УДК 517.52

В. Ю. Слюсарчук

# НОВА ІНТЕГРАЛЬНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ

V. Yu. Slyusarchuk. *New integral test for convergence of series*, Mat. Stud. **41** (2014), 198–200.

We obtain new integral test for convergence of series.

В. Е. Слюсарчук. *Новый интегральный признак сходимости рядов* // Мат. Студії. – 2014. – Т.41, №2. – С.198–200.

Получен новый интегральный признак сходимости рядов.

У даній статті наведено інтегральну ознаку, що дає змогу досліджувати на збіжність, зокрема, числові ряди, члени яких можуть мати довільні знаки.

**1. Інтегральні ознаки збіжності числових рядів.** Нехай $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел, $\mathbb{C}$ — множина всіх комплексних чисел і $[b]$ — ціла частина числа $b$.

Важливою для теорії рядів є інтегральна ознака Маклорена-Коші [1], що зводить дослідження збіжності числових рядів із додатними монотонно незростаючими членами до дослідження збіжності невластивих інтегралів. Наведемо її формулювання.

**Теорема 1.** *Нехай: 1) $a_n \in (0, +\infty)$, $n \geqslant 1$; 2) $f\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ — неперервна монотонно незростаюча функція і $f(n) = a_n$, $n \geqslant 1$. Тоді числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і невластивий інтеграл $\int_1^{\infty} f(t)dt$ одночасно збігаються або розбігаються.*

Для дослідження збіжності числових рядів, члени яких можуть бути довільними, зокрема, не дійсними, можна використовувати наступну інтегральну ознаку.

**Теорема 2.** *Нехай функція $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{C}$ неперервна і збігається невластивий інтеграл $\int_1^{\infty}(f(t) - f([t]))dt$. Тоді числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ і невластивий інтеграл $\int_1^{\infty} f(t)dt$ одночасно збігаються або розбігаються.*

Очевидно, що невластивий інтеграл $\int_1^{\infty}(f(t) - f([t]))dt$ збігається, якщо, наприклад, збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{t\in(n,n+1]} |f(t) - f([t])|$ або збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\tau\in(n,n+1)} |f'(\tau)|$ у випадку диференційовної на $(1, +\infty)\backslash\mathbb{N}$ функції $f$.

Теорема 2 є окремим випадком твердження, що наводиться й обґрунтовується в наступному пункті.

**2. Векторний аналог теорем 2.** Нехай $E$ — банахів простір.

**Теорема 3.** *Нехай: 1) $f\colon [1, +\infty) \to E$ — неперервне відображення; 2) збігається невластивий інтеграл $\int_1^{\infty}(f(t) - f([t]))dt$. Тоді векторний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ і невластивий інтеграл $\int_1^{\infty} f(t)dt$ одночасно збігаються або розбігаються.*

2010 *Mathematics Subject Classification:* 40A05, 40A10.
*Keywords:* series, the integral test.

*Доведення.* Завдяки першій умові теореми справджується співвідношення

$$\int_1^b f(t)dt = \sum_{n=1}^{[b]-1} f(n) + \int_1^{[b]} (f(t) - f([t]))dt + \int_{[b]}^b f(t)dt, \quad b \geq 2. \tag{1}$$

Якщо інтеграл $\int_1^\infty f(t)dt$ збігається, то існує границя $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_1^b f(t)dt$. Тому $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_{[b]}^b f(t)dt = 0$ і на підставі (1) та другої умови теореми існує границя $\lim\limits_{b\to+\infty} \sum_{n=1}^{[b]} f(n)$.

Отже, із збіжності інтеграла $\int_1^\infty f(t)dt$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

Навпаки, якщо ряд $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ збігається, то $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$. Завдяки другій умові теореми також $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_{[b]}^b (f(t) - f([t]))dt = 0$ і тому $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_{[b]}^b f(t)dt = 0$. Отже, кожний доданок правої частини (1) є збіжним при $b \to +\infty$. Тому існує границя $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_1^b f(t)dt$.

Отже, із збіжності ряду $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ випливає збіжність інтеграла $\int_1^\infty f(t)dt$.

Із наведених міркувань випливає твердження теореми. □

**3. Приклад застосування теореми 2.** Проілюструємо теорему 2 дослідженням збіжності наступного знакозмінного числового ряду

$$\sum_{n=3^3}^{\infty} (\cos \ln \ln n) n^{-1} (\ln n)^{-1} (\ln \ln n)^{-p}, \tag{2}$$

де $p \in \mathbb{R}$.

Використаємо функцію $f(t) = (\cos \ln \ln t) t^{-1} (\ln t)^{-1} (\ln \ln t)^{-p}$. Очевидно, що

$$\begin{gathered} f'(t) = (-\sin \ln \ln t) t^{-2} (\ln t)^{-2} (\ln \ln t)^{-p} - (\cos \ln \ln t) t^{-2} (\ln t)^{-1} (\ln \ln t)^{-p} - \\ -(\cos \ln \ln t) t^{-2} (\ln t)^{-2} (\ln \ln t)^{-p} - p (\cos \ln \ln t) t^{-2} (\ln t)^{-2} (\ln \ln t)^{-p-1}, \\ |f'(t)| \leqslant (3 + |p|) t^{-2} (\ln t)^{-1} (\ln \ln t)^{|p|+1}, \quad t \geqslant 3^3. \end{gathered}$$

Завдяки останньому співвідношенню числовий ряд $\sum_{n=3^3}^\infty \sup_{\tau\in(n,n+1)} |f'(\tau)|$ збігається і, отже, збігається невластивий інтеграл $\int_{3^3}^\infty (f(t) - f([t]))dt$ (для кожного $p \in \mathbb{R}$). Тому за теоремою 2 при кожному $p \in \mathbb{R}$ ряд (2) і невластивий інтеграл

$$\int_{3^3}^\infty (\cos \ln \ln t) t^{-1} (\ln t)^{-1} (\ln \ln t)^{-p} dt \tag{3}$$

поводять себе однаково в сенсі збіжності. Досліджувати на збіжність інтеграл (3) легше, ніж ряд (2). Справді, використавши для (3) заміну змінної $s = \ln \ln t$, отримаємо рівність

$$\int_{3^3}^\infty (\cos \ln \ln t) t^{-1} (\ln t)^{-1} (\ln \ln t)^{-p} dt = \int_{\ln \ln 3^3}^\infty (\cos s) s^{-p} ds.$$

Очевидно, що при $p > 0$ невластивий інтеграл $\int_{\ln \ln 3^3}^{+\infty} (\cos s) s^{-p} ds$ збігається за ознакою Діріхле ([1]). При $p \leqslant 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, очевидно, справджується нерівність $\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi/3} (\cos s) s^{-p} ds > \pi (2n\pi)^{|p|}/6$ і тому $\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi/3} (\cos s) s^{-p} ds \not\to 0$ при $n \to +\infty$.

Отже, при $p \leqslant 0$ інтеграл $\int_{\ln \ln 3^3}^\infty (\cos s) s^{-p} ds$ розбігається.

Таким чином, невластивий інтеграл (3) збігається лише при $p > 0$. За теоремою 2 *числовий ряд* (2) *також збігається лише при* $p > 0$.

**4. Множина рядів, до яких застосовна теорема 3.** Справджується наступне твердження.

**Теорема 4.** *Для кожного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \in E,\ n \in \mathbb{N})$*, для якого* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*, існує неперервне відображення* $f\colon [1, +\infty) \to E$*, для якого* $f(n) = a_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, і невластивий інтеграл* $\int_1^{\infty}(f(t) - f([t]))dt$ *збігається.*

*Доведення.* Розглянемо неперервне відображення $f\colon [1, +\infty) \to E$, що на проміжку $[n, n+1)$, де $n \in \mathbb{N}$, визначається рівністю

$$f(t) = \begin{cases} a_n, & \text{якщо } t \in [n, n+1-n^{-2}); \\ a_n + n^2\left(t - n - 1 + n^{-2}\right)(a_{n+1} - a_n), & \text{якщо } t \in [n+1-n^{-2}, n+1). \end{cases}$$

Оскільки обмежена функція $f(t) - f([t])$ може приймати ненульові значення лише на множині $\bigcup_{n\geqslant 1}(n+1-n^{-2}, n+1)$ і міра Лебега цієї множини скінченна, то невластивий інтеграл $\int_1^{\infty}(f(t) - f([t]))dt$ збігається. □

Отже, *для кожного ряду, загальний член якого прямує до* 0 *при* $n \to \infty$*, застосовна інтегральна ознака (теорема 3) при відповідному виборі простору* $E$ *та відображення* $f$.

На завершення зазначимо, що інші ознаки збіжності рядів можна знайти, наприклад, в [2]–[4].

## Література


1. Fichtengolz G.M. Differential and integral calculus. – Moskow: Nauka, 1966, V.2. – 800 p. (in Russian)
2. Slyusarchuk V.Ye. *Operator analogue of D'Alembert's test*// Mathematics today '09, Kiev: Izdat. "Osvita Ukraine". – 2009. – №15. – P. 101–115. (in Russian)
3. Slyusarchuk V.Yu. *Operator analogue of Cauchy's test*// Mat. Stud. – 2010. – V.33, №1. – P. 97–100. (in Ukrainian)
4. Slyusarchuk V.Yu. *Operator analogue of Bertrand's test*// Mat. Stud. – 2011. – V.35, №2. – P. 181–195. (in Ukrainian)



National University of Water Management
and Nature Resources Use, Rivne
V.E.Slyusarchuk@gmail.com



*Надійшло 8.09.2013*
*Після переробки 15.04.2014*