УДК 517.95

Н. М. Гузик

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА СТЕФАНА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СЛАБКИМ СТЕПЕНЕВИМ ВИРОДЖЕННЯМ

N. M. Huzyk. *Inverse Stefan problem for a parabolic equation with weak power degeneration*, Mat. Stud. **40** (2013), 182–192.

In a free boundary domain there were established conditions of existence and uniqueness of the classical solution to the inverse problem for determination a time-dependent major coefficient in a parabolic equation with weak power degeneration near the derivative with respect to time. The Stefan condition and heat flux are given as overdetermination conditions.

Н. Н. Гузык. *Обратная задача Стефана для параболического уравнения со слабым степенным вырождением* // Мат. Студії. – 2013. – Т.40, №2. – C.182–192.

В области со свободной границей установлены условия существования и единственности классического решения обратной задачи определения зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении со слабым степенным вырождением при производной по времени. В качестве условий переопределения заданы условие Стефана и значение теплового потока.

Вступ. Задача, яка досліджується у даній роботі, поєднує три типи задач, а саме, коефіцієнтну обернену задачу, задачу з вільною межею та задачу для рівнянь з виродженням. Кожен з цих типів вивчався раніше, однак їх поєднання в одній задачі і досі залишається недостатньо вивченою проблемою. Так, коефіцієнтні обернені задачі з невідомим залежним від часу старшим коефіцієнтом у параболічному рівнянні розглядались в [1]–[5] та інших роботах.

Задача з вільною межею для параболічного рівняння з інтегральною умовою перевизначення досліджувалась в [6]. Після заміни змінних функція, що задає невідому частину межі області, переходить у коефіцієнти рівняння, яке вже розглядається в області з відомими межами. Такий підхід дає можливість об'єднати два типи задач — коефіцієнтні обернені задачі та задачі з вільними межами в один. Вивченню коефіцієнтних обернених задач в областях з вільними межами присвячені праці [7]–[9] та інші.

Умови існування та єдиності класичних розв'язків обернених задач визначення залежного від часу старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні зі степеневим виродженням знайдено в [10], [11]. Такі ж задачі в областях з вільними межами досліджено в [12], [13].

У даній роботі в області з вільною межею досліджується обернена задача визначення залежного від часу старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні з виродженням. На відміну від [12], виродження рівняння спричинене степеневою функцією, що

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K65, 35R30, 35R35.
Keywords: coefficient inverse problem; parabolic equation; weak power degeneration; Stefan condition.

знаходиться у рівнянні при похідній за часом. В якості додаткових, так званих умов перевизначення, для визначення невідомого коефіцієнта рівняння та функції, яка задає невідому частину межі, використано значення теплового потоку та умову Стефана. Встановлено умови коректної розв'язності задачі у випадку слабкого виродження.

1. Формулювання задачі та основні результати. В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t),\ 0 < t < T\}$, де $h = h(t),\ h(t) > 0,\ t \in [0,T]$ — невідома функція, розглядається обернена задача визначення коефіцієнта $a = a(t),\ a(t) > 0,\ t \in [0,T]$ в рівнянні

$$t^\beta u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$h'(t) = -u_x(h(t),t) + \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

де $h(0) \equiv h_0$ та $0 < \beta < 1$ — задані величини.

Означення 1. Під *розв'язком задачі* (1)–(5) будемо розуміти трійку функцій (a,h,u) з класу $C[0,T] \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T),\ a(t) > 0,\ h(t) > 0,\ t \in [0,T]$, що задовольняє рівняння (1) та умови (2)–(5).

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

A1) $b, c, f \in C[0,\infty) \times [0,T]$ *та задовольняють умову Гельдера за змінною* x *локально рівномірно відносно* t *з показником* α, $0 < \alpha < 1$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i \in \{1,2\}$, $\mu_j \in C[0,T]$, $j \in \{3,4\}$, $\varphi \in C^2[0,h_0]$;

A2) $\varphi'(x) > 0, x \in [0,h_0]$, $\mu_3(t) > 0, t \in [0,T]$;

A3) $\varphi(0) = \mu_1(0), \varphi(h_0) = \mu_2(0)$.

Тоді можна вказати таке число $T_0, (0,T]$, *що розв'язок задачі* (1)–(5) *існує при* $(x,t) \in [0,h(t)] \times [0,T_0]$.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови:*

B1) $b, c, f \in C^{1,0}([0,\infty) \times [0,T]), \varphi \in C^3[0,h_0]$;

B1) $\mu_3(t) \neq 0,\ t \in [0,T]$,

то розв'язок задачі (1)–(5) *єдиний.*

Заміною змінних $y = \frac{x}{h(t)}, t = t$ задача (1)–(5) зводиться до коефіцієнтної оберненої задачі відносно невідомих $a(t), h(t),\ v(y,t) \equiv u(yh(t),t)$ в області з фіксованою межею $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$

$$t^\beta v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy} + \frac{b(yh(t),t) + yt^\beta h'(t)}{h(t)}v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t), \tag{6}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh_0),\ 0 \le y \le 1, \tag{7}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t),\ v(1,t) = \mu_2(t),\ 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$\frac{a(t)}{h(t)}v_y(0,t)=\mu_3(t),\ 0\le t\le T, \tag{9}$$

$$h'(t)=-\frac{1}{h(t)}v_y(1,t)+\mu_4(t),\ 0\le t\le T. \tag{10}$$

Надалі досліджуватимемо існування та єдиність класичного розв'язку задачі (6)–(10).

2. Зведення задачі (6)–(10) **до системи рівнянь.** Розглянемо пряму задачу (6)–(8). Для того щоб звести початкову та крайові умови до однорідних, проведемо заміну змінних

$$v(y,t)=\widetilde{v}(y,t)+\varphi(yh_0)+\mu_1(t)-\mu_1(0)+y(\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0)). \tag{11}$$

Отримаємо задачу

$$t^\beta\widetilde{v}_t=\frac{a(t)}{h^2(t)}\widetilde{v}_{yy}+\frac{b(yh(t),t)+yt^\beta h'(t)}{h(t)}\widetilde{v}_y+c(yh(t),t)\widetilde{v}+f(yh(t),t)-$$
$$-t^\beta(\mu_1'(t)+y(\mu_2'(t)-\mu_1'(t))+\frac{h_0^2a(t)\varphi''(yh_0)}{h^2(t)}+\frac{b(yh(t),t)+yt^\beta h'(t)}{h(t)}\times$$
$$\times\Big(h_0\varphi'(yh_0)+\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0)\Big)+c(yh(t),t)\big(\varphi(yh_0)+$$
$$+\mu_1(t)-\mu_1(0)+y(\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0))\big), \tag{12}$$

$$\widetilde{v}(y,0)=0, y\in[0,1], \tag{13}$$

$$\widetilde{v}(0,t)=\widetilde{v}(1,t)=0,\ t\in[0,T]. \tag{14}$$

Використовуючи функцію Гріна $G_1=G_1(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$t^\beta v_t=\frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy}, \tag{15}$$

задачу (12)–(14) зводимо до інтегро-диференціального рівняння

$$\widetilde{v}(y,t)=\int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Big(\frac{b(\eta h(\tau),\tau)+\eta\tau^\beta h'(\tau)}{h(\tau)}\widetilde{v}_\eta(\eta,\tau)+c(\eta h(\tau),\tau)\widetilde{v}(\eta,\tau)+$$
$$+f(\eta h(\tau),\tau)-\tau^\beta(\mu_1'(\tau)+\eta(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))+\frac{h_0^2a(\tau)\varphi''(\eta h_0)}{h^2(\tau)}+\frac{b(\eta h(\tau),\tau)+\eta\tau^\beta h'(\tau)}{h(\tau)}\times$$
$$\times\Big(h_0\varphi'(\eta h_0)+\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0)\Big)+c(\eta h(\tau),\tau)\big(\varphi(\eta h_0)+$$
$$+\mu_1(\tau)-\mu_1(0)+\eta(\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0))\big)\Big)d\eta d\tau. \tag{16}$$

Позначимо $w(y,t)\equiv v_y(y,t)$. Тоді, використовуючи (10), (11), (16), пряму задачу (6)–(8) замінимо еквівалентною системою інтегральних рівнянь

$$v(y,t)=\varphi(yh_0)+\mu_1(t)-\mu_1(0)+y(\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0))+\int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\times$$
$$\times\Big(\Big(\frac{b(\eta h(\tau),\tau)+\eta\tau^\beta\mu_4(\tau)}{h(\tau)}-\frac{\eta\tau^\beta w(1,\tau)}{h^2(\tau)}\Big)w(\eta,\tau)+c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+f(\eta h(\tau),\tau)-$$
$$-\tau^\beta(\mu_1'(\tau)+\eta(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))+\frac{h_0^2a(\tau)\varphi''(\eta h_0)}{h^2(\tau)}\Big)d\eta d\tau,\ (y,t)\in\overline{Q}_T, \tag{17}$$

$$w(y,t) = h_0\varphi'(yh_0) + \mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0) + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\times$$
$$\times\Big(\Big(\frac{b(\eta h(\tau),\tau) + \eta\tau^\beta \mu_4(\tau)}{h(\tau)} - \frac{\eta\tau^\beta w(1,\tau)}{h^2(\tau)}\Big)w(\eta,\tau) + c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau) + f(\eta h(\tau),\tau) -$$
$$-\tau^\beta(\mu_1'(\tau) + \eta(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + \frac{h_0^2 a(\tau)\varphi''(\eta h_0)}{h^2(\tau)}\Big)d\eta d\tau,\ (y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{18}$$

З умови (9), враховуючи введені позначення, знаходимо

$$a(t)w(0,t) = \mu_3(t)h(t),\ t \in [0,T]. \tag{19}$$

Інтегруючи умову (10), отримаємо

$$h(t) = h_0 + \int_0^t \mu_4(\tau)d\tau - \int_0^t \frac{w(1,\tau)}{h(\tau)}d\tau,\ t \in [0,T]. \tag{20}$$

Отже, задачу (6)–(10) зведено до еквівалентної системи рівнянь (17)–(20). Еквівалентність розуміємо у такому сенсі: якщо трійка функцій (a,h,v) є розв'язком задачі (6)–(10), то набір функцій (v,w,a,h) є неперервним розв'язком системи рівнянь (17)–(20), і, навпаки, якщо $(v,w,a,h) \in (C(\overline{Q}_T))^2 \times (C[0,T])^2$ є розв'язком системи (17)–(20), то трійка (a,h,v) належить до класу $C[0,T] \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ і задовольняє рівняння (6) та умови (7)–(10).

Перша частина твердження випливає зі способу отримання системи рівнянь (17)–(20). Для доведення зворотного твердження розглянемо рівняння (17). Умови на вихідні дані дозволяють продиференціювати його за просторовою змінною. Оскільки праві частини отриманої після диференціювання рівності та рівності (18) однакові, то $v_y(y,t) \equiv w(y,t)$. Застосовуючи цю тотожність до (17), отримуємо, що $v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, задовольняє рівняння

$$t^\beta v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy} + \frac{1}{h(t)}\Big(b(yh(t),t) + yt^\beta\Big(\mu_4(t) - \frac{v_y(1,t)}{h(t)}\Big)\Big)v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t) \tag{21}$$

та умови (7), (8). Крім того, враховуючи гладкість функції $v = v(y,t)$ в (20), робимо висновок, що $h \in C^1[0,T]$. Продиференціювавши (20) за часовою змінною, приходимо до умови (10). Використовуючи її в (21), одержуємо, що функція $v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ та задовольняє рівняння (6). Умова (19) при цьому є тотожною з умовою (9), що й завершує доведення еквівалентності задачі (6)–(10) та системи рівнянь (17)–(20).

3. Існування розв'язку задачі (6)–(10)**.** Виходячи з еквівалентності задачі (6)–(10) та системи рівнянь (17)–(20), доведемо існування розв'язку системи (17)–(20). Для початку дослідимо поведінку при $t \to +0$ інтегралів, які входять до правих частин формул (17), (18).

Використовуючи оцінки

$$\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)d\eta \le 1,\ \int_0^1 |G_{1y}(y,t,\eta,\tau)|d\eta \le \frac{C_1}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}, \tag{22}$$

де $\theta(t)=\int_0^t \frac{a(\sigma)}{h^2(\sigma)\sigma^\beta}d\sigma$, знаходимо

$$I_1\equiv\int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)d\eta d\tau\le C_2 t,$$

$$I_2\equiv\int_0^t\int_0^1 |G_{1y}(y,t,\eta,\tau)|d\eta d\tau\le C_3\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\le C_4\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t^{1-\beta}-\tau^{1-\beta}}}\le C_5 t^{\frac{1+\beta}{2}}.$$

Це означає, що інтеграли в правих частинах рівностей (17), (18), прямують до нуля при $t\to+0$.

Розглянемо (18). Враховуючи умови теореми, можемо стверджувати, що існує таке число $t_1\in[0,T)$, що

$$w(y,t)\ge\frac{h_0}{2}\varphi'(yh_0)\equiv M_0>0,\ (y,t)\in[0,1]\times[0,t_1]. \tag{23}$$

Число t_1 при цьому визначається з нерівності

$$\frac{h_0\varphi'(yh_0)}{2}+\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0)+\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\times$$
$$\times\Big(\Big(\frac{b(\eta h(\tau),\tau)+\eta\tau^\beta\mu_4(\tau)}{h(\tau)}-\frac{\eta\tau^\beta w(1,\tau)}{h^2(\tau)}\Big)w(\eta,\tau)+c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+f(\eta h(\tau),\tau)-$$
$$-\tau^\beta(\mu_2'(\tau)+\eta(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))+\frac{h_0^2a(\tau)\varphi''(\eta h_0)}{h^2(\tau)}\Big)d\eta d\tau\ge0,\ (y,t)\in[0,1]\times[0,t_1]. \tag{24}$$

Далі, використовуючи (20), оцінимо функцію $h=h(t)$. Оскільки третій доданок правої частини рівності (20) від'ємний, то

$$h(t)\le h_0+T\max_{[0,T]}|\mu_4(t)|\equiv H_1,\ t\in[0,t_1]. \tag{25}$$

Для оцінки функції $h=h(t)$ знизу визначимо число $t_2, 0<t_2\le T$ з нерівності

$$\frac{h_0}{2}+\int_0^t\mu_4(\tau)d\tau-\int_0^t\frac{w(1,\tau)}{h(\tau)}d\tau\ge0,\ t\in[0,t_2]. \tag{26}$$

Тоді

$$h(t)\ge\frac{h_0}{2}\equiv H_0>0,\ t\in[0,t_2]. \tag{27}$$

Отримані оцінки використаємо при оцінюванні функції $a=a(t)$ зверху. Виходячи з рівняння (19), отримаємо

$$a(t)\le\frac{H_1\max_{[0,T]}\mu_3(t)}{M_0}\equiv A_1<\infty,\ t\in[0,t_1]. \tag{28}$$

Для оцінок функцій $a=a(t)$ знизу, $w=w(y,t)$ зверху та $v=v(y,t)$, введемо позначення

$$V(t)=\max_{y\in[0,1]}|v(y,t)|, W(t)=\max_{y\in[0,1]}w(y,t),\ a_{\min}(t)=\min_{\tau\in[0,t]}a(\tau).$$

Тоді з рівняння (17), враховуючи (22), одержимо нерівність типу Гроноула відносно функції $V = V(t)$

$$V(t) \leq C_6 + C_7 W(t) + C_8 W^2(t) + C_9 \int_0^t V(\tau) d\tau, \ t \in [0, T],$$

звідки

$$V(t) \leq C_{10} + C_{11} W(t) + C_{12} W^2(t), \ t \in [0, T]. \tag{29}$$

Використовуючи (22), (29), з рівняння (18), знаходимо

$$W(t) \leq C_{13} + C_{14} \int_0^t \frac{1 + W(\tau) + W^2(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau,$$

або, позначивши $W_1(t) \equiv W(t) + \dfrac{1}{2}$,

$$W_1(t) \leq C_{15} + C_{16} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau + C_{17} \int_0^t \frac{W_1^2(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau. \tag{30}$$

Враховуючи означення функції $\theta = \theta(t)$ та введені позначення, оцінимо інтеграл

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau = \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\int_\tau^t \frac{a(\sigma)}{h^2(\sigma)\sigma^\beta} d\sigma}} \leq \frac{C_{18}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} t^{\frac{1+\beta}{2}}. \tag{31}$$

Піднесемо обидві частини нерівності (30) до квадрату і оцінимо, використовуючи нерівності Коші та Коші-Буняковського

$$W_1^2(t) \leq 2C_{15}^2 + 2C_{16}^2 \Big(\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau \Big)^2 + 2C_{17}^2 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau \int_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau.$$

Використовуючи (31), останню нерівність приводимо до вигляду

$$W_1^2(t) \leq C_{19} + \frac{C_{20} t^{1+\beta}}{a_{\min}(t)} + \frac{C_{21} t^{\frac{1+\beta}{2}}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau. \tag{32}$$

Далі змінимо t на σ, домножимо на $\dfrac{1}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}}$ та проінтегруємо по σ від 0 до t:

$$\int_0^t \frac{W_1^2(\sigma)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}} d\sigma \leq C_{19} \int_0^t \frac{d\sigma}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}} + \frac{C_{20}}{a_{\min}(t)} \int_0^t \frac{\sigma^{\beta+1} d\sigma}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}} +$$
$$+ \frac{C_{21}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{\sigma^{\frac{1+\beta}{2}} d\sigma}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}} \int_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)}{\sqrt{\theta(\sigma) - \theta(\tau)}} d\tau.$$

Змінивши порядок інтегрування, використавши (31) та рівність

$$\int_\tau^t \frac{a(\sigma) d\sigma}{\sigma^\beta h^2(\sigma) \sqrt{(\theta(t) - \theta(\sigma))(\theta(\sigma) - \theta(\tau))}} = \pi,$$

знаходимо

$$\int_0^t \frac{W_1^2(\sigma)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}d\sigma \le \frac{C_{22}t^{\frac{1+\beta}{2}}}{(a_{\min}(t))^{1/2}} + \frac{C_{23}t^{\frac{3(1+\beta)}{2}}}{(a_{\min}(t))^{3/2}} + \frac{C_{24}t^{\frac{1+3\beta}{2}}}{(a_{\min}(t))^{3/2}}\int_0^t W_1^4(\tau)d\tau. \qquad (33)$$

Враховуючи нерівність (33) у (30), отримаємо

$$W_1(t) \le C_{15} + \frac{C_{25}t^{\frac{1+\beta}{2}}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{26}t^{\frac{3(1+\beta)}{2}}}{(a_{\min}(t))^{3/2}} + \frac{C_{27}}{(a_{\min}(t))^{3/2}}\int_0^t W_1^4(\tau)d\tau. \qquad (34)$$

Позначимо

$$\Phi(t)=C_{15}+\frac{C_{25}t^{\frac{1+\beta}{2}}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}+\frac{C_{26}t^{\frac{3(1+\beta)}{2}}}{(a_{\min}(t))^{3/2}},\ \Psi(t)=\frac{C_{27}}{(a_{\min}(t))^{3/2}},\ H(t)=\frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}+\int_0^t W_1^4(\tau)d\tau. \quad (35)$$

Тоді з (34) одержуємо

$$W_1(t) \le \Psi(t)H(t). \qquad (36)$$

Продиференціювавши останню з рівностей (35) за часом та врахувавши (36), знаходимо

$$H'(t) \le \Big(\frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}\Big)' + \Psi^4(t)H^4(t). \qquad (37)$$

Останню нерівність розділимо на $H^4(t)$ і проінтегруємо її від 0 до t. Матимемо

$$\frac{1}{3H^3(0)} - \frac{1}{3H^3(t)} \le \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}\frac{1}{H^4(t)} - \frac{\Phi(0)}{\Psi(0)}\frac{1}{H^4(0)} + 4\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\Psi(\tau)}\frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)}d\tau + \int_0^t \Psi^4(\tau)d\tau,$$

звідки

$$\frac{H^4(t)}{3H^3(0)}\Big(4-3H^3(0)\Big(4\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\Psi(\tau)}\frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)}d\tau + \int_0^t \Psi^4(\tau)d\tau\Big)\Big) \le \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)} + \frac{H(t)}{3}, \qquad (38)$$

де $H(0) = \frac{\Phi(0)}{\Psi(0)} = \frac{C_{15}(a_{\min}(0))^{3/2}}{C_{27}}$.

В інтегралі $\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\Psi(\tau)}\frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)}d\tau$ зробимо заміну $\sigma = H(\tau)$. Отримаємо

$$\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\Psi(\tau)}\frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)}d\tau = \int_{H(0)}^{H(t)} \frac{\Phi(H^{-1}(\sigma))}{\Psi(H^{-1}(\sigma))}\frac{d\sigma}{\sigma^5},$$

де $H^{-1}(\sigma)$ — функція обернена до $H(t)$.

Оскільки

$$4\int_{H(0)}^{H(t)} \frac{\Phi(H^{-1}(\sigma))}{\Psi(H^{-1}(\sigma))}\frac{d\sigma}{\sigma^5} + \int_0^t \Psi^4(\tau)d\tau \to 0,$$

при $t \to 0$, то існує таке число t_3, $0 < t_3 \le T$, що

$$4-3H^3(0)\Big(4\int_{H(0)}^{H(t)} \frac{\Phi(H^{-1}(\sigma))}{\Psi(H^{-1}(\sigma))}\frac{d\sigma}{\sigma^5} + \int_0^t \Psi^4(\tau)d\tau\Big) \ge 1,\ t \in [0, t_3]. \qquad (39)$$

Тоді з (38) випливає нерівність $\frac{H^4(t)}{3H^3(0)} \le \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)} + \frac{H(t)}{3}$, $t \in [0, t_3]$, або $H^4(t) \le \frac{3\Phi(t)}{\Psi(t)} H^3(0) + H^3(0)H(t)$, $t \in [0, t_3]$. Використовуючи це в (37), знаходимо $H'(t) \le (\frac{\Phi(t)}{\Psi(t)})' + H^3(0)\Psi^4(t) \times \times H(t) + 3H^3(0)\Psi^3(t)\Phi(t)$.

Останню нерівність домножимо на $\exp\big(-H^3(0)\int_0^t \Psi^4(\sigma)d\sigma\big)$ і проінтегруємо. Отримаємо

$$H(t) \le \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)} + 4H^3(0)\int_0^t \Phi(\tau)\Psi^3(\tau)\exp\Big(H^3(0)\int_\tau^t \Psi^4(\sigma)d\sigma\Big)d\tau.$$

Тоді з (36) одержимо

$$W_1(t) \le \Phi(t) + 4H^3(0)\Psi(t)\exp\Big(H^3(0)\int_0^t \Psi^4(\sigma)d\sigma\Big)\int_0^t \Phi(\tau)\Psi^3(\tau)d\tau,$$

або, враховуючи (35),

$$W_1(t) \le C_{15} + \frac{C_{25}t^{\frac{1+\beta}{2}}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{26}t^{\frac{3(1+\beta)}{2}}}{(a_{\min}(t))^{3/2}} + \frac{C_{28}}{(a_{\min}(t))^{3/2}}\exp\Big(C_{29}\int_0^t \frac{d\sigma}{(a_{\min}(\sigma))^6}\Big)\times$$
$$\times\int_0^t \frac{1}{(a_{\min}(\tau))^{9/2}}\Big(1 + \frac{\tau^{\frac{1+\beta}{2}}}{\sqrt{a_{\min}(\tau)}} + \frac{\tau^{\frac{3(1+\beta)}{2}}}{(a_{\min}(\tau))^{3/2}}\Big)d\tau,\ t \in [0, t_3]. \tag{40}$$

Використовуючи (27), з рівняння (19) отримаємо

$$a_{\min}(t) \ge \frac{C_{30}}{W_1(t)},\ t \in [0, t_2]. \tag{41}$$

Враховуючи (40), останню нерівність подамо у вигляді

$$C_{15}a_{\min}(t) + K(t) - C_{30} \ge 0,\ t \in [0, t_3], \tag{42}$$

де через $K = K(t)$ позначено вираз

$$K(t) \equiv \frac{C_{25}t^{\frac{1+\beta}{2}}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{26}t^{\frac{3(1+\beta)}{2}}}{(a_{\min}(t))^{3/2}} + \frac{C_{28}}{(a_{\min}(t))^{3/2}}\exp\Big(C_{29}\int_0^t \frac{d\sigma}{(a_{\min}(\sigma))^6}\Big)\times$$
$$\times\int_0^t \frac{1}{(a_{\min}(\tau))^{9/2}}\Big(1 + \frac{\tau^{\frac{1+\beta}{2}}}{\sqrt{a_{\min}(\tau)}} + \frac{\tau^{\frac{3(1+\beta)}{2}}}{(a_{\min}(\tau))^{3/2}}\Big)d\tau.$$

Оскільки $K(t)$ прямує 0 при $t \to 0$, то можна вказати таке число $t_4, 0 < t_4 \le T$, що

$$K(t) \le \frac{C_{30}}{2},\ t \in [0, t_4]. \tag{43}$$

Тоді з (42) знаходимо оцінку функції $a = a(t)$ знизу

$$a(t) \ge a_{\min}(t) \ge \frac{C_{30}}{2C_{15}} \equiv A_0 > 0,\ t \in [0, t_4], \tag{44}$$

з (40) — оцінку $w = w(y,t)$ зверху $w(y,t) \le W_1(t) \le M_1$, $(y,t) \in [0,1] \times [0, t_4]$, а з (29) — оцінки функції $v = v(y,t)$: $|v(y,t)| \le M_2$, $(y,t) \in [0,1] \times [0, t_4]$. Отже, встановлено апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (17)–(20).

Враховуючи (23), подамо рівняння (19) у вигляді

$$a(t) = \frac{\mu_3(t)h(t)}{w(0,t)},\ t \in [0, t_1]. \tag{45}$$

Систему рівнянь (17), (18), (20), (45) подамо у вигляді операторного рівняння $W = PW$, де $W = (v, w, h, a)$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (17), (18), (20), (45), відповідно. Покладемо $T_0 = \min\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$. У банаховому просторі $\mathbf{B} = (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^2$ визначимо множину $N = \{(v, w, h, a) \in \mathbf{B}\colon |v(y,t)| \le M_2,\ M_0 \le w(y,t) \le M_1,\ H_0 \le h(t) \le H_1,\ A_0 \le a(t) \le A_1\}$. З встановлених оцінок випливає, що множина N замкнена і опукла, а оператор P переводить її в себе. Те, що оператор P цілком неперервний, доводиться за тією ж схемою, що й у невиродженому випадку ([14, с. 27]). Тоді за теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора існує неперервний розв'язок (v, w, h, a) системи рівнянь (17), (18), (20), (45) при $(y,t) \in [0,1] \times [0, T_0]$. Це означає, що існує розв'язок (a, h, v) задачі (6)–(10) при $(y,t) \in [0,1] \times [0, T_0]$. Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що підставивши встановлені апріорні оцінки функцій v, w, h, a в (23), (26), (39), (43) отримаємо обмеження на числа $t_i, i \in \{1, \ldots, 4\}$ через вихідні дані задачі (6)–(10).

4. Єдиність розв'язку задачі (6)–(10)**.** Припустимо, що існує два розв'язки (a_i, h_i, v_i), $i \in \{1, 2\}$ задачі (6)–(10). Для їх різниць $a(t) = a_1(t) - a_2(t), h(t) = h_1(t) - h_2(t), v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t)$ отримаємо задачу

$$\begin{gathered}
t^\beta v_t = \frac{a_2(t)}{h_2^2(t)} v_{yy} + \frac{b(yh_2(t),t) + yt^\beta h_2'(t)}{h_2(t)} v_y + c(yh_2(t),t)v + \\
+ f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t) + \Big(\frac{a(t)}{h_1^2(t)} + a_2(t)\Big(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\Big)\Big) v_{1yy}(y,t) + \\
\Big(\frac{(b(yh_1(t),t) - b(yh_2(t),t)) + yt^\beta (h_1'(t) - h_2'(t))}{h_1(t)} + (b(yh_2(t),t) + yt^\beta h_2'(t)) \times \\
\times \Big(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\Big)\Big) v_{1y} + (c(yh_1(t),t) - c(yh_2(t),t))v_1,\ (y,t) \in Q_T,
\end{gathered} \tag{46}$$

$$v(y,0) = 0,\ y \in [0,1], \tag{47}$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0,\ t \in [0,T], \tag{48}$$

$$a(t)v_{1y}(0,t) + a_2(t)v_y(0,t) = \mu_3(t)h(t),\ t \in [0,T], \tag{49}$$

$$h_1'(t) - h_2'(t) = -\Big(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\Big) v_{1y}(1,t) - \frac{1}{h_2(t)} v_y(1,t). \tag{50}$$

Позначимо $w(y,t) \equiv v_y(y,t), p(t) \equiv h_1'(t) - h_2'(t)$. За допомогою функції Гріна $G_1^* = G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$t^\beta v_t = \frac{a_2(t)}{h_2^2(t)} v_{yy} + \frac{b(yh_2(t),t) + yt^\beta h_2'(t)}{h_2(t)} v_y + c(yh_2(t),t)v$$

знаходимо розв'язок задачі (46)–(48)

$$v(y,t) = \int_0^t \int_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\Big(f(\eta h_1(\tau),\tau) - f(\eta h_2(t),\tau) + \Big(\frac{a(\tau)}{h_1^2(\tau)} + a_2(\tau)\Big(\frac{1}{h_1^2(\tau)} -$$

$$-\frac{1}{h_2^2(\tau)}\Big)\Big)v_{1\eta\eta}(\eta,\tau)+\Big(\frac{(b(\eta h_1(\tau),\tau)-b(\eta h_2(\tau),\tau))+\eta\tau^\beta p(\tau)}{h_1(\tau)}+(b(\eta h_2(\tau),\tau)+$$
$$+\eta\tau^\beta h_2'(\tau))\Big(\frac{1}{h_1(\tau)}-\frac{1}{h_2(\tau)}\Big)\Big)v_{1\eta}(\eta,\tau)+(c(\eta h_1(\tau),\tau)-c(\eta h_2(\tau),\tau))v_1(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau. \quad (51)$$

Продиференціювавши (51) за просторовою змінною, отримаємо

$$w(y,t)=\int_0^t\int_0^1 G_{1y}^*(y,t,\eta,\tau)\Big(f(\eta h_1(\tau),\tau)-f(\eta h_2(t),\tau)+\Big(\frac{a(\tau)}{h_1^2(\tau)}+a_2(\tau)\Big(\frac{1}{h_1^2(\tau)}-$$
$$-\frac{1}{h_2^2(\tau)}\Big)\Big)v_{1\eta\eta}(\eta,\tau)+\Big(\frac{(b(\eta h_1(\tau),\tau)-b(\eta h_2(\tau),\tau))+\eta\tau^\beta p(\tau)}{h_1(\tau)}+(b(\eta h_2(\tau),\tau)+$$
$$+\eta\tau^\beta h_2'(\tau))\Big(\frac{1}{h_1(\tau)}-\frac{1}{h_2(\tau)}\Big)\Big)v_{1\eta}(\eta,\tau)+(c(\eta h_1(\tau),\tau)-c(\eta h_2(\tau),\tau))v_1(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau. \quad (52)$$

Враховуючи введені позначення, рівняння (49), (50) подамо у вигляді

$$a(t)v_{1y}(0,t)+a_2(t)w(0,t)=\mu_3(t)h(t),\ t\in[0,T], \quad (53)$$
$$p(t)=-\Big(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\Big)v_{1y}(1,t)-\frac{1}{h_2(t)}w(1,t),\ t\in[0,T]. \quad (54)$$

Оскільки $(a_i,h_i,v_i), i\in\{1,2\}$ розв'язки задачі (6)–(10), то для них справджуються рівності (20). Віднявши їх, знаходимо

$$h(t)=-\int_0^t\frac{w(1,\tau)}{h_1(\tau)}d\tau-\int_0^t v_{2y}(1,\tau)\Big(\frac{1}{h_1(\tau)}-\frac{1}{h_2(\tau)}\Big)d\tau,\ t\in[0,T]. \quad (55)$$

Зауважимо також, що

$$\frac{1}{h_1(\tau)}-\frac{1}{h_2(\tau)}=-\frac{h(t)}{h_1(t)h_2(t)},\quad \frac{1}{h_1^2(\tau)}-\frac{1}{h_2^2(\tau)}=-\frac{h(t)(h_1(t)+h_2(t))}{h_1^2(t)h_2^2(t)},\quad t\in[0,T]. \quad (56)$$

Крім того, припущення теореми забезпечують правильність рівності

$$f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t)=yh(t)\int_0^1 f_x(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t)d\sigma, \quad (57)$$

що виконується і для функцій $b(y,t),c(y,t)$. Підставивши (56)–(57) в (51)–(55), отримаємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду відносно функцій $v=v(y,t),\ w=w(y,t),\ a=a(t),\ p=p(t),\ h=h(t)$. Для дослідження цієї системи потрібно встановити оцінку функції $v_{1yy}(y,t)$.

Оскільки $v_1=v_1(y,t)$ розв'язок відповідної задачі (6)–(8), то для цієї функції правильними залишаються рівності (17), (18). З (17) за допомогою рівності $G_{1yy}(y,t,\eta,\tau)=G_{1\eta\eta}(y,t,\eta,\tau)$ знаходимо

$$v_{1yy}(y,t)=h_0^2\varphi''(yh_0)+\int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\Big(\Big(\frac{b(h_1(\tau),\tau)+\tau^\beta\mu_4(\tau)}{h_1(\tau)}-\frac{\tau^\beta v_{1\eta}(1,\tau)}{h_1^2(\tau)}\Big)v_{1\eta}(1,\tau)+$$
$$+c(h_1(\tau),\tau)v_1(1,\tau)+f(h_1(\tau),\tau)-\tau^\beta\mu_2'(\tau)+\frac{h_0^2a_1(\tau)\varphi''(h_0)}{h_1^2(\tau)}\Big)d\tau-\int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\times$$
$$\times\Big(\frac{b(0,\tau)v_{1\eta}(0,\tau)}{h_1(\tau)}+c(0,\tau)v_1(0,\tau)+f(0,\tau)-\tau^\beta\mu_1'(\tau)+\frac{h_0^2a_1(\tau)\varphi''(0)}{h_1^2(\tau)}\Big)d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G_{1\eta}(y,t,\eta,\tau)\Big(\Big(\frac{h_1(\tau)b_y(\eta h_1(\tau),\tau)+\tau^\beta\mu_4(\tau)}{h_1(\tau)}-\frac{\tau^\beta v_{1\eta}(1,\tau)}{h_1^2(\tau)}+c(\eta h_1(\tau),\tau)\Big)\times$$
$$\times v_{1\eta}(\eta,\tau)+h_1(\tau)c_y(\eta h_1(\tau),\tau)v_1(\eta,\tau)-\tau^\beta(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))+h_1(\tau)f_y(\eta h_1(\tau),\tau)+$$
$$+\frac{h_0^3a_1(\tau)\varphi'''(\eta h_0)}{h_1^2(\tau)}\Big)d\eta d\tau+\int_0^t\int_0^1 G_{1\eta}(y,t,\eta,\tau)\Big(\frac{\eta\tau^\beta v_{1\eta}(1,\tau)}{h_1^2(\tau)}-\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)+\eta\tau^\beta\mu_4(\tau)}{h_1(\tau)}\Big)\times$$
$$\times v_{1\eta\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau=\sum_{i=1}^4 I_i+\int_0^t\int_0^1 G_{1\eta}(y,t,\eta,\tau)\Big(\frac{\eta\tau^\beta v_{1\eta}(1,\tau)}{h_1^2(\tau)}-\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)+\eta\tau^\beta\mu_4(\tau)}{h_1(\tau)}\Big)\times$$
$$\times v_{1\eta\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau,\ (y,t)\in Q_T. \tag{58}$$

Оскільки $\left|\int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\frac{a(\tau)}{\tau^\beta h^2(\tau)}d\tau\right|\le 1,\ \left|\int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\frac{a(\tau)}{\tau^\beta h^2(\tau)}d\tau\right|\le 1$, то для перших чотирьох доданків інтегрального рівняння (58) відносно функції $v_{1yy}(y,t)$ отримаємо оцінку $\sum_{i=1}^4|I_i|\le C_{31}$. Враховуючи обмеженість ядра цього рівняння, можемо стверджувати, що $|v_{1yy}(y,t)|\le C_{32},\ (y,t)\in\overline{Q}_T$. Використовуючи останню оцінку в (51)–(55), робимо висновок про інтегровність ядра цієї системи. Це означає, що система (51)–(55) має лише тривіальний розв'язок, що й завершує доведення теореми 2.

ЛІТЕРАТУРА

1. B.F. Jones, *The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. I. Existence and uniqueness*, J. Math. Mech., **11** (1962), №5, 907–918.
2. J.R. Cannon, *Recovering a time-dependent coefficient in a parabolic differential equation*, J. Math. Anal. Appl., **160** (1991), 572–582.
3. H. Azari, C. Li, Y. Nie, S. Shang, *Determination of an unknown coefficient in a parabolic inverse problem*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Math. Analysis, **11** (2004), 665–674.
4. I.B. Bereznytska, A.Y. Drebot, M.I. Ivanchov, Yu.M. Makar, *Inverse problem for a heat equation with integral overdetermination*, Visnyk Lviv Univ., Ser. Mech-Math., **48** (1997), 71–79. (in Ukrainian)
5. M.I. Ivanchov, *Some inverse problems for a heat equation with non-local boundary conditions*, Ukr. Math. Journ., **45** (1993), №8, 1066–1071. (in Ukrainian)
6. M.I. Ivanchov, *Reduction a free boundary problem for a parabolic equation to inverse problem*, Nonlinear bondary problems, **12** (2002) 73–83. (in Ukrainian)
7. I. Barans'ka, *Inverse problem with free boundary for a parabolic equation*, Mat. Stud., **27** (2007), №1, 85–94. (in Ukrainian)
8. I. Barans'ka, M. Ivanchov, *An inverse problem for two-dimentional heat equation in a free boundary domain*, Ukr. Math. Bull., **4** (2007), №4, 457–484. (in Ukrainian)
9. H. Snitko, *Inverse problem for a parabolic equation with free boundary*, Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya, **50** (2007), №4, 7–18. (in Ukrainian)
10. N. Saldina, *Inverse problem for a degenerate parabolic equation*, Visnyk Lviv Univ., Ser. Mech-Math., **64** (2005), 245–257. (in Ukrainian)
11. M. Ivanchov, N. Saldina, *An inverse problem for strongly degenerate heat equation*, J. Inv. Ill-Posed Problems, **14** (2006), №5, 465–480.
12. N. Hryntsiv, *Solvability of inverse problem for a degenerate parabolic equation in a free boundary domain*, Scientific Bulletin of Chernivtsi University, **314-315** (2006), 40–49. (in Ukrainian)
13. M. Ivanchov, N. Hryntsiv, *Inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation in a domain with free boundary*, J. of Math. Sciences., **167** (2010), №1, 16–29.
14. M. Ivanchov, Inverse problems for equations of parabolic type, VNTL Publishers, Lviv, 2003.

Ivan Franko National University of Lviv
hryntsiv@ukr.net

Надійшло 14.03.2013