УДК 517.5

В. Дільний

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ДЗЕТА–ФУНКЦІЇ РІМАНА І ЦИКЛІЧНІСТЬ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ ГАРДІ

V. Dilnyi. *Some properties of the Riemann zeta-function and cyclicity in weighted Hardy spaces*, Mat. Stud. **41** (2014), 115–122.

We consider some reformulation of the Riemann Hypothesis in terms of cyclic functions in a weighted Hardy space with an exponential weight. We indicate a distinctive feature of the weighted case from the classical one. Also we consider connection of the Riemann Hypothesis with a convolution type equation in the semistrip.

В. Дильный. *Некоторые свойства дзета-функции Римана и цикличность в весовых пространствах Харди* // Мат. Студії. – 2014. – Т.41, №2. – С.115–122.

Рассматриваются некоторые переформулировки гипотезы Римана в терминах циклических функций в класическом, а также в весовом пространствах Харди с экспоненциальным весом. При этом указывается, что весовой случай имеет некоторые качественные отличия от классического. Также рассматривается связь гипотезы Римана с уравнением типа свёртки в полуполосе.

Вступ. Дзета-функція Рімана ζ для s, Re $s > 1$ визначається рядом Діріхле

$$\zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s},$$

який збігається рівномірно для всіх $\operatorname{Re} s > 1 + \delta$, $\delta > 0$, і аналітично продовжується на всю комплексну площину крім точки $s = 1$, в якій має простий полюс з лишком, що дорівнює 1. Функція ζ задовольняє функціональне рівняння

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s).$$

Останнє рівняння переписується у вигляді $\xi(s) = \xi(1-s)$ для функції

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

або $\Theta(t) = \Theta(-t)$ для функції $\Theta(t) = \xi(1/2 + it)$. Функція $\Theta(t)$ є парною цілою, дійсною на дійсній осі, а всі її дійсні нулі відповідають нулям дзета-функції на вертикальній прямій $\{s\colon \text{Re } s = 1/2\}$. Оскільки $1/\Gamma(s)$ — ціла функція з простими нулями в точках $z = -n$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, то негайно отримуємо, що $s = -2n$ $(n \in \mathbb{N})$ — прості нулі (так звані — тривіальні) функції ζ, а зважаючи на те, що $\zeta(s) \neq 0$ при $s > 1$, то $\zeta(s) \neq 0$ при

2010 *Mathematics Subject Classification:* 11M26, 30D55.
Keywords: outer function; cyclic function; Riemann zeta-function; weighted Hardy space.

$0 < s < 1$ і, тому, всі нетривіальні нулі лежать у смузі $\{s\colon 0 \le \operatorname{Re} s \le 1\}$ симетрично відносно прямої $\{s\colon \operatorname{Re} s = 1/2\}$. *Гіпотеза Рімана* полягає в тому, що всі нетривіальні нулі дзета-функції ζ лежать на прямій $\{s\colon \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$ ([1]).

В роботах Б. Німана ([2]), А. Бьорлінга ([3]), П. Лакса ([4]), Н. К. Нікольського ([5]), В. І. Васюніна ([6]) та інших авторів одержано ряд теорем, які встановлюють еквівалентність гіпотези Рімана і деяких тверджень про повноту систем функцій. Близьке твердження отримав Ж.-Ф. Бурноль, який довів ([7]) твердження еквівалентне до формулювання гіпотези Рімана в термінах зовнішніх функцій для простору Гарді H^2 у півплощині. Його результат базується на твердженнях про повноту деяких систем функцій і властивостях трансляційно інваріантних просторів, зокрема на теоремі Бьорлінга-Лакса, яку можна розглядати також як опис циклічних функцій у просторах Гарді.

Функцію G назвемо *циклічною* в просторі Гарді $H^p(\mathbb{C}_+)$, $p \ge 1$, у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}$, якщо $G \in H^p(\mathbb{C}_+)$ і система

$$\{G(z)e^{\tau z}\colon \tau \le 0\} \tag{1}$$

є повною в $H^p(\mathbb{C}_+)$.

Термін *циклічна* вперше використав Г. Шапіро ([8]). Це поняття на сьогодні має цікаві і глибокі застосування в функціональному аналізі. Відзначимо також, що теорема Бурноля (як і інші результати теорії Бьорлінга-Лакса) цікаві для теорії розсіяння Лакса-Філліпса (див., наприклад, [9], [10]). Множення на $e^{\tau z}$ можна розглядати як оператор зсуву (див. [5]) $G \to e^{\tau z}G$. Дослідження різних видів циклічності (гіперциклічності, мультициклічності) в різноманітних лінійних просторах для оператора зсуву та інших типів операторів активно проводяться протягом останніх десятиліть.

Б. Винницький розглянув ([11]) простір Гарді з експоненціальною вагою $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ та дослідив деякі властивості цього простору. Простір Пелі-Вінера W^p_σ, тобто простір цілих функцій експоненціального типу $\le \sigma$, що належать до $L^2(\mathbb{R})$, є підпростором (див. [12]) простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. У [13]–[15] були відшукані всі циклічні функції в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Нам невідомо про повні описи циклічних функцій в інших вагових просторах Гарді з нетривіальною вагою (див. [14]). У випадку $\sigma > 0$ маємо деякі істотні відмінності від класичного випадку $H^2(\mathbb{C}_+) = H^2_0(\mathbb{C}_+)$. Зокрема, множник e^{cz} (або, що те ж саме у даному випадку, число $\overline{\lim}_{x\to+\infty}(\ln|G(x)|/x))$ не впливає на циклічність функції, а модуль кутової граничної функції на $i\mathbb{R}$ може впливати на циклічність.

Використовуючи ці результати, ми одержуємо деякі нові формулювання гіпотези Рімана в термінах вагових просторів Гарді, а також в термінах властивостей одного рівняння типу згортки. Основний результат цієї статті — теорема 5. Також обговорюємо перспективи одержаних результатів для подальшого просування в дослідженні гіпотези Рімана.

1. ζ-функція і простір Гарді. Перейдемо до точних формулювань. Через $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, позначимо простір Гарді, тобто простір аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}$ функцій, для яких

$$\|f\| := \|f\|_p = \sup_{x>0}\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^p dy\Big\}^{1/p} < +\infty.$$

Властивості цих просторів добре вивчені і детально описані в [18]. Там, зокрема, доведено, що кожен простір $H^p(\mathbb{C}_+), 1 \le p < +\infty$, з нормою $\|\cdot\|_p$ є банаховим. Функції G з цих просторів мають кутові граничні значення $G(iy)$ майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ і $G(iy) \in L^p(\mathbb{R})$.

Функція G називається *зовнішньою* в $H^p(\mathbb{C}_+)$, якщо вона зображається у вигляді

$$G(z) = e^{i\alpha} \exp\Big\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz+i}{(t+iz)(1+t^2)} \ln|G(it)|\,dt\Big\},\ \alpha\in\mathbb{R},\ G\in L^p(\partial\mathbb{C}_+).$$

Наступне твердження дає повний опис (див. [4]) зовнішніх функцій в $H^2(\mathbb{C}_+)$.

Теорема 1 (Бьорлінг А., Лакс П.)**.** *Якщо $G\in H^2(\mathbb{C}_+)$, то наступні твердження еквівалентні:* 1) *G є циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$;* 2) *рівняння*

$$\int_{-\infty}^{0} f(u+\tau)g(u)dw = 0,\ \tau\le 0,\ g\in L^2(-\infty;0),$$

де

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} g(u)e^{uz}du,$$

має тільки нульовий розв'язок в $L^2(-\infty;0)$; 3) *G не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$,*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\,\frac{1}{x}\ln|G(x)| = 0$$

і сингулярна гранична функція функції G є сталою; 4) *G є зовнішньою в $H^2(\mathbb{C}_+)$.*

Ми дамо означення сингулярної граничної функції в дещо загальнішому випадку нижче. Використовуючи ідеї Німана і Бьорлінга-Лакса, Ж.-Ф. Бурноль одержав ([7]) наступний результат.

Теорема 2 (Ж.-Ф. Бурноль)**.** *Гіпотеза Рімана справджується тоді і тільки тоді, коли функція $\frac{z-1/2}{(z+1/2)^2}\zeta(z+1/2)$ є зовнішньою в $H^2(\mathbb{C}_+)$.*

2. ζ-функція і ваговий простір Гарді. Б. Винницький розглянув ([11]) простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $p\ge 1$, $\sigma\ge 0$, аналітичних функцій в $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\|G\| := \sup_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}\Big\{\int_0^{+\infty} |G(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|}dr\Big\}^{1/p} < +\infty.$$

Функції $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ мають кутові граничні значення $G(iy)$ майже скрізь на $i\mathbb{R}$ і $G(iy)e^{-\sigma|y|}\in L^p(\mathbb{R})$. Якщо $\sigma=0$ (див. [19]), то $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ збігається з простором Гарді $H^p(\mathbb{C}_+)$. Функція $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ має (див. [17], [21]) сингулярну граничну функцію h, яка може бути визначена в точках неперервності з точністю до адитивної сталої за допомогою рівності

$$h(t_2)-h(t_1) = \lim_{x\to 0+}\int_{t_1}^{t_2}\ln|G(x+iy)|dy - \int_{t_1}^{t_2}\ln|G(iy)|dy.$$

Можливо, для функції h можна запропонувати більш вдалий термін, ніж "сингулярна гранична функція", але ми його використовуємо в цій усталеній формі.

Функція G називатимемо *циклічною* в $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, якщо $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і система (1) повна в $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Для подальшого нам потрібен наступний результат (див. [14]).

Лема 1. *Нехай $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$. Наступні умови еквівалентні: а) G — циклічна в H^2_σ; б) G не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$, сингулярна гранична функція функції G є сталою і*

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|\,dt-\frac{\sigma}{\pi}\ln r\right)=-\infty; \tag{2}$$

в) G не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$, сингулярна гранична функція функції G є сталою і

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|G(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right)=+\infty.$$

Розглянемо зв'язок термінів "циклічна функція" в просторах $H^2(\mathbb{C}_+)$ і $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$,$\sigma > 0$.

Теорема 3. *Якщо функція $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$ є циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$, то вона циклічна в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для кожного $\sigma > 0$.*

Доведення. Оскільки G — циклічна в $H^2(\mathbb{C}_+)$, то за теоремою Бьорлінга-Лакса вона є зовнішньою в цьому просторі. Тому G не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$, сингулярна гранична функція функції G є сталою і

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln|G(x)|}{x}=0.$$

Очевидно, що $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для всіх $\sigma > 0$. За лемою 1 нам залишилось встановити, що

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|\,dt-\frac{\sigma}{\pi}\ln r\right)=-\infty.$$

для всіх $\sigma > 0$. Це випливає з нерівності

$$\varliminf_{r\to\infty}\int_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|\,dt<+\infty.$$

Нескладно побачити, що

$$\int_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|\,dt\le\int_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln^+|G(it)|dt\le$$
$$\le\int_{1<|t|\le r}\frac{1}{t^2}\ln^+|G(it)|dt<c<+\infty,$$

де $\ln^+ t = \max\{0; \ln t\}$ і стала c не залежить від r. Очевидно, що $\frac{1}{t^2} \le \frac{2}{t^2+1}$, $t \ge 1$, і залишилось перевірити, що

$$\int_{1<|t|\le r}\frac{\ln^+|G(it)|}{1+t^2}dt<c_1<+\infty,$$

де стала c_1 не залежить від r. Але це випливає ([18]) з того, що $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$. □

Приклад функції $G(z) = \frac{e^{-z}}{z+1}$ вказує на те, що обернене твердження не правильне.

Теорема 4. *Якщо $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$ — циклічна в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для деякого $\sigma > 0$ і*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \left(\frac{\ln|G(x)|}{x}\right) = 0,$$

то G є циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$.

Доведення. Оскільки G є циклічною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, то за лемою 1 маємо, що G не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$ і сингулярна гранична функція функції G є сталою. Тому, з умов цієї леми за теоремою Бьорлінга-Лакса одержимо, що G — циклічна в $H^2(\mathbb{C}_+)$. □

Наслідок 1. *Якщо $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$ і $\overline{\lim}_{x\to+\infty}(\ln|G(x)|/x) = 0$, то G є циклічною в просторі $H^2(\mathbb{C}_+)$ тоді і тільки тоді, коли вона є циклічною у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для кожного $\sigma > 0$.*

Позначимо через $E^2_*[D_\sigma]$, $\sigma \geq 0$, простір аналітичних в $D^*_\sigma = \{z\colon |\mathrm{Im}\, z| > \sigma \vee \mathrm{Re}\, z > 0\}$ функцій, що задовольняють умову

$$\|f\| = \sup\left\{\int_\gamma |f(z)|^p|dz|\right\}^{1/p} < +\infty, \tag{3}$$

де супремум береться за всіма відрізками γ, що лежать в області D^*_σ. Також позначимо через $E^2[D_\sigma]$, $\sigma > 0$, простір аналітичних в $D_\sigma = \{z\colon |\mathrm{Im}\, z| < \sigma \wedge \mathrm{Re}\, z < 0\}$ функцій, що задовольняють умову (3), де γ — довільний відрізок в області D_σ. $E^2[D_\sigma]$ і $E^2_*[D_\sigma]$ є банаховими просторами для вказаних вище норм. Властивості цих просторів досліджувались в [11].

Теорема 5. *Нехай для аналітичної в $\mathbb{C}_+$ функції G_1 виконуються умови: а) сингулярна гранична функція функції G_1 є сталою; б) G_1 має єдиний простий нуль в $z = 1/2$; в) $G_1(z)\zeta(z+1/2) \in H^2_{\widehat{\sigma}}(\mathbb{C}_+)$ $(\widehat{\sigma} > 0)$;*
г)

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{1<|t|\leq r}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|G_1(it)|\,dt - \frac{\widehat{\sigma}}{\pi}\ln r\right) = -\infty. \tag{4}$$

Тоді наступні два твердження еквівалентні: 1) справджується гіпотеза Рімана; 2) для кожного $\sigma \geq \widehat{\sigma}$ функція $G_1(z)\zeta(z+1/2)$ циклічна в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Доведення. 1) ⇒ 2) В [22, с.116], доведено таку оцінку $|\zeta(it+1/2)| = O(\log^{2/3}|t|)$ $(t \to +\infty)$. Звідси випливає, що

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{1}{2\pi}\int_{1<|t|\leq r}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|\zeta(it+1/2)|\,dt < +\infty.$$

Комбінуючи останню нерівність з (4), одержимо

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{1<|t|\leq r}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|G_1(it)\,\zeta(it+1/2)|\,dt - \frac{\widehat{\sigma}}{\pi}\ln r\right) = -\infty. \tag{5}$$

Якщо гіпотеза Рімана правильна, то $G_1(z)\zeta(z+1/2)$ не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$. Функція ζ аналітична в смузі $\{z\colon 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$, тому сингулярна гранична функція функції $\zeta(z+1/2)$ на $i\mathbb{R}$ є сталою. Отже, за умовами теореми сингулярна гранична функція функції $G_1(z)\zeta(z+1/2) \in H^2_{\widehat{\sigma}}(\mathbb{C}_+)$ також дорівнює тотожно сталій. Звідси, за умовою

(5) за допомогою леми 1 одержимо, що $G_1(z)\zeta(z+1/2)$ є циклічною в $H^2_{\widehat{\sigma}}(\mathbb{C}_+)$. Тоді умови б) леми 1 виконуються для функції $G(z)=G_1(z)\zeta(z+1/2)$ і числа $\sigma=\widehat{\sigma}$. Легко бачити, що умова (2) справджується для всіх $\sigma\ge\widehat{\sigma}$. Оскільки G належить до $H^2_{\widehat{\sigma}}(\mathbb{C}_+)$, то належить й до $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Тому, за лемою 1 робимо висновок, що G — циклічна в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$.
2) $\Rightarrow$ 1) Якщо $G_1(z)\zeta(z+1/2)$ — циклічна в $H^2_{\widehat{\sigma}},(\mathbb{C}_+)$, то, за лемою 1, $G_1(z)\zeta(z+1/2)$ не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$. G_1 є аналітичною функцією в $\mathbb{C}_+$, зокрема, не має там особливих точок. Тому, ζ не має жодного нуля в $\{z\colon \operatorname{Re} z>1/2\}$. □

Сформулюємо твердження, яке може виявитись корисним у подальших дослідженнях дзета-функції Рімана.

Наслідок 2. *Нехай для аналітичної в $\mathbb{C}_+$ функції G_1 виконуються умови: а) сингулярна гранична функція функції G_1 є сталою; б) G_1 має єдиний простий нуль в $z=1/2$; в) $G_1(z)\zeta(z+1/2)\in H^2_{\widehat{\sigma}}(\mathbb{C}_+)$ ($\widehat{\sigma}>0$); г) виконується умова (4). Тоді твердження 1) попередньої теореми еквівалентне до кожного з наступних двох тверджень: 3) для кожного $\sigma\ge\widehat{\sigma}$ рівняння*

$$\int_{\partial D_\sigma} f\,(w+\tau)\widetilde{g}\,(w)\,dw=0,\quad \tau\le 0, \tag{6}$$

де $\widetilde{g}(w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}G_1(x)\zeta(x+1/2)e^{-xw}dx$, не має жодного відмінного від тотожнього нуля розв'язку $f\in E^2[D_\sigma]$; 4) для кожного $\sigma\ge\widehat{\sigma}$ рівняння (6) не має розв'язків вигляду $f(w)=e^{\lambda w}$, $0<\operatorname{Re}\lambda<1/2$.

Доведення. Еквівалентність умов 2) і 3) доведено в [20].
4) $\Rightarrow$ 2) Якщо припустити, що $f(w)=e^{\lambda w}$ — розв'язок рівняння (6), то ([20]) λ є нулем функції $G_1(z)\zeta(z+1/2)$. Але, за лемою 1 $G_1(z)\zeta(z+1/2)$ не має нулів в $\mathbb{C}_+$. Суперечність. Імплікація 3) $\Rightarrow$ 4) тривіальна. □

Зауваження 1. Теорема 5 і наслідок 2 залишаються правильними, якщо в умовах 2)–4) слова "для всіх $\sigma\ge\widehat{\sigma}$" замінити на "для деякого $\sigma\ge\widehat{\sigma}$".

3. Обговорення гіпотези Рімана. З допомогою теореми 5 легко отримуються такі твердження.

Наслідок 3. *Гіпотеза Рімана справджується тоді і тільки тоді, коли функція $\frac{z-1/2}{(z+1/2)^2}\zeta(z+1/2)$ є циклічною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для деякого $\sigma\ge 0$.*

Для випадку $\sigma=0$ це твердження збігається з теоремою 2.

Наслідок 4. *Гіпотеза Рімана справджується тоді і тільки тоді, коли функція $\zeta(z+1/2)(z-1/2)e^{-z}$ є циклічною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для деякого $\sigma>0$.*

Наслідок 5. *Гіпотеза Рімана справджується тоді і тільки тоді, коли функція $\zeta(z+1/2)(z-1/2)\exp\left(-\frac{2\sigma_1}{\pi}z\log z\right)$, $\sigma_1>0$, є циклічною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для деякого $\sigma>\sigma_1$.*

Поняття циклічності в (звичайному) просторі Гарді має деякі якісні відмінності від поняття циклічності у ваговому випадку. Зокрема, циклічні функції в просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma>0$, (але не в $H^2(\mathbb{C}_+)$) мають властивість "сильної немінімальності" (див. [15]). Під цим ми розуміємо той факт, що система (1) повна в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ тоді і тільки тоді, коли система $\{G(z)e^{\tau z}\colon \tau\le\tau_0\}$ повна для довільного $\tau_0<0$. Це означає, що твердження гіпотези Рімана випливає з повноти системи, яка містить "набагато менше функцій", ніж система (1), яка фактично є в щойно наведених наслідках.

Існування нетривіального розв'язку рівняння

$$\int_{\partial D_\sigma} f\,(w+\tau)g\,(w)\,dw = 0, \tau \le 0, \tag{7}$$

(див. наслідок 2) для деяких випадків (див. [23]) є наслідком імплікації $f\,(w+\tau)\,g\,(w) \in E^1[D_\sigma]$ або $f\,(w+\tau)\,g\,(w) \in E^1_*[D_\sigma]$ (ми розглядаємо аналітичні продовження відповідно функцій f і g через ∂D_σ). Але якщо розв'язок породжений нулем функції G, то ситуація може виявитись складнішою.

Приклад 1. Існують функції $f \in E^2[D_\sigma]$ і $g \in E^2_*[D_\sigma]$, для яких справджується рівність (7), але $f\,(w+\tau)\,g\,(w) \notin E^1[D_\sigma]$ і $f\,(w+\tau)\,g\,(w) \notin E^1_*[D_\sigma]$.

Справді, розглянемо функцію $G(z) = \frac{1-\cos\sigma z}{z} \in H^2_\sigma\,(\mathbb{C}_+)$. Тоді одержимо, що

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\sigma x}{x} e^{-wx} dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \ln\left(1+\frac{\sigma^2}{w^2}\right), \mathrm{Re}\, w > 0,$$

(див. [16], 861.03). Легко бачити, що $z_1 = \frac{2\pi}{\sigma}$ є нулем функції G. Особливими точками функції g є точки $w_{1,2} = \pm i\sigma$ і $w_3 = 0$. Функція $f(w) = e^{\frac{2\pi}{\sigma}} w \in E^2[D_\sigma]$ — розв'язок рівняння (7) (див. [11]). Якщо $w = u, u > 0$, то

$$f\,(u)\,g\,(u) = e^{\frac{2\pi}{\sigma}u} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \ln\left(1+\frac{\sigma^2}{u^2}\right) \sim e^{\frac{2\pi}{\sigma}u} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma^2}{u^2} = c\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}u}}{u^2} \to \infty,$$

для $u \to \infty$. Тому $f\,(u)\,g\,(u) \notin L^1\,(0;+\infty)$, з чого випливає, що $f(w)g(w) \notin E^1_*[D_\sigma]$ для всіх $\sigma > 0$. Оскільки g не є цілою, то умова $f\,(w)\,g\,(w) \in E^1\,[D_\sigma]$ також не виконується.

Цей приклад ілюструє труднощі, з якими стикаємося при спробі довести гіпотезу Рімана за допомогою умови 3) наслідку 2.

Зазначимо, що як випливає з доведення, теорема 5 може бути сформульованою у загальнішому вигляді, а саме замість дзета-функції Рімана можна розглянути деякий клас функцій, що містить дзета-функцію.

Теорема 6. *Нехай для аналітичної в $\mathbb{C}_+$ функції G_1 виконуються умови: а) сингулярна гранична функція функції G_1 є сталою; б) G_1 має єдиний простий нуль в $z = 1/2$; в) $G_1(z)\zeta(z+1/2) \in H^2_{\widehat{\sigma}}(\mathbb{C}_+)$ $(\widehat{\sigma} > 0)$; г) виконується умова (4). Нехай також функція ζ^* є аналітичною в $\{z\colon\ \mathrm{Re}\, z > 1/2\}\backslash\{1\}$, в точці $z = 1$ має простий полюс і*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \int_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|\zeta^*(it+1/2)|\,dt < +\infty.$$

Тоді наступні два твердження є еквівалентними: 1) функція ζ^* не має жодного нуля у $\{z\colon\ \mathrm{Re}\, z > 1/2\}$; 2) $G_1(z)\zeta^*(z+1/2)$ — циклічна функція в $H^2_\sigma\,(\mathbb{C}_+)$ для кожного $\sigma \ge \widehat{\sigma}$.

У випадку циклічності функції $G \in H^2_\sigma\,(\mathbb{C}_+)$ система (1), як вже зазначалося вище, є "дуже переповненою". У цьому зв'язку виникає наступна задача.

Проблема 1. *Нехай G_1 — така аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція, що для неї функція $G_1(z)\times$ $\times\zeta(z+1/2)$ є циклічною в $H^2_\sigma\,(\mathbb{C}_+)$. Описати всі повні і мінімальні в $H^2_\sigma\,(\mathbb{C}_+)$ системи, що складаються з функцій вигляду $G_1(z)\zeta(z+1/2)e^{\tau z}$, $\tau \le 0$.*

Проблема 2. *Нехай G_1 — така аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція, що $G_1(z)\zeta(z+1/2) \in H^2_\sigma\,(\mathbb{C}_+)$. Що є замиканням лінійної оболонки системи $\{G_1(z)\zeta(z+1/2)e^{\tau z}\colon \tau \le 0\}$ у просторі $H^2_\sigma\,(\mathbb{C}_+)$?*

ЛІТЕРАТУРА

1. A.N. Parshin, *Zeta function,* in: Matem. encyklopedia, v.2 D. – Koo. – Moscow: Soviet. encyklopedia, 1979. – P.111–122.
2. B. Nyman, On some groups and semigroups of translations, Thesis, Uppsala, 1950.
3. A. Beurling, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space,* Acta math., **81** (1949), 239–255.
4. P. Lax, *Translation invariant subspaces*, Acta math., **101** (1959), 163–178.
5. N.K. Nikolski, Operatos, functions and systems: an easy reading, V.1, AMS, 2002.
6. V.I. Vasyunin, *On a biorthogonal system associated with the Riemann hypothesis*, St. Petersburg Math. Journ., **7** (1996), №3, 405-–419.
7. J.-F. Burnol, An adelic causality problem related to abelian L–functions, J. Number Theory, **87** (2001), 432–428.
8. H.S. Shapiro, *Weakly invertible elements in certain function spaces and generators in* l^1, Mich Math J., **11** (1964), 161–165.
9. P. Lax, Functional analysis, Wiley Interscience, 2002.
10. A. Shields, *Weighted shift operators and analytic function theory*, in Topics in Operator Theory, Math Surveys, AMS, Providence, **13** (1974), 49–128.
11. B. Vinnitskii, *On zeros of functions analytic in a half plane and completeness of systems of exponents*, Ukr. Math. Jour. **46** (1994), №5, 484–500.
12. R.E.A.C. Paley, N. Wiener, Fourier transforms in complex domain (AMS Colloq. Publ. XIX), Providence: AMS, 1934.
13. V. Dil'nyi, *On the equivalence of some conditions for weighted Hardy spaces*, Ukr. Math. Jour., **58** (2006), №9, 1425–1432.
14. V. Dilnyi, *On cyclic functions in weighted hardy spaces*, Journ. of Math. Phys., Anal., Geom., **7** (2011), №1, 19–33.
15. B. Vinnitskii, V. Dil'nyi, *A generalization of the Beurling-Lax theorem*, Math. Notes, **79** (2006), №3–4, 335–341.
16. H. Dwight, Tables of integrals and other mathematical data, 4-th ed., The Macmillan Company, New York, 1961.
17. M.A. Fedorov, A.F. Grishin, *Some questions of the Nevanlinna theory for the complex half-plane*, Math. Physics, Anal. and Geom., **1** (1998), 223–271.
18. P. Koosis, Introduction to H^p spaces, Second edition. Cambridge Tracts in Mathematics, 115, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
19. A. M. Sedleckii, *An equivalent definition of* H^p *spaces in the half-plane and some applications*, Math. USSR Sb., **25** (1975), №1, 69–76.
20. B. Vinnitsky, *On solutions of homogeneous convolution equation in one class of functions analytic in a semistrip*, Mat. Stud., **7** (1997), №1, 41–52. (in Ukrainian)
21. B.V. Vynnytskyi, V.M. Dil'nyi, *On necessary conditions for existence of solutions of convolution type equation*, Mat. Stud., **16** (2001), №1, 61–70. (in Ukrainian)
22. A.A. Karatsuba, S.M. Voronin, The Riemann zeta-function, Valter de Gruyter, 1992.
23. B.V. Vynnyts'kyi, V.M. Dil'nyi, *On solutions of homogeneous convolution equation generated by singularity*, Mat. Stud., **19** (2003), №2, 149–155.

Ivan Franko National University of Lviv
dilnyi@ukr.net

Надійшло 21.06.2013
Після переробки 23.04.2014