УДК 517.51

В. І. Мироник, В. В. Михайлюк

РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ У КЛАСІ НАРІЗНО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

V. I. Myronyk, V. V. Mykhaylyuk. *First-order partial differential equations with variable coefficients in the class of separately differentiable functions*, Mat. Stud. **42** (2014), 33–37.

Let α be a function, which have a primitive on $\mathbb{R}$. It is obtained a general solutions of differential equation $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\alpha(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ in the class of separately differentiable functions.

В. И. Мироник, В. В. Михайлюк. *Уравнение с частными производными первого порядка с переменнными коэфициентами в классе раздельно дифференцируемых функций* // Мат. Студії. – 2014. – Т.42, №1. – C.33–37.

Пусть α — функция, имеющая первообразную на $\mathbb{R}$. Устанавливается общий вид решений дифференциальных уравнений $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\alpha(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ в классе раздельно дифференцируемых функций.

1. Вступ. Р. Бер ([1]) довів, що всі неперервні нарізно диференційовні розв'язки диференціального рівняння

$$f'_x + f'_y = 0 \tag{1}$$

мають вигляд $f(x,y)=\varphi(x-y)$. Разом з тим Р. Бер сформулював *питання* про те, чи зберігається вигляд розв'язків рівняння (1) для нарізно диференційовних функцій. Пізніше результат Р. Бера був доведений також у статті [5], а у статті [7] одержано позитивну відповідь на це *питання* Р. Бера.

Розв'язки диференціальних рівнянь з частинними похідними в класі функцій, які задовольняють мінімальні вимоги (тобто у класі нарізно диференційовних, нарізно двічі диференційовних функцій), вивчалися у роботах [2], [4], [6], [8]. У статті [9] доведено, що всі розв'язки рівняння

$$f'_x(x,y)+\alpha(x)f'_y(x,y)=0 \tag{2}$$

в класі нарізно диференційовних функцій у випадку, коли $\alpha^{-1}(0)$ — замкнена, не більш ніж зліченна множина, мають вигляд $f(x,y)=\varphi(u(x)-y)$, де u — первісна функції α. У зв'язку з цим природно виникає таке *питання*.

Питання 1. *Нехай $\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — функція, яка має первісну $u\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Чи обов'язково нарізно диференційовний розв'язок $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ рівняння (2) має вигляд $f(x,y)=\varphi(u(x)-y)$?*

2010 *Mathematics Subject Classification:* 26B05, 35A99.
Keywords: separately differentiable functions; partial differential equations.

У даній статті, розвиваючи техніку з [7], даємо позитивну відповідь на це питання.

2. Точково змінні функції і неперервні розв'язки рівняння.

Лема 1. *Нехай* $u\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *диференційовна функція,* $F\subseteq[a,b]$ — *замкнена множина,* $\varepsilon>0$. *Тоді, існує відкрита в* F *непорожня множина* G *така, що для довільних* $x_1,x_2,x_3\in G$ *виконується нерівність*

$$\Big|u'(x_1)-\frac{u(x_2)-u(x_3)}{x_2-x_3}\Big|<\varepsilon.$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$f\colon F^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{u(x)-u(y)}{x-y}, & \text{для } x,y\in F, x\neq y;\\ u'(x), & \text{для } x=y\in F.\end{cases}$$

З диференційовності функції u випливає, що f — нарізно неперервна. З результату Дж. Брекенріджа та Т. Нішіури ([3]) маємо, що існує множина A першої категорії в F така, що функція f сукупно неперервна в кожній точці множини $(F\setminus A)\times F$. Зрозуміло, що $F\setminus A\neq\varnothing$, адже F – компактна. Розглянемо довільну точку $x_0\in F\setminus A$. Оскільки f неперервна в точці (x_0,x_0), то існує відкритий окіл G точки x_0 такий, що коливання функції f на множині $G\times G$ менше, ніж ε. Зокрема, для довільних $x_1,x_2,x_3\in G$ маємо

$$\Big|u'(x_1)-\frac{u(x_2)-u(x_3)}{x_2-x_3}\Big|=|f(x_1,x_1)-f(x_2,x_3)|<\varepsilon.\qquad\square$$

Відображення $f\colon X\to Y$, визначене на метричному просторі X зі значеннями у метричному просторі Y, називається *точково змінним*, якщо для кожного $\varepsilon>0$ об'єднання G_ε системи $\mathcal{G}_\varepsilon$ усіх відкритих непорожніх множин $G\subseteq X$ таких, що $f|_G$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою ε, є скрізь щільною множиною.

Теорема 1. *Нехай* $u\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ — *диференційовна функція,* $\alpha=u'$, $f\colon(a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — *нарізно диференційовна функція,* $c\in\mathbb{R}$ *і* $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon y-u(x)=c\}$ *такі, що* $f'_x(p)+\alpha(x)f'_y(p)=0$ *для кожного* $p=(x,y)\in A$. *Тоді, функція* $g\colon(a,b)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x,u(x)+c)$, *точково змінна на кожній замкненій множині.*

Доведення. Нехай $F\subseteq(a,b)$ — замкнена. Доведемо, що звуження $g|_F$ – точково змінне. Зафіксуємо $\varepsilon>0$ і непорожню відкриту в F множину G. Покажемо, що існує непорожня відкрита в F множина $U\subseteq G$ така, що $|g(x')-g(x'')|\le\varepsilon|x'-x''|$ для довільних $x',x''\in U$.

Зауважимо, що функція $f'_y\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера ([10, теорема 4]), як і функція $\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Тому, звуження h_1 функції f'_y на множину $E=\{(x,u(x+c))\colon x\in F\}$ і звуження h_2 функції α на множину F є точково розривними. Отже, існує точка $x_0\in F$ така, що h_1 неперервна в точці $(x_0,u(x_0)+c)$, а h_2 неперервна в точці x_0. Виберемо таке $K>0$, що $\varepsilon\le 2K\sqrt{K^2+2K+2}$, і відкритий в F окіл U_1 точки x_0 такий, що $\overline{U_1}\subseteq G$ і для кожного $x\in\overline{U_1}$

$$|f'_y(x,u(x)+c)|\le K,\quad |\alpha(x)|\le K.$$

Застосовуючи лему 1 до функції u і множини $F_1=\overline{U_1}$, виберемо відкриту в F непорожню множину $U_2\subseteq U_1$ таку, що для довільних $x_1,x_2,x_3\in U_2$

$$\Big|\alpha(x_1)-\frac{u(x_2)-u(x_3)}{x_2-x_3}\Big|\le\frac{\varepsilon}{2K\sqrt{K^2+2K+2}}.\tag{3}$$

Для довільних точок $p, q \in E$, $p \neq q$, через $\theta(p,q)$ позначимо кут, який утворює вектор $\overrightarrow{pq}$ з додатним напрямком осі абсцис. Використовуючи теорему 2.2 з [7] знайдемо точку $x_0 \in U_2$ і її відкритий в F окіл $U \subseteq U_2$ такі, що

$$\Big|\frac{f(q)-f(p)}{d(q,p)} - (f'_x(p_0)\cos\theta(p,q) + f'_y(p_0)\sin\theta(p,q))\Big| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{K^2+2K+2}} \tag{4}$$

для довільних $x_p, x_q \in U$, де $p = (x_p, u(x_p)+c), q = (x_q, u(x_q)+c), p_0 = (x_0, u(x_0)+c)$ і $d(p,q)$ — евклідова відстань між точками p і q в $\mathbb{R}^2$.

Зауважимо, що $f'_x(p_0) = -\alpha(x_0)f'_y(p_0)$. Тому,

$$|f'_x(p_0)\cos\theta(p,q) + f'_y(p_0)\sin\theta(p,q)| = |f'_y(p_0)|\cdot|\cos\theta(p,q)|\cdot|\alpha(x_0) - \operatorname{tg}\theta(p,q)| \leq$$

$$\leq K|\alpha(x_0) - \operatorname{tg}\theta(p,q)|. \tag{5}$$

Зауважимо, що $\operatorname{tg}\theta(p,q) = \frac{y_q-y_p}{x_q-x_p} = \frac{u(x_q)-u(x_p)}{x_q-x_p}$. Оскільки $x_0, x_q, x_p \in U_2$, то

$$\Big|\alpha(x_0) - \frac{u(x_q)-u(x_p)}{x_q-x_p}\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2K\sqrt{K^2+2K+2}}.$$

Тому, з (5) одержимо

$$|f'_x(p_0)\cos\theta(p,q) + f'_y(p_0)\sin\theta(p,q)| \leq K|\alpha(x_0) - \operatorname{tg}\theta(p,q)| \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{K^2+2K+2}}.$$

Тому, з врахуванням (4), маємо $\frac{|f(q)-f(p)|}{d(q,p)} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{K^2+2K+2}}$ для довільних $p, q \in E$ таких, що $x_p, x_q \in U$.

Зауважимо, що

$$|y_q - y_p| \leq |\alpha(x_0)|\cdot|x_q - x_p| + \frac{\varepsilon}{2K\sqrt{K^2+2K+2}}\cdot|x_q - x_p| \leq (K+1)|x_q - x_p|.$$

Тому, $d(p,q) \leq \sqrt{K^2+2K+2}\cdot|x_q - x_p|$ для довільних $x_q, x_p \in U$. Отже, для довільних $x_q, x_p \in U$

$$|g(x_q) - g(x_p)| = |f(q) - f(p)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{K^2+2K+2}}d(q,p) \leq \varepsilon|x_q - x_p|. \qquad \square$$

3. Основний результат. Будемо використовувати наступний допоміжний результат, що доводиться подібно до леми 4.2 з [7], яка відповідає випадку функції $u(x) = x$.

Лема 2. *Нехай $I = (a,b)$ — деякий інтервал числової прямої, u — неперервна функція $c \in \mathbb{R}, \delta > 0$. Розглянемо множину $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in I, |y - u(x) - \tau| < \delta\}$ і функції $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервні, причому $f(x,y) = g(x,y)$ для всіх $(x,y) \in W$. Тоді, $f(x,y) = g(x,y)$ для всіх $(x,y) \in \overline{W}$.*

Теорема 2. *Нехай $f\colon (a,b)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — нарізно диференційовна функція і $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ — неперервна функція такі, що для кожного $\tau \in \mathbb{R}$ звуження функції f на множину $A_\tau = \{(x, u(x)+\tau)\colon x \in (a,b)\}$ є точково змінним на кожній замкненій множині. Тоді, існує диференційовна функція $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що $f(x,y) = \varphi(u(x) - y)$ для всіх $x \in (a,b), y \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Спочатку доведемо, що функція f сукупно неперервна. Припустимо, що $E = D(f) \neq \varnothing$. За теоремою 3.1 з [7] звуження $f|_E$ має точки неперервності. Виберемо точку $p_0 = (x_0, y_0) \in E$ таку, що звуження $f|_E$ неперервне в цій точці. Позначимо $\varepsilon = \omega_f(p_0)$ і $\tau_0 = y_0 - u(x_0)$. Виберемо $\delta_1 > 0$ так, що $a < x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1 < b$ і $|f(p) - f(p_0)| \leq \varepsilon/3$, для кожної точки $p \in W \cap E$, де $W = \{(x, y)\colon |x - x_0| < \delta_1, |y - u(x) - \tau_0| < \delta_1\}$. Зауважимо, що для довільної точки $q \in W$ з нерівності $|f(p_0) - f(q)| > \varepsilon/3$ випливає, що $q \notin E$, тобто функція f неперервна в точці q.

Розглянемо неперервну функцію $g(x, y) = f(x_0, u(x_0) + y - u(x))$. Зауважимо, що для кожного $\tau \in \mathbb{R}$ і довільної точки $(x, y) \in A_\tau$ маємо $g(x, y) = f(x_0, u(x_0) + \tau)$. Отже, функція g є сталою на кожній множині A_τ. Доведемо, що $f(p) = g(p)$ для довільної точки $p \in W$ з $|f(p) - f(p_0)| > \varepsilon/3$.

Зафіксуємо $p_1 = (x_1, y_1) \in W$, для якого $|f(p_1) - f(p_0)| > \varepsilon/3$. Використовуючи неперервність функції f відносно другої змінної, знайдемо таке $\delta > 0$, що для всіх $y \in [y_1 - \delta, y_1 + \delta]$ виконуються умови $|f(x_1, y) - f(x_0, y_0)| > \varepsilon/3$ і $(x_1, y) \in W$.

Позначимо через $\mathcal{I}$ систему всіх непорожніх інтервалів $I \subseteq (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ таких, що для будь-якого $x \in I$ та для довільного y з $|y - y_1 - u(x) + u(x_1)| \leq \delta$, виконується нерівність $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \varepsilon/3$. Оскільки функція f — неперервна в кожній точці компактної множини $B = \{x_1\} \times [y_1 - \delta, y_1 + \delta]$ і $|f(p) - f(p_0)| > \varepsilon/3$ для кожного $p \in B$, то існує відкритий прямокутник $P = (a_1, b_1) \times (c_1, d_1) \supseteq A$ такий, що $B \subseteq P \subseteq W$ і $|f(p) - f(p_0)| > \varepsilon/3$ для кожного $p \in P$. Виберемо $\delta_2 > 0$ так, що $a_1 < x_1 - \delta_2 < x_1 + \delta_2 < b_1$ і для всіх $x \in (x_1 - \delta_2, x_1 + \delta_2)$ виконується нерівність

$$|u(x) - u(x_1)| < \min\{y_1 - \delta - c_1, d_1 - y_1 - \delta\}.$$

Доведемо, що $I = (x_1 - \delta_2, x_1 + \delta_2) \in \mathcal{I}$. Зауважимо, що $I \subseteq (a_1, b_1) \subseteq (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Нехай $x \in I$, тобто $|x - x_1| < \delta_2$ і $|y - y_1 - u(x) + u(x_1)| \leq \delta$. Маємо

$$y \geq y_1 + u(x) - u(x_1) - \delta \geq y_1 - \delta - |u(x) - u(x_1)| > y_1 - \delta - y_1 + \delta + c_1 = c_1,$$
$$y \leq y_1 + u(x) - u(x_1) + \delta \leq y_1 + \delta + |u(x) - u(x_1)| < y_1 + \delta + d_1 - y_1 - \delta = d_1.$$

Отже, $y \in (c_1, d_1)$ і $(x, y) \in P$. Тому, за вибором P, маємо $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \varepsilon/3$. Звідки, $I \in \mathcal{I}$, зокрема, множина $\mathcal{I}$ — непорожня.

Покладемо

$$\tau_1 = y_1 - u(x_1),\ I_0 = (a_0, b_0) = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I,\ W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x \in I_0, |y - u(x) - \tau_1| \leq \delta\}.$$

Зауважимо, що $|f(p) - f(p_0)| > \varepsilon/3$ для всіх $p \in W_1 \subseteq W$, зокрема $I_0 \in \mathcal{I}$. Тоді, функція f неперервна в кожній точці множини W_1. За умовою, для кожного $\tau \in [\tau_1 - \delta, \tau_1 + \delta]$ функція $f(x, u(x) + \tau)$ точково змінна на кожній замкненій підмножині інтервала I_0. Тому, за теоремою 3.2 ([7]) функція $f(x, u(x) + \tau)$ є сталою. Отже, $f(x, y) = f(x, u(x) + y - u(x)) = f(x_1, u(x_1) + y - u(x))$ для довільних $(x, y) \in W_1$.

Доведемо, що $I_0 = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Припустимо, що $a_0 > x_0 - \delta_1$. Тоді, за лемою 2 $f(x, y) = f(x_1, u(x_1) + y - u(x))$ для довільних $(x, y) \in \overline{W_1}$, зокрема, $f(a_0, y) = f(x_1, u(x_1) + y - u(a_0))$ для довільних $y \in [u(a_0) + \tau_1 - \delta, u(a_0) + \tau_1 + \delta]$. Позначимо $B_1 = \{(a_0, y)\colon |y - u(a_0) - \tau_1| \leq \delta\}$. Зауважимо, що $(x_1, u(x_1) + y - u(a_0)) \in B_1$, якщо $y \in [u(a_0) + \tau_1 - \delta, u(a_0) + \tau_1 + \delta]$, тому, $|f(p) - f(p_0)| > \varepsilon/3$ для кожного $p \in B_1$. Оскільки $B_1 \subseteq W$, то функція f неперервна в кожній точці множини B_1. Тому, існує непорожній інтервал $I_1 \subseteq (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ такий, що $a_0 \in I_1$ і $|f(x,y)-f(x_0,y_0)| > \varepsilon/3$ для довільних $x \in I_1$ і $y \in \mathbb{R}$ з $|y-u(x)-\tau_1| \leq \delta$. Тоді, $I_0 \bigcup I_1 \in \mathcal{I}$ і I_1 не є підмножиною I_0, що суперечить означенню множини I_0. Подібно міркуємо, якщо $b < x_0+\delta$.

Отже, $I_0 = (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$. Тоді, $(x_0, x_0+\tau_1) \in W_1$ і $f(x_0, x_0+c_1) = f(x_1, x_1+\tau_1) = f(x_1, y_1)$, тому, $g(x_1,y_1) = f(x_0, x_0+\tau_1) = f(x_1,y_1)$.

Оскільки $\omega_f(p_0) = \varepsilon$, то існує послідовність $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $q_n = (u_n, v_n) \in W$ така, що $|f(q_n) - f(p_0)| > \varepsilon/3$ і $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = p_0$. Тоді, врахувавши, що g неперервна функція, одержимо $\lim\limits_{n\to\infty} f(q_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(q_n) = g(p_0) = f(p_0)$. А це суперечить вибору $(q_n)_{n=1}^{\infty}$.

Отже, $E = D(f) = \varnothing$, тобто, f сукупно неперервна. За теоремою 3.2 з [7] функція f стала на кожній множині A_τ. Позначаючи тепер через $\varphi(\tau)$ значення функції f на A_τ, одержимо, що $f(x,y) = \varphi(u(x)-y)$ для будь-якого $(x,y) \in (a,b)\times\mathbb{R}$. Диференційовність φ тепер випливає з диференційовності f відносно змінної y. $\square$

З теорем 1 і 2 випливає таке твердження.

Теорема 3. *Нехай $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ — диференційовна функція, $\alpha = u'$ і $f\colon (a,b)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — нарізно диференційовний розв'язок рівняння (2). Тоді, існує диференційовна функція $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що $f(x,y) = \varphi(u(x)-y)$.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Baire R. *Sur les fonctions de variables relles*// Annali di mat. pura ed appl. – 1899. – V.3, P. 1–123.
2. Banakh T., Mykhaylyuk V. *Separately twice differentiable functions and the equation of string oscillation*// Real Anal. Exch. – 2012/2013. – V.38, №1. – P. 133–156.
3. Breckenridge J.C., Nishiura T. *Partial continuity, quasicontinuiuty and Baire spaces*// Bull. Inst. Acad. Sinica. – 1976. – V.4, №2. – P. 191–203.
4. Bruckner A.M., Petruska G., Preiss O., Thomson B.S. *The equation $u_x u_y = 0$ factors*// Acta. Math. Hung. – 1991. – V.57 №3–4. – P. 275–278.
5. Chernoff P.R., Royden H.F. *The equation $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$*// Am. Math. Mon. – 1975. – V.82, №5. – P. 530–531.
6. Kalancha A.K., Maslyuchenko V.K. *Generalization of Bruckner-Petruska-Preiss-Thomson theorem*// Mat. Stud. – 1999. – V.11, №1. – P. 48–52. (in Ukrainian)
7. Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V. *Solving of partial differential equations under minimal conditions*// J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2008. – V.4, №2. – P. 252–266.
8. Maslyuchenko V.K. *A property of partial derivatives*// Ukr. Math. J. – 1987. – V.39, №4. – P. 529–531. (in Russian)
9. Myronyk V.I., Mykhaylyuk V.V. *First-order linear partial differential equations in the class of separately differentiable functions*// Carpathian Mathematical Publications. – 2013. – V.5, №1. – P. 89–93.
10. Tolstov H.P. *On pathional derivatives*// Izvestia AN SSSR, Ser. Matem. – 1949. – V.13, №5. – P. 425–446. (in Russian)

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University
vadmyron@gmail.com
vmykhaylyuk@ukr.net

Надійшло 10.05.2014
Після переробки 25.10.2014