УДК 517.54

А. Л. Таргонський

ДЕЯКI НЕРIВНОСТI ДЛЯ ВНУТРIШНIХ РАДIУСIВ ПОПАРНО-НЕПЕРЕТИННИХ ОБЛАСТЕЙ ТА ВIДКРИТИХ МНОЖИН

A. L. Targonskii. *Some inequalities for inner radii of pair-wise disjoint domains and open sets*, Mat. Stud. **43** (2015), 51–60.

Sharp estimates of product of inner radii for pairwise disjoint domains and open sets are obtained. In particular, we solve an extremal problem in the case of arbitrary finite number of rays containing arbitrary even number of free poles.

А. Л. Таргонский. *Некоторые неравенства для внутренних радиусов попарно-непересекающихся областей и открытых множеств* // Мат. Студiї. – 2015. – Т.43, №1. – C.51–60.

В статье получены точные оценки произведений внутренних радиусов наборов попарно непересекающихся областей и открытых множеств. В частности, решена экстремальная задача в случае произвольного конечного количества лучей, на которых расположено произвольное четное количество свободных полюсов.

Вступ. У данiй статтi розглядаються деякi екстремальнi задачi на класах областей, що попарно не перетинаються. Початок розвитку цього роздiлу геометричної теорiї функцiй комплексної змiнної зазвичай пов'язують зi статтею 1934 р. М. А. Лаврентьєва [1]. У нiй обчислено максимум i визначено розмiщення екстремальних областей функцiонала, що є добутком внутрiшнiх радiусiв двох однозв'язних областей вiдносно фiксованих точок комплексної площини. Вiдзначимо, що цей результат знадобився йому для деякої аеродинамiчної задачi. В 1947 р. Г. М. Голузiн розв'язав подiбну задачу для трьох фiксованих точок комплексної площини ([2]). Пiсля цього ця тематика почала бурхливо розвиватися. У цьому зв'язку можна пригадати роботи багатьох авторiв, зокрема Ю. Є. Алєнiцина, М. А. Лєбедєва, Дж. Дженкiнса, П. М. Тамразова, П. П. Куфарева, А. Е. Фалеса i багатох iнших. Також зазначимо, що у 1975 роцi Г. П. Бахтiна, використовуючи одну iдею П. М. Тамразова, вперше розв'язала екстремальну задачу з так званими *вiльними полюсами*, на одиничному колi. Це означає, що функцiонал залежить не тiльки вiд областей, а й вiд розмiщення точок, вiдносно яких розглядається внутрiшнiй радiус (див., напр., [3]).

Важливий крок у розвитку цiєї тематики зробив В. Н. Дубiнiн. У своїх роботах вiн розробив новий метод дослiдження — метод кусково-подiляючого перетворення, за допомогою якого вiн вперше розв'язав ряд екстремальних задач для довiльної, але

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30C70, 30C75.
Keywords: inner radius of domain; quadratic differential; piecewise-separating transformation; Green's function; radial systems of points; logarithmic capacity; variational formula; non-overlapping domains.
doi:10.15330/ms.43.1.51-60

фіксованої, кількості многозв'язних областей, які попарно не перетинаються (див., наприклад, [4–7]). У даний час подібного роду екстремальні задачі знайшли застосування у дослідженнях голоморфних динамічних систем.

Появу нового методу дослідження — методу *керуючих функціоналів*, пов'язують з іменем О. К. Бахтіна. За допомогою цього методу вдалося розв'язати ряд екстремальних задач вже не зв'язаних з колом, у яких точки вільно "рухаються" по так званих *променевих системах точок* (див., наприклад, [8–11]). Власне, це і є основним методом дослідження у даній статті. *Метою* нашої статті є отримання точних оцінок добутків внутрішніх радіусів наборів попарно неперетинних областей та відкритих множин. Зокрема, у статті розв'язано екстремальну задачу у випадку довільної скінченної кількості променів, на яких розташована довільна парна кількість вільних полюсів.

Основна частина. Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множини натуральних та дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ — площина комплексних чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — її одноточкова компактифікація або сфера Рімана, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Для $n, m \in \mathbb{N}$ систему точок $A_{n,2m} = \{a_{k,p} \in \mathbb{C} \colon k \in \{1, \ldots, n\},\ p \in \{1, \ldots, 2m\}\}$ назвемо $(n, 2m)$-*променевою рівнокутовою системою точок*, якщо для всіх $k \in \{1, \ldots, n\}$ виконуються співвідношення

$$0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,2m}| < \infty, \quad \arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,2m} = \frac{2\pi}{n}(k-1). \tag{1}$$

Розглянемо систему областей (кутів)

$$P_k = \left\{ w \in \mathbb{C} \colon \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n} k \right\},\ k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Для довільної $(n, 2m)$-променевої рівнокутової системи точок розглянемо наступні "керуючі" функціонали

$$M\big(A^{(1)}_{n,2m}\big) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} \chi\Big(|a_{k,2p-1}|^{\frac{n}{2}}\Big) \cdot |a_{k,2p-1}|, \quad M\big(A^{(2)}_{n,2m}\big) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} \chi\Big(|a_{k,2p}|^{\frac{n}{2}}\Big) \cdot |a_{k,2p}|.$$

де $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Нехай $\{B_0, B_{k,p}, B_\infty\}$ — довільний набір попарно-неперетинних областей таких, що

$$a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}, \quad k \in \{1, \ldots, 2n\},\ p \in \{1, \ldots, 2m\}.$$

Через D, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ позначимо довільну відкриту множину, для якої $w = a \in D$, а через $D(a)$ зв'язну компоненту D, яка містить a. Для довільної $(n, 2m)$-променевої рівнокутової системи точок $A_{n,2m} = \{a_{k,p} \in \mathbb{C} \colon k \in \{1, \ldots, n\},\ p \in \{1, \ldots, 2m\}\}$, та відкритої множини D, $A_{n,2m} \subset D$ позначимо $D_k\left(a_{s,p}\right)$ зв'язну компоненту множини $D\left(a_{s,p}\right) \cap \overline{P_k}$, яка містить точку $a_{s,p}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $s \in \{k, k+1\}$, $p \in \{1, \ldots, 2m\}$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$. Нехай $D_k(0)$ (відповідно $D_k(\infty)$) позначає зв'язну компоненту множини $D(0) \cap \overline{P_k}$ (відповідно $D(\infty) \cap \overline{P_k}$), яка містить точку $w = 0$ (відповідно $w = \infty$).

Нехай $A_{n,2m}$ — $(n, 2m)$-променева рівнокутова система точок. Вважатимемо, що відкрита множина D, $\{0, \infty\} \cup A_{n,2m} \subset D$, задовольняє умову ненакладання відносно системи точок $A_{n,2m}$, якщо виконується умова

$$\begin{gathered} [D_k(a_{k,s}) \cap D_k(a_{k+1,p})] \cup [D_k(0) \cap D_k(a_{k,p})] \cup [D_k(0) \cap D_k(\infty)] \cup \\ \cup [D_k(\infty) \cap D_k(a_{k,p})] \cup [D_k(\infty) \cap D_k(a_{k+1,p})] \cup [D_k(0) \cap D_k(a_{k+1,p})] = \varnothing, \end{gathered} \tag{2}$$

$k \in \{1, \ldots, n\}$, $p, s \in \{1, \ldots, 2m\}$ для всіх кутів $\overline{P}_k$.

Позначимо через $r(B; a)$ внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див. [4–6, 8, 12]).

Предметом дослідження у даній статті є наступні задачі.

Задача 1. Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Відшукати максимум величини

$$r^{\frac{n^2\alpha}{4}}(D, 0) \cdot r^{\frac{n^2\beta}{4}}(D, \infty) \cdot \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\beta}(D, a_{k,2p-1}) \cdot r^{\alpha}(D, a_{k,2p}),$$

де $A_{n,2m}$ — довільна $(n, 2m)$-променева рівнокутова система точок вигляду (1), а D — відкрита множина, яка задовольняє умову ненакладання (2), $0, \infty, a_{k,p} \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$, та визначити розташування екстремальної множини ($k \in \{1, \ldots, n\}$, $p \in \{1, \ldots, 2m\}$).

Задача 2. Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Відшукати максимум величини

$$r^{\frac{n^2\alpha}{4}}(B_0, 0) \cdot r^{\frac{n^2\beta}{4}}(B_\infty, \infty) \cdot \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\beta}(B_{k,2p-1}, a_{k,2p-1}) \cdot r^{\alpha}(B_{k,2p}, a_{k,2p}),$$

де $A_{n,2m}$ — довільна $(n, 2m)$-променева рівнокутова система точок вигляду (1), а $\{B_0, B_{k,p},\ B_\infty\}$ — довільний набір попарно-неперетинних областей, $0 \in B_0, \infty \in B_\infty$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$, $p \in \{1, \ldots,\ 2m\}$), та визначити розташування екстремальних областей.

Теорема 1. *Нехай $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тоді, для довільної $(n, 2m)$-променевої рівнокутової системи точок вигляду (1), та довільного набору попарно-неперетинних областей $\{B_0, B_{k,p}, B_\infty\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $p \in \{1, \ldots, 2m\}$, $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, виконується нерівність*

$$r^{\frac{n^2\alpha}{4}}(B_0, 0) \cdot r^{\frac{n^2\beta}{4}}(B_\infty, \infty) \cdot \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\beta}(B_{k,2p-1}, a_{k,2p-1}) \cdot r^{\alpha}(B_{k,2p}, a_{k,2p}) \leq$$

$$\leq 2^{-\frac{n}{2}(\alpha+\beta)} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{mn(\alpha+\beta)} \cdot \left(\frac{4}{2m+1}\right)^{\frac{n(2m+1)(\alpha+\beta)}{2}} \cdot \left(M\left(A^{(1)}_{n,2m}\right)\right)^{\beta} \times$$

$$\times \left(M\left(A^{(2)}_{n,2m}\right)\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha^{\alpha}}{|\sqrt{\alpha}-1|^{|\sqrt{\alpha}-1|^2}|\sqrt{\alpha}+1|^{|\sqrt{\alpha}+1|^2}}\right)^{\frac{n(2m+1)}{4}}.$$

Знак рівності досягається, коли точки $a_{k,p}$ та області $B_0, B_\infty, B_{k,p}$, відповідно, є полюсами та круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -w^{n-2}\left(1+w^n\right)^{2m-1} \times$$

$$\times \frac{(\beta-\alpha)\left(\left(1-iw^{\frac{n}{2}}\right)^{4m+2} + \left(1+iw^{\frac{n}{2}}\right)^{4m+2}\right) - 2(\beta+\alpha)\left(1+w^n\right)^{2m+1}}{\left(\left(1-iw^{\frac{n}{2}}\right)^{4m+2} - \left(1+iw^{\frac{n}{2}}\right)^{4m+2}\right)^2} dw^2. \qquad (3)$$

Теорема 2. *Нехай $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тоді, для довільної $(n, 2m)$-променевої рівнокутової системи точок вигляду (1), та довільної відкритої множини D, яка задовольняє умову ненакладання (2), $0, \infty, a_{k,p} \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$, $p \in \{1, \ldots, 2m\}$),* *виконується нерівність*

$$r^{\frac{n^2\alpha}{4}}(D,0)\cdot r^{\frac{n^2\beta}{4}}(D,\infty)\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r^{\beta}(D,a_{k,2p-1})\cdot r^{\alpha}(D,a_{k,2p})\leq$$

$$\leq 2^{-\frac{n}{2}(\alpha+\beta)}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^{mn(\alpha+\beta)}\cdot\left(\frac{4}{2m+1}\right)^{\frac{n(2m+1)(\alpha+\beta)}{2}}\cdot\left(M\big(A^{(1)}_{n,2m}\big)\right)^{\beta}\times$$

$$\times\left(M\big(A^{(2)}_{n,2m}\big)\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha^{\alpha}}{|\sqrt{\alpha}-1|^{|\sqrt{\alpha}-1|^2}|\sqrt{\alpha}+1|^{|\sqrt{\alpha}+1|^2}}\right)^{\frac{n(2m+1)}{4}}.$$

Знак рівності досягається, коли $D=\cup_{k,p}B_{k,p}\cup B_0\cup B_\infty$, *де точки* $a_{k,p}$ *та області* $B_0, B_\infty, B_{k,p}$, *відповідно, є полюсами та круговими областями квадратичного диференціала (3).*

Доведення теореми 1. Нехай функція $z_k(w)=(-1)^k i w^{\frac{n}{2}}$ для кожного $k\in\{1,\ldots,n\}$ відображає однолисто та конформно область P_k на праву півплощину $\operatorname{Re} z>0$. Тоді функція

$$\zeta_k(w):=\frac{1-z_k(w)}{1+z_k(w)} \tag{4}$$

однолисто та конформно відображає область $\overline{P}_k$ на одиничний круг $U=\{z\colon |z|\leq 1\}$ ($k\in\{1,\ldots,n\}$). Зрозуміло, що $\zeta_k(0)=1$, $\zeta_k(\infty)=-1$ ($k\in\{1,\ldots,n\}$).

Позначимо $\omega^{(k)}_{p+1}:=\zeta_k(a_{k,p})$, $\omega^{(k-1)}_{-p+4m+3}:=\zeta_{k-1}(a_{k,p})$, $a_{n+1,p}:=a_{1,p}$, $\zeta_0:=\zeta_n$, $\omega^{(0)}_{-p+4m+3}:=\omega^{(n)}_{-p+4m+3}$ ($k\in\{1,\ldots,n\}$, $p\in\{1,\ldots,2m\}$).

Сім'я функцій $\{\zeta_k(w)\}_{k=1}^{n}$, заданих рівністю (4), є *допустимою* для кусково-поділяючого перетворення ([4, 5, 8]) областей $\{B_{k,p}\colon k\in\{1,\ldots,n\},\ p\in\{1,\ldots,2m\}\}$ відносно системи кутів $\{P_k\}_{k=1}^{n}$. Для довільної множини $\Delta\in\mathbb{C}$ позначимо $(\Delta)^*:=\{w\in\overline{\mathbb{C}}\colon \frac{1}{\overline{w}}\in\Delta\}$. Нехай $\Omega^{(k)}_{p+1}$ є зв'язною компонентою множини $\zeta_k(B_{k,p}\cap\overline{P}_k)\cup(\zeta_k(B_{k,p}\cap\overline{P}_k))^*$, яка містить точку $\omega^{(k)}_{p+1}$, а $\Omega^{(k-1)}_{-p+4m+3}$ — зв'язною компонентою множини $\zeta_{k-1}(B_{k,p}\cap\overline{P}_{k-1})\cap(\zeta_{k-1}(B_{k,p}\cap\overline{P}_{k-1}))^*$, яка містить точку $\omega^{(k-1)}_{-p+4m+3}$ ($k\in\{1,\ldots,n\}$, $p\in\{1,\ldots,2m\}$), $\overline{P}_0:=\overline{P}_n$, $\Omega^{(0)}_{-p+4m+3}:=\Omega^{(n)}_{-p+4m+3}$. Пара областей $\Omega^{(k-1)}_{-p+4m+3}$ і $\Omega^{(k)}_{p+1}$ є результатом кусково-поділяючого перетворення області $B_{k,p}$ відносно сімей $\{P_{k-1},P_k\}$, $\{\zeta_{k-1},\zeta_k\}$ у точці $a_{k,p}$ ($k\in\{1,\ldots,n\}$, $p\in\{1,\ldots,2m\}$).

Через $\Omega^{(k)}_1$ позначимо зв'язну компоненту множини $\zeta_k(B_0\cap\overline{P}_k)\cup(\zeta_k(B_0\cap\overline{P}_k))^*$, яка містить точку 1 ($k\in\{1,\ldots,n\}$), а через $\Omega^{(k)}_{2m+2}$ — зв'язну компоненту множини $\zeta_k(B_\infty\cap\overline{P}_k)\cap(\zeta_k(B_\infty\cap\overline{P}_k))^*$, яка містить точку -1, $k\in\{1,\ldots,n\}$.

Сім'я областей $\{\Omega^{(k)}_1\}_{k=1}^{n}$ є результатом кусково-поділяючого перетворення області B_0 відносно сімей $\{P_k\}_{k=1}^{n}$ і функцій $\{\zeta_k\}_{k=1}^{n}$ в точці $w=0$, а сім'я областей $\{\Omega^{(k)}_{2m+2}\}_{k=1}^{n}$ є результатом кусково-поділяючого перетворення області B_∞ відносно сімей $\{P_k\}_{k=1}^{n}$ і функцій $\{\zeta_k\}_{k=1}^{n}$ в точці $w=\infty$. Зрозуміло, що $\Omega^{(s)}_l$ є, взагалі кажучи, многозв'язними областями, $l\in\{1,\ldots,4m+2\}$, $s\in\{1,\ldots,n\}$.

З формули (4) для $k\in\{1,\ldots,n\}$, $p\in\{1,\ldots,2m\}$ отримаємо такі асимптотичні співвідношення

$$|\zeta_k(w)-\zeta_k(a_{k,p})|\sim\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k,p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}\cdot|w-a_{k,p}|,\quad w\to a_{k,p},\ w\in\overline{P}_k,$$

$$|\zeta_{k-1}(w)-\zeta_{k-1}(a_{k,p})|\sim\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k,p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}\cdot|w-a_{k,p}|,\quad w\to a_{k,p},\ w\in\overline{P}_{k-1}. \tag{5}$$

Коефіцієнти кусково-поділяючого перетворення в точках $w=0$ та $w=\infty$ визначаються асимптотичними рівностями

$$|\zeta_k(w)-1|\sim 2|w|^{\frac{n}{2}},\ w\to 0,\quad |\zeta_k(w)+1|\sim 2|w|^{-\frac{n}{2}},\ w\to\infty,\ w\in\overline{P}_k\ (k\in\{1,\dots,n\}). \tag{6}$$

Застосовуючи теорему 1.9 ([5], див. також, [4, 6, 8]) та (5), отримуємо нерівності

$$r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\le\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k,p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|\left\{r\left(\Omega_{p+1}^{(k)},\omega_{p+1}^{(k)}\right)\cdot r\left(\Omega_{-p+4m+3}^{(k-1)},\omega_{-p+4m+3}^{(k-1)}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

$(k\in\{1,\dots,n\},\ p\in\{1,\dots,2m\})$. Зі співвідношень (6), отримаємо такі співвідношення

$$r\left(B_0;0\right)\le 2^{-\frac{2}{n}}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}r\left(\Omega_1^{(k)},\omega_1^{(k)}\right)\right]^{\frac{2}{n^2}},\quad \omega_1^{(k)}:=1\quad(k\in\{1,\dots,n\}),$$

$$r\left(B_\infty,\infty\right)\le 2^{-\frac{2}{n}}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}r\left(\Omega_{2m+2}^{(k)},\omega_{2m+2}^{(k)}\right)\right]^{\frac{2}{n^2}},\quad \omega_{2m+2}^{(k)}:=-1\quad(k\in\{1,\dots,n\}). \tag{8}$$

Тоді, з (7) та (8), маємо

$$\begin{aligned}
&r^{\frac{n^2\alpha}{4}}\left(B_0,0\right)\cdot r^{\frac{n^2\beta}{4}}\left(B_\infty,\infty\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r^{\beta}\left(B_{k,2p-1},a_{k,2p-1}\right)\cdot r^{\alpha}\left(B_{k,2p},a_{k,2p}\right)\le\\
&\le 2^{-\frac{n}{2}(\alpha+\beta)}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^{mn(\alpha+\beta)}\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(|a_{k,2p-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p-1}|\right]^{\beta}\times\\
&\times\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(|a_{k,2p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p}|\right]^{\alpha}\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[r^{\alpha}\left(\Omega_1^{(k)},\omega_1^{(k)}\right)\cdot r^{\beta}\left(\Omega_{2m+2}^{(k)},\omega_{2m+2}^{(k)}\right)\times\right.\\
&\times r^{\beta}\left(\Omega_{2p}^{(k)},\omega_{2p}^{(k)}\right)\cdot r^{\beta}\left(\Omega_{-2p+4m+4}^{(k-1)},\omega_{-2p+4m+4}^{(k-1)}\right)\times\\
&\left.\times\, r^{\alpha}\left(\Omega_{2p+1}^{(k)},\omega_{2p+1}^{(k)}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega_{-2p+4m+3}^{(k-1)},\omega_{-2p+4m+3}^{(k-1)}\right)\right]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[r^{\alpha}\left(\Omega_1^{(k)},\omega_1^{(k)}\right)\cdot r^{\beta}\left(\Omega_{2m+2}^{(k)},\omega_{2m+2}^{(k)}\right)\cdot r^{\beta}\left(\Omega_{-2p+4m+4}^{(k-1)},\omega_{-2p+4m+4}^{(k-1)}\right)\times\right.\\
&\left.\times r^{\beta}\left(\Omega_{2p}^{(k)},\omega_{2p}^{(k)}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega_{2p+1}^{(k)},\omega_{2p+1}^{(k)}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega_{-2p+4m+3}^{(k-1)},\omega_{-2p+4m+3}^{(k-1)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\\
&=\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{p=1}^{2m+1}r^{\alpha}\left(\Omega_{2p-1}^{(k)},\omega_{2p-1}^{(k)}\right)\cdot r^{\beta}\left(\Omega_{2p}^{(k)},\omega_{2p}^{(k)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{10}$$

З нерівності (9), враховуючи (10), отримаємо оцінку

$$\begin{aligned}
&r^{\frac{n^2\alpha}{4}}\left(B_0,0\right)\cdot r^{\frac{n^2\beta}{4}}\left(B_\infty,\infty\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r^{\beta}\left(B_{k,2p-1},a_{k,2p-1}\right)\cdot r^{\alpha}\left(B_{k,2p},a_{k,2p}\right)\le\\
&\le 2^{-\frac{n}{2}(\alpha+\beta)}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^{mn(\alpha+\beta)}\cdot\left(M\left(A_{n,2m}^{(1)}\right)\right)^{\beta}\cdot\left(M\left(A_{n,2m}^{(2)}\right)\right)^{\alpha}\times\\
&\times\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{p=1}^{2m+1}r^{\alpha}\left(\Omega_{2p-1}^{(k)},\omega_{2p-1}^{(k)}\right)\cdot r^{\beta}\left(\Omega_{2p}^{(k)},\omega_{2p}^{(k)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{11}$$

З твердження теореми 4.1.2 ([8]) випливає нерівність

$$\prod_{p=1}^{2m+1} r^{\alpha}\left(\Omega_{2p-1}^{(k)},\omega_{2p-1}^{(k)}\right)\cdot r^{\beta}\left(\Omega_{2p}^{(k)},\omega_{2p}^{(k)}\right)\leq \prod_{p=1}^{2m+1} r^{\alpha}\left(G_{2p-1},g_{2p-1}\right)\cdot r^{\beta}\left(G_{2p},g_{2p}\right), \tag{12}$$

де G_t, g_t $(t\in\{1,\ldots,4m+2\})$ — відповідно, кругові області та полюси квадратичного диференціала

$$Q\left(\zeta_k\right)d\zeta_k^2=\zeta_k^{2m-1}\cdot\frac{(\beta-\alpha)\zeta_k^{4m+2}-2(\beta+\alpha)\zeta_k^{2m+1}+(\beta-\alpha)}{\left(\zeta_k^{4m+2}-1\right)^2}\cdot d\zeta_k^2,\ k\in\{1,\ldots,n\}. \tag{13}$$

Використовуючи нерівність (12), з нерівності (11) маємо

$$r^{\frac{n^2\alpha}{4}}\left(B_0,0\right)\cdot r^{\frac{n^2\beta}{4}}\left(B_\infty,\infty\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\beta}\left(B_{k,2p-1},a_{k,2p-1}\right)\cdot r^{\alpha}\left(B_{k,2p},a_{k,2p}\right)\leq 2^{-\frac{n}{2}(\alpha+\beta)}\times$$

$$\times\left(\frac{2}{n}\right)^{mn(\alpha+\beta)}\cdot(M(A_{n,2m}^{(1)}))^{\beta}\cdot(M(A_{n,2m}^{(2)}))^{\alpha}\left[\prod_{p=1}^{2m+1} r^{\alpha}\left(G_{2p-1},g_{2p-1}\right)\cdot r^{\beta}\left(G_{2p},g_{2p}\right)\right]^{\frac{n}{2}}. \tag{14}$$

Враховуючи нерівність (14), а також теорему 4.1.2 [8], після потрібної заміни змінної у квадратичному диференціалі (13) отримаємо твердження теореми. □

Доведення теореми 2. Відзначимо спочатку, що з умови ненакладання випливає, що $\operatorname{cap}\overline{\mathbb{C}}\backslash D>0$ та множина D має узагальнену функцію Гріна

$$g_D(z,a)=\begin{cases} g_{D(a)}(z,a), & z\in D(a),\\ 0, & z\in\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{D}(a),\\ \lim\limits_{\zeta\to z} g_{D(a)}(\zeta,a), & \zeta\in D(a), z\in\partial D(a),\end{cases}$$

де $g_{D(a)}(z,a)$ — функція Гріна області $D(a)$ відносно точки $a\in D(a)$.

Надалі будемо використовувати методи праць [6–8]. Розглянемо множини $E_0=\overline{\mathbb{C}}\backslash D$; $\overline{U}_t=\{w\in\mathbb{C}\colon |w|\leq t\}$, $\Delta_t=\{w\in\mathbb{C}\colon |w|\geq \frac{1}{t}\}$, $E(a_{k,p},t)=\{w\in\mathbb{C}\colon |w-a_{k,p}|\leq t\}$, $k\in\{1,\ldots,n\}$, $p\in\{1,\ldots,2m\}$, $n\geq 2$, $n,m\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{R}_+$. Для достатньо малих значень $t>0$ введемо у розгляд конденсатор $C\left(t,D,A_{n,2m}\right)=\{E_0,\overline{U}_t,\Delta_t,E_1,E_2\}$, де

$$E_1=\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{p=1}^{m}E(a_{k,2p-1},t),\ E_2=\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{p=1}^{m}E(a_{k,2p},t).$$

Ємністю конденсатора $C\left(t,D,A_{n,2m}\right)$ називається величина (див. [5])

$$\operatorname{cap}C\left(t,D,A_{n,2m-1}\right)=\inf\iint\left[(G_x')^2+(G_y')^2\right]dxdy,$$

де нижня грань береться по всіх дійсних неперервних ліпшицевих в $\overline{\mathbb{C}}$ функціях $G=G(z)$ таких, що $G\big|_{E_0}=0$, $G\big|_{E_1}=\sqrt{\beta}$, $G\big|_{E_2}=\sqrt{\alpha}$, $G\big|_{\overline{U}_t}=\frac{n}{2}\sqrt{\alpha}$, $G\big|_{\Delta_t}=\frac{n}{2}\sqrt{\beta}$.

Величина, обернена до ємності конденсатора C, називається модулем цього конденсатора $|C|=[\operatorname{cap}C]^{-1}$. З теореми 1 ([6]) маємо

$$\left|C\left(t,D,A_{n,2m}\right)\right|=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4}{n\left(\alpha+\beta\right)\left(n+4m\right)}\cdot\log\frac{1}{t}+M(D,A_{n,2m})+o(1),\quad t\to 0, \tag{15}$$

де

$$M(D,A_{n,2m})=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{16}{n^2\cdot(\alpha+\beta)^2\,(n+4m)^2}\cdot\Big[\frac{\alpha n^2}{4}\log r(D,0)+\frac{\beta n^2}{4}\log r(D,\infty)+$$
$$+\frac{\sqrt{\alpha\beta}n^2}{2}g_D(0,\infty)+n\sqrt{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}g_D(0,a_{k,2p-1})+$$
$$+n\beta\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}g_D(\infty,a_{k,2p-1})+n\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}g_D(0,a_{k,2p})+n\sqrt{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}g_D(\infty,a_{k,2p})+$$
$$+\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log r(D,a_{k,2p})+\beta\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log r(D,a_{k,2p-1})+\alpha\sum_{(k,2p)\neq(q,2s)}g_D(a_{k,2p},a_{q,2s})+$$
$$+\beta\sum_{(k,2p-1)\neq(q,2s-1)}g_D(a_{k,2p-1},a_{q,2s-1})+2\sqrt{\alpha\beta}\sum_{(k,2p)\neq(q,2s-1)}g_D(a_{k,2p},a_{q,2s-1})\Big].\tag{16}$$

Використовуватимемо також функцію, визначену формулою (4), та позначення $\omega_l^{(s)}$ $(s\in\{0,\dots,n\},l\in\{1,\dots,4m+2\})$, $a_{n+1,p}$, ζ_0, Δ, $(\Delta)^*$, введені нами у доведенні теореми 1. Нехай $\mathbf{\Omega}_{p+1}^{(k)}$ позначає зв'язну компоненту множини $\zeta_k(D\cap\overline{P}_k)\cap(\zeta_k(D\cap\overline{P}_k))^*$, яка містить точку $\omega_{p+1}^{(k)}$, а через $\mathbf{\Omega}_{-p+4m+3}^{(k-1)}$ позначимо зв'язну компоненту множини $\zeta_{k-1}\left(D\cap\overline{P}_{k-1}\right)\cap\left(\zeta_{k-1}\left(D\cap\overline{P}_{k-1}\right)\right)^*$, яка містить точку $\omega_{-p+4m+3}^{(k-1)}$ $(k\in\{1,\dots,n\},p\in\{1,\dots,2m\})$, $\overline{P}_0:=\overline{P}_n$, $\mathbf{\Omega}_{-p+4m+3}^{(0)}:=\mathbf{\Omega}_{-p+4m+3}^{(n)}$. Пара областей $\mathbf{\Omega}_{-p+4m+3}^{(k-1)}$ та $\mathbf{\Omega}_{p+1}^{(k)}$ є результатом кусково поділяючого перетворення відкритої множини D відносно сімей $\{P_{k-1},P_k\}$, $\{\zeta_{k-1},\zeta_k\}$ в точці $a_{k,p}$ $(k\in\{1,\dots,n\},p\in\{1,\dots,2m\})$. Через $\mathbf{\Omega}_1^{(k)}$ позначимо зв'язну компоненту множини $\zeta_k(D\cap\overline{P}_k)\cap(\zeta_k(D\cap\overline{P}_k))^*$ $(k\in\{1,\dots,n\})$, яка містить точку 1, а через $\mathbf{\Omega}_{2m+2}^{(k)}$ — зв'язну компоненту множини $\zeta_k(D\cap\overline{P}_k)\cap(\zeta_k(D\cap\overline{P}_k))^*$ $(k\in\{1,\dots,n\})$, яка містить точку -1. Сім'я областей $\{\mathbf{\Omega}_1^{(k)}\}_{k=1}^n$ є результатом кусково-поділяючого перетворення відкритої множини D відносно сімей $\{P_k\}_{k=1}^n$ та функцій $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ в точці $w=0$, а сім'я областей $\{\mathbf{\Omega}_{2m+2}^{(k)}\}_{k=1}^n$ є результатом кусково-поділяючого перетворення відкритої множини D відносно сімей $\{P_k\}_{k=1}^n$ та функцій $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ в точці $w=\infty$. Зрозуміло, що $\mathbf{\Omega}_l^{(s)}$ $(l\in\{1,\dots,4m+2\},\ s\in\{1,\dots,n\})$, взагалі кажучи, є багатозв'язними областями.

Розглянемо конденсатори $C_k(t,D,A_{n,2m})=(E_0^{(k)},\overline{U}_t^{(k)},\Delta_t^{(k)},E_1^{(k)},E_2^{(k)})$, де

$$E_s^{(k)}=\zeta_k(E_s\cap\overline{P}_k)\cap[\zeta_k(E_s\cap\overline{P}_k)]^*,\ \overline{U}_t^{(k)}=z_k(\overline{U}_t\cap\overline{P}_k)\cap\{z_k(\overline{U}_t\cap\overline{P}_k)\}^*,$$
$$\Delta_t^{(k)}=z_k(\Delta_t\cap\overline{P_k})\cap\{z_k(\Delta_t\cap\overline{P}_k)\}^*,\quad(k\in\{1,\dots,n\},\ s\in\{0,1,2\}),$$

а $\{P_k\}_{k=1}^n$ — система кутів, яка відповідає системі точок $A_{n,2m}$. Операція $[A]^*$ ставить у відповідність будь-якій множині $A\subset\overline{\mathbb{C}}$ множину, симетричну до множини A відносно кола $\{w\colon|w|=1\}$. Звідси випливає, що конденсатору $C\left(t,D,A_{n,2m}\right)$, при кусково-поділяючому перетворенні відносно $\{P_k\}_{k=1}^n$ та $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$, відповідає набір симетричних відносно кола $\{z\colon|z|=1\}$ конденсаторів $\{C_k(t,D,A_{n,2m})\}_{k=1}^n$. Зауважимо, що ([6 − 8])

$$\operatorname{cap}C(t,D,A_{n,2m})\geq\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cap}C_k(t,D,A_{n,2m}).\tag{17}$$

Звідси випливає, що

$$|C(t,D,A_{n,2m})| \leq 2\left(\sum_{k=1}^{n}|C_k(t,D,A_{n,2m})|^{-1}\right)^{-1}. \tag{18}$$

Формула (15) дає асимптотику $|C(t,D,A_{n,2m})|$ при $t\to 0$, а величина $M\left(D,A_{n,2m}\right)$ є зведеним модулем множини D відносно $A_{n,2m}$. Скориставшись асимптотичними співвідношеннями (5), (6) та тим, що D задовольняє умову ненакладання відносно системи $A_{n,2m}$, отримаємо такі асимптотичні співвідношення для конденсаторів $C_k\left(t,D,A_{n,2m}\right)$ $(k\in\{1,\ldots,n\})$

$$|C_k\left(t,D,A_{n,2m}\right)| = \frac{2}{2\pi\left(\alpha+\beta\right)\left(n+4m\right)}\log\frac{1}{t} + M_k\left(D,A_{n,2m}\right) + o(1),\ \ t\to 0, \tag{19}$$

де

$$\begin{gathered}
M_k(D,A_{n,2m}) = \frac{4}{2\pi\left(\alpha+\beta\right)^2\left(n+4m\right)^2}\cdot\left[\alpha\log\frac{r(\mathbf{\Omega}_1^{(k)},\omega_1^{(k)})}{2} + \beta\log\frac{r(\mathbf{\Omega}_{2m+2}^{(k)},\omega_{2m+2}^{(k)})}{2}+\right.\\
+\beta\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r(\mathbf{\Omega}_{2p}^{(k)},\omega_{2p}^{(k)})}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k,2p-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p-1}|\right]^{-1}}+\\
+\beta\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r(\mathbf{\Omega}_{-2p+4m+4}^{(k)},\omega_{-2p+4m+4}^{(k)})}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k+1,2p-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k+1,2p-1}|\right]^{-1}} + \alpha\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r(\mathbf{\Omega}_{2p+1}^{(k)},\omega_{2p+1}^{(k)})}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k,2p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p}|\right]^{-1}}+\\
\left.+\alpha\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r(\mathbf{\Omega}_{-2p+4m+3}^{(k)},\omega_{-2p+4m+3}^{(k)})}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k+1,2p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k+1,2p}|\right]^{-1}}\right] \qquad (k\in\{1,\ldots,n\}).
\end{gathered}$$

Асимптотичну рівність (19) можна переписати у вигляді

$$\begin{gathered}
|C_k\left(t,D,A_{n,2m}\right)|^{-1} = \frac{\pi\left(\alpha+\beta\right)\left(n+4m\right)}{\log\frac{1}{t}}\times\\
\times\left(1+\frac{\pi\left(\alpha+\beta\right)\left(n+4m\right)}{\log\frac{1}{t}}M_k\left(D,A_{n,2m}\right)+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1} = \frac{\pi\left(\alpha+\beta\right)\left(n+4m\right)}{\log\frac{1}{t}}-\\
-\left(\frac{\pi\left(\alpha+\beta\right)\left(n+4m\right)}{\log\frac{1}{t}}\right)^2 M_k\left(D,A_{n,2m}\right)+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\right),\quad t\to 0.
\end{gathered}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{n}|C_k\left(t,D,A_{n,2m}\right)|^{-1} = \frac{\pi n\left(\alpha+\beta\right)\left(n+4m\right)}{\log\frac{1}{t}}-\\
-\left(\frac{\pi\left(\alpha+\beta\right)\left(n+4m\right)}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\cdot\sum_{k=1}^{n}M_k\left(D,A_{n,2m}\right)+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\right),\ t\to 0.
\end{gathered}$$

У свою чергу, остання асимптотична рівність дає можливість отримати таке асимптотичне співвідношення

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|C_k\left(t,D,A_{n,2m}\right)\right|^{-1}\right)^{-1}=\frac{\log\frac{1}{t}}{\pi n\left(\alpha+\beta\right)\left(n+4m\right)}\times$$
$$\times\left(1-\frac{\pi\left(\alpha+\beta\right)\left(n+4m\right)}{n\log\frac{1}{t}}\cdot\sum_{k=1}^{n}M_k\left(D,A_{n,2m}\right)+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1}=$$
$$=\frac{\log\frac{1}{t}}{\pi n\left(\alpha+\beta\right)\left(n+4m\right)}+\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}M_k\left(D,A_{n,2m}\right)+o(1),\ t\to0. \qquad (20)$$

З нерівностей (17), (18), враховуючи (15) та (20), маємо

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4}{n\left(\alpha+\beta\right)\left(n+4m\right)}\cdot\log\frac{1}{t}+M(D,A_{n,2m})+o(1)\leq$$
$$\leq\frac{2\log\frac{1}{t}}{\pi n\left(\alpha+\beta\right)\left(n+4m\right)}+\frac{2}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}M_k\left(D,A_{n,2m}\right)+o(1),\quad t\to0.$$

З останньої нерівності, при $t\to0$, отримаємо

$$M(D,A_{n,2m})\leq\frac{2}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}M_k\left(D,A_{n,2m}\right). \qquad (21)$$

Застосовуючи співвідношення (19) та (21) до (16), послідовно одержуємо

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{16}{n^2\cdot\left(\alpha+\beta\right)^2\left(n+4m\right)^2}\cdot\Big[\frac{\alpha n^2}{4}\log r(D,0)+$$
$$+\frac{\beta n^2}{4}\log r(D,\infty)+\frac{\sqrt{\alpha\beta}n^2}{2}g_D(0,\infty)+n\sqrt{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}g_D(0,a_{k,2p-1})+$$
$$+n\beta\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}g_D(\infty,a_{k,2p-1})+n\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}g_D(0,a_{k,2p})+n\sqrt{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}g_D(\infty,a_{k,2p})+$$
$$+\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log r(D,a_{k,2p})+\beta\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log r(D,a_{k,2p-1})+\alpha\sum_{(k,2p)\neq(q,2s)}g_D(a_{k,2p},a_{q,2s})+$$
$$+\beta\sum_{(k,2p-1)\neq(q,2s-1)}g_D(a_{k,2p-1},a_{q,2s-1})+2\sqrt{\alpha\beta}\sum_{(k,2p)\neq(q,2s-1)}g_D(a_{k,2p},a_{q,2s-1})\Big]\leq$$
$$\leq\frac{4}{\pi n^2\left(\alpha+\beta\right)^2\left(n+4m\right)^2}\cdot\Bigg[\alpha\sum_{k=1}^{n}\log\frac{r(\mathbf{\Omega}_1^{(k)},\omega_1^{(k)})}{2}+$$
$$+\beta\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r(\mathbf{\Omega}_{2p}^{(k)},\omega_{2p}^{(k)})}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k,2p-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p-1}|\right]^{-1}}+\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r(\mathbf{\Omega}_{2p+1}^{(k)},\omega_{2p+1}^{(k)})}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k,2p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p}|\right]^{-1}}+$$
$$+\beta\sum_{k=1}^{n}\log\frac{r(\mathbf{\Omega}_{2m+2}^{(k)},\omega_{2m+2}^{(k)})}{2}+\beta\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r(\mathbf{\Omega}_{-2p+4m+4}^{(k)},\omega_{k,-2p+4m+4}^{(k)})}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k+1,2p-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k+1,2p-1}|\right]^{-1}}+$$
$$+\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r(\mathbf{\Omega}_{-2p+4m+3}^{(k)},\omega_{-2p+4m+3}^{(k)})}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k+1,2p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k+1,2p}|\right]^{-1}}\Bigg].$$

З останнього, отримуємо співвідношення (9). Доведення теореми завершується подібно, як і доведення теореми 1. □

Подяка. Маю велику приємність висловити щиру вдячність проф. О. К. Бахтіну за постановку задачі та ряд цінних вказівок під час її розв'язання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Lavrent'ev M.A. *On the theory of conformal mappings//* Tr. Fiz.-Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR. – 1934. – V.5. – P. 159–245. (in Russian)
2. Goluzin G.M. Geometric theory of functions of a complex variable. – Nauka, 1966, Moscow. (in Russian)
3. Bakhtina G.P. Variational methods and quadratic differentials in problems for disjoint domains. – Author's Abstract of the Candidate-Degree Thesis (Physics and Mathematics), 1975, Kiev. (in Russian)
4. Dubinin V.N. *Separating transformation of domains and problems of extremal division//* Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Ros. Akad. Nauk. – 1988. – V.168. – P. 48–66. (in Russian)
5. Dubinin V.N. *Method of symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable//* Usp. Mat. Nauk. – 1994. – V.49, №1(295). – P. 3–76. (in Russian)
6. Dubinin V.N. *Asymptotic representation of the modulus of a degenerating condenser and some its applications//* Zap. Nauchn. Sem. Peterburg. Otdel. Mat. Inst. – 1997. – V.237. – P. 56–73. (in Russian)
7. Dubinin V.N. Capacities of condensers and symmetrization in geometric function theory of complex variables. – Dal'nayka, Vladivostok, 2009. (in Russian)
8. Bakhtin A.K., Bakhtina G.P., Zelinskii Yu.B. *Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis//* Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2008. – V.73. – 308 p. (in Russian)
9. Bakhtin A.K. *Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains and open sets//* Ukr. Mat. Zh. – 2009. – V.61, №5. – P. 596-–610. (in Ukrainian); English translation: Ukr. Math. J. – 2009. – V.61, №5. – P. 716–733.
10. Bakhtin A.K., V'un V.E., Trokhimchuk Yu.Yu. *Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains//* Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. – 2007. – №8. – P. 7–10. (in Russian)
11. Targonskii A.L. *Extremal problems of partially nonoverlapping domains on a Riemann sphere//* Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. – 2008. – №9. – P. 31–36. (in Russian)
12. Hayman W.K. Multivalent functions, Cambridge University, Cambridge, 1960.
13. Kuz'mina G.V. *Problem of extremal division of a Riemann sphere//* Zap. Nauchn. Sem. Peterburg. Otdel. Mat. Inst. – 2001. – V.276. – P. 253–275. (in Russian)
14. Emel'yanov E.G. *On the problem of the maximum of the product of powers of conformal radii of disjoint domains//* Zap. Nauchn. Sem. Peterburg. Otdel. Mat. Inst. – 2002. – V.286. – P. 103–114. (in Russian)
15. Jenkins J.A. Univalent functions and conformal mapping. – Springer, Berlin, 1962.

Zhytomyr Ivan Franko State University
targonsk@zu.edu.ua

Надійшло 6.12.2013
Після переробки 28.11.2014