема 1. *Нехай X — топологічний простір, Y — топологічний простір з другою аксіомою зліченності, $\mathcal{H} = \{H_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ — база простору Y, Z — сильно σ-метризовний простір і $f\colon X \times Y \to Z$ — нарізно неперервне відображення. Тоді існує послідовність множин E_n у просторі X, така, що множина $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ є залишковою в X і $E_n \times H_n \subseteq C(f)$ для довільного номера n.*

Доведення. Нехай $\{Z_m\colon m \in \mathbb{N}\}$ — вичерпання сильно σ-метризовного простору Z. Розглянемо множини $F_{n,m} = \{x \in X\colon f^x(H_n) \subseteq Z_m\}$. Оскільки множини Z_m замкнені в Z, то за лемою 3 множини $F_{n,m}$ є замкненими в X.

Легко зрозуміти, що $\bigcup_{n,m=1}^{\infty} F_{n,m} = X$. Справді, нехай $x \in X$. Відображення $f^x\colon Y \to Z$ неперервне і простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, бо для кожного $y \in Y$ система $\mathcal{H}_y = \{H \in \mathcal{H}\colon y \in H\}$ утворює не більш, ніж зліченну базу околів точки y в просторі Y. Тому, за лемою 2 для кожної точки $y \in Y$ існують її окіл V_y у просторі Y і номер m_y, такі, що $f^x(V_y) \subseteq Z_{m_y}$. Якщо $Y \neq \varnothing$, то, для елемента $y \in Y$ і базисної множини H_n такої, що $y \in H_n \subseteq V_y$, ми отримаємо, що $f^x(H_n) \subseteq Z_m$, де $m = m_y$. Отже, $x \in F_{n,m}$. Якщо ж $Y = \varnothing$, то $f^x(H_n) \subseteq Z_m$ для довільних n і m.

Нехай $G_{n,m} = \operatorname{int} F_{n,m}$. З леми 1 негайно випливає, що відкрита множина $G = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} G_{n,m}$ є залишковою в X. Розглянемо звуження $f_{n,m} = f|_{G_{n,m}\times H_n}$. Оскільки $G_{n,m} \subseteq F_{n,m}$, то для кожного $x \in G_{n,m}$ маємо, що $f^x(H_n) \subseteq Z_m$, отже, $f(G_{n,m} \times H_n) = \bigcup_{x\in G_{n,m}} f^x(H_n) \subseteq Z_m$. Таким чином, $f_{n,m}\colon G_{n,m} \times H_n \to Z_m$ — нарізно неперервне відображення зі значеннями у метризовному просторі Z_m. При цьому з відкритості множин $G_{n,m}$ і H_n випливає, що $C(f_{n,m}) = C(f) \cap (G_{n,m} \times H_n)$. Оскільки підпростір H_n, як і весь простір Y, задовольняє другу аксіому зліченності, то за наслідком з теореми Калбрі-Троалліка ([2]) відображення $f_{n,m}$ має властивість Гана, тобто, множина $E_{n,m} = C_{H_n}(f_{n,m})$ є залишковою в $G_{n,m}$. Крім цього, $E_{n,m} \times H_n \subseteq C(f_{n,m}) \subseteq C(f)$ для довільних номерів n і m. Покладемо $E_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{n,m}$. Тоді і $E_n \times H_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}(E_{n,m} \times H_n) \subseteq C(f)$ для кожного n. Для множини $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ маємо

$$X \setminus E = (X \setminus G) \cup (G \setminus E) \subseteq (X \setminus G) \cup \bigcup_{n,m=1}^{\infty} (G_{n,m} \setminus E_{n,m}).$$

Множина $X \setminus G$ першої категорії в X, а множини $G_{n,m} \setminus E_{n,m}$ — першої категорії в $G_{n,m}$, а значить, і в X. Тому, $X \setminus E$ — множина першої категорії в X, а отже, E — залишкова множина в X. □

4. Основний результат. Перейдемо до основного результату статті.

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, Y — топологічний простір, що задовольняє другу аксіому зліченності, Z — сильно σ-метризовний простір і $f\colon X \times Y \to Z$ — нарізно неперервне відображення. Тоді f має ослаблену властивість Гана.*

Доведення. Припустимо, що $Y \neq \varnothing$. Нехай $\mathcal{H} = \{H_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ — база простору Y, що складається з непорожніх множин. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо систему $\mathcal{H}_n = \{H \in \mathcal{H}\colon H \subseteq H_n\}$. Зрозуміло, що $\mathcal{H}_n$ — база підпростору H_n простору Y. Оскільки $\mathcal{H}$ не більш, ніж зліченна, то такою ж є $\mathcal{H}_n$, адже $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{H}$. Тому, $\mathcal{H}_n = \{H_{n,j}\colon j \in \mathbb{N}\}$.

Для кожного номера n розглянемо звуження $f_n = f|_{X\times H_n}$. Оскільки множина H_n відкрита, то $f_n\colon X \times H_n \to Z$ — нарізно неперервне відображення і $C(f_n) = C(f) \cap (X \times H_n)$. За теоремою 1 для кожного n існує така послідовність множин $E_{n,j}$ в X, що множина $E_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{n,j}$ залишкова в X і $E_{n,j} \times H_{n,j} \subseteq C(f_n) \subseteq C(f)$ для кожного j. Перетин $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ теж є залишковою в множиною в X. Для доведення теореми досить встановити, що $E \subseteq \widetilde{C}_Y(f)$.

Нехай $x_0 \in E$ і $B_{x_0} = D(f) \cap (\{x_0\} \times Y)$. Потрібно довести, що проекція $\operatorname{pr}_Y(B_{x_0})$ ніде не щільна в Y. Для цього розглянемо довільну відкриту непорожню множину V у просторі Y. Зрозуміло, що існує такий номер n_0, що $H_{n_0} \subseteq V$, а також, що $x_0 \in E_{n_0}$. Тому, існує такий індекс j_0, що $x_0 \in E_{n_0,j_0}$. Звідки, для непорожньої відкритої в Y множини $V_0 = H_{n_0,j_0}$ матимемо, що $\{x_0\} \times V_0 \subseteq E_{n_0,j_0} \times H_{n_0,j_0} \subseteq C(f)$ і $V_0 \subseteq H_{n_0} \subseteq V$. Тому, $\{x_0\} \times V_0 \subseteq C(f)$, а, отже, $(\{x_0\} \times V_0) \cap D(f) = \varnothing$. Звідси,

$$(\{x_0\} \times V_0) \cap B_{x_0} = (\{x_0\} \times V_0) \cap (\{x_0\} \times Y) \cap D(f) = (\{x_0\} \times V_0) \cap D(f) = \varnothing.$$

Тому, $V_0 \cap \mathrm{pr}_Y(B_{x_0}) = \mathrm{pr}_Y(\{x_0\} \times V_0) \cap \mathrm{pr}_Y(B_{x_0}) = \mathrm{pr}_Y((\{x_0\} \times V_0) \cap (B_{x_0})) = \varnothing$. При цьому $V_0 \subseteq V$, отже, ми з'ясували, що множина $\mathrm{pr}_Y(B_{x_0})$ ніде не щільна в Y.

При $Y = \varnothing$ твердження теореми тривіальне. □

5. Подяка. Зауважимо, що коли б ми хотіли в доведенні теореми 1, щоб образи побудованих множин при відображенні f містилися в деякому дограничному метризовному просторі Z_m, то нам потрібно було б оперувати з подвійною послідовністю $E_{n,m}$, як це було у початковому формулюванні теореми 1. Автори вдячні **Рецензенту** за пропозицію розглянути множини $E_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{n,m}$, для яких $E_n \times H_n \subseteq C(f)$, бо тільки це включення і використовувалося надалі. Це дозволило спростити наш початковий виклад.

ЛІТЕРАТУРА

1. Маслюченко В.К. *Простори Гана і задача Діні*// Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – Т.41, №4. – С. 39–45; Maslyuchenko V.K., *Hahn spaces and Dini's problem*// Math. methods and phys.-mech. fields. – 1998. – V.41, №4. – P. 39–45.
2. Calbrix J., Troallic J.P. *Applications séparément continues*// C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. – 1979. – V.288. – P. 647–648.
3. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В. *Дослідження про нарізно неперервні відображення*// Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 192–246; Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Sobchuk O.V. *Research on separately continuous mappings* , Intern. math. conf., dedicated to Hance Hahn memory, 1995, 192–246.
4. Маслюченко В.К. *Нарізно неперервні відображення від багатьох змінних зі значеннями в σ-метризовних просторах*// Нелінійні коливання. – 1999. – V.2, №3. – С. 337–344; Maslyuchenko V.K. *Separately continuous functions of many variables with values in σ-metrizable spaces*// Non-linear oscillations. – 1999. – T.2, №3. – P. 337–344.
5. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Шишина О.І. *Сукупна неперервність горизонтально квазінеперервних відображень зі значеннями в σ-метризовних просторах*// Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – Т.45, №1. – С. 42–46; Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Shyshyna O.I., *Joint continuity of horizontally quasi-continuous mappings with values in σ-metrizable spaces*// Math. methods and phys.-mech. fields. – 2002. – V.45, №1. – P. 42–46.
6. Філіпчук О.І. *Нарізно неперервні відображення та їх аналоги зі значеннями в неметризовних просторах*: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук, Чернівці, 2010. – 124 с.; Filipchuk O.I. *Separately continuous mappings and its analogues with values in non-metrizable spaces*, Ph. D. Thesis, Chernivtsi, 2010. – 124 p.
7. Маслюченко В.К., Філіпчук О.І. *Сукупна неперервність нарізно неперервних відображень зі значеннями в сильно σ-метризовних просторах*// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 2015 р.): Тези доповідей. – С. 45–46; Maslyuchenko V.K., Filipchuk O.I. *Joint continuity of separately continuous mappings with values in σ-metrizable spaces*, Ukrainian conf. "Modern problems of probability theory and mathematical analysis", Vorokhta, 2015, P. 45–46.
8. Breckenridge J.C., Nishiura T. *Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces*// Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. – 1976. – V.4, №2. – P. 191–203.

Chernivtsi National University
Bukovyna State University of Finance and Economics
vmaslyuchenko@ukr.net
o-sh@ukr.net

Надійшло 8.01.2015