УДК 517.574

С. Ю. Фаворов, Л. Д. Радченко

МЕРА РИССА ФУНКЦИЙ, СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ВО ВНЕШНОСТИ КОМПАКТА

S. Ju. Favorov, L. D. Radchenko. *Riesz measure of functions that are subharmonic in the exterior of a compact*, Mat. Stud. **40** (2013), 149–158.

We consider subharmonic functions in the exterior of a compact set in a finite-dimensional space that grows near the compact. We assume that the compact has some generalized convex property. We get an integral condition on function's Riesz measure and check its accuracy.

С. Ю. Фаворов, Л. Д. Радченко. *Мера Рисса функций, субгармонических во внешности компакта* // Мат. Студії. – 2013. – Т.40, №2. – С.149–158.

Рассматриваются субгармонические функции, определенные во внешности компакта в конечномерном пространстве и растущие при приближении к этому компакту. В предположении, что компакт обладает некоторой обобщенной выпуклостью, находятся интегральные условия на меру Рисса субгармонической функции и проверяется их точность.

1. Введение. В работе [2] рассматривались субгармонические функции $v(z)$ в областях вида $\mathbb{C} \setminus E$, где E — компакт, обладающий свойством так называемой r-выпуклости. Предполагалось, что функция $v(z)$ удовлетворяет условиям

$$v(z) \leqslant K_v \varphi(\operatorname{dist}(z, E)) \tag{1}$$

$$v(\infty) = 0, \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ положительная определенная на $(0, \infty)$ монотонно невозрастающая функция. Было доказано, что для любой абсолютно непрерывной неубывающей на $(0, \infty)$ функции $\psi(t)$ такой, что $\psi_1(t) = t^{-1}\psi(t)$ неубывает в некоторой окрестности нуля и

$$\int_0^1 \psi_1'(t)\varphi\Big(\frac{t}{3}\Big)dt + \int_1^\infty \psi'(t)\varphi\Big(\frac{t}{3}\Big)dt < \infty, \tag{3}$$

мера Рисса $\mu = \frac{\triangle v}{2\pi}$ функции v допускает интегральную оценку

$$\int_{\mathbb{C}\setminus E} \psi(\operatorname{dist}(\zeta, E))\mu(d\zeta) \leqslant K_v C(E, \varphi, \psi), \tag{4}$$

В настоящей работе мы находим аналог этого результата для субгармонических функций $v(x)$ в областях вида $\mathbb{R}^n \setminus E$, $n > 2$, E — компакт в $\mathbb{R}^n$, и их мер Рисса $\mu = \frac{\triangle v}{(n-2)\sigma_n}$, σ_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Далее, мы проверяем точность полученного результата.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 31B05.
Keywords: Blaschke condition; subharmonic function; analytic function; Riesz measure.

Однако непосредственное обобщение упомянутого результата на случай $n > 2$ невозможно. Как будет показано ниже, существует отрицательная субгармоническая функция $u(x)$ в $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, с бесконечной массой меры Рисса такая, что $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$. Полагая $E = \{0\}$, получаем, что условия (1) и (2) выполняются для любой положительной функции φ, в то время как интеграл в (4) расходится для любой неубывающей функции ψ.

Следующее определение является очевидным обобщением определения r-выпуклого компакта в плоскости ([2]).

Определение 1. Замкнутое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ назовем *r-выпуклым*, если $\mathbb{R}^n \setminus E = \bigcup B(x, r)$, где объединение берется по всем шарам радиуса r, не пересекающихся с E.

Очевидно, любое выпуклое замкнутое множество является r-выпуклым при любом $r < \infty$. Нетрудно также увидеть, что таким же свойством обладает любое замкнутое подмножество любой гиперплоскости.

В дальнейшем будем всегда считать, что $E \subset \mathbb{R}^n$ компакт со связным дополнением Ω, и через $\rho(x)$ будем обозначать $\operatorname{dist}(x, E)$.

Теорема 1. *Пусть E — r-выпуклый компакт, и пусть φ, ψ — абсолютно непрерывные положительные функции на $(0, \infty)$, φ монотонно невозрастает, ψ монотонно неубывает, причем $\varphi(t) \to +\infty$ при $t \to +0$, $\psi(t) \to 0$ при $t \to +0$, $\psi_1(t) = \frac{\psi(t)}{t}$ монотонно возрастает в окрестности нуля, при этом эти функции связаны соотношением*

$$\int_0^1 \psi_1'(t)\varphi\left(\frac{t}{10}\right) dt < \infty. \tag{5}$$

Тогда, если субгармоническая функция $v(x)$ в Ω удовлетворяет оценке

$$v(x) \leqslant \varphi(\rho(x)), \tag{6}$$

то ее мера Рисса $\mu = \frac{\triangle v}{(n-2)\sigma_n}$ при любом $R < \infty$ удовлетворяет интегральному условию

$$\int_{\Omega\cap\{x:\ |x|<R\}} \psi(\rho(x))\mu(dx) \leqslant C(E, \varphi, \psi, v, R). \tag{7}$$

Если, сверх того,

$$\varlimsup_{x\to\infty} |x|^{n-2} v(x) = 0, \tag{8}$$

то постоянную в (7) можно выбрать не зависящей от функции v.

Замечание 1. Если условие (8) не выполнено, то ни при каком R нельзя получить оценку интегралов в (7), которая не зависит от функции v. Действительно, добавляя к функции $v(x)$ функцию $Nu(x - \alpha)$, где $u(x)$ — упомянутая выше субгармоническая функция, мы не нарушим условия (6), в то время, как интеграл в (7) выбором N и α можно сделать сколь угодно большим.

Замечание 2. Все условия теоремы 1 на функции φ и ψ будут выполнены, если выбрать $\varphi(t) = t^{-q}$ и $\psi(t) = t^{q+1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $q \geqslant 1$.

В случае конечного множества E теорему 1 можно усилить. Отметим, что любое конечное множество является r-выпуклым с $r \geq (1/2)\min_{x,x'\in E:\ x\neq x'} |x - x'|$.

Теорема 2. *Пусть $E = \{z_1, \ldots, z_N\}$, φ, ψ абсолютно непрерывны на $(0, \infty)$, $\varphi(t)$ монотонно невозрастает, $\psi(t)$ монотонно неубывает, $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to 0$, $\psi(t) \to 0$ при $t \to 0$, а функция $v(x)$ удовлетворяет условию (6). Тогда если $\underline{\lim}_{t\to 0} t^{n-2}\varphi(t) < \infty$, то мера Рисса $\mu = \frac{\triangle v}{(n-2)\sigma_n}$ удовлетворяет условию*

$$\mu(\Omega \cap \{x\colon |x| < R\}) < \infty. \tag{9}$$

Если $\underline{\lim}_{t\to 0} t^{n-2}\varphi(t) = \infty$ и при этом $\int_0^1 \psi'(t)t^{n-2}\varphi(kt)dt < \infty$ при некоторой зависящей от E постоянной $k \in (0, 1)$, то мера Рисса μ удовлетворяет интегральной оценке

$$\int_{\Omega\cap\{x\colon |x|<R\}} \psi(\rho(x))\mu(dx) \leqslant C(E, \varphi, \psi, v, R) < \infty. \tag{10}$$

Если, кроме того, $\overline{\lim}_{x\to\infty} |x|^{2-n} v(x) = 0$, то постоянную в (10) можно сделать не зависящей от v.

Заметим, что условия на функции φ и ψ существенно более слабые, чем в теореме 1. Например, можно взять $q > n - 2$, $\varphi(t) = t^{-q}$, $\psi(t) = t^{q-(n-2)+\varepsilon}$.

Теорема 2 близка к точной. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть $E = \{z_1, \ldots, z_N\}$, φ, ψ абсолютно непрерывные функции на $(0, \infty)$, $\varphi(t)$ монотонно невозрастает, $\psi(t)$ монотонно неубывает, причем $\varphi(t^{\frac{1}{2-n}})$ выпукла, $\lim_{t\to 0} t^{n-2}\varphi(t) = \infty$ и при этом*

$$\int_0^1 \psi'(t)t^{n-2}\varphi(t)dt = \infty. \tag{11}$$

Тогда функция $v_0(x) = \varphi(\rho(x))$ является субгармонической функцией в Ω, причем ее мера Рисса $\mu_0 = \frac{\triangle v_0}{(n-2)\sigma_n}$ удовлетворяет условию $\int_{\Omega\cap\{x\colon |x|<R\}} \psi(\rho(x))\mu_0(dx) = \infty$, $R > \max_j |z_j|$.

Замечание 3. В доказательствах теорем 1 и 2 используется тот факт, что функция Грина области Ω_{kt}, $k < 1$ на множестве Ω_t не меньше чем $C_1\rho(x)$ (в теореме 1) или не меньше чем $C_2 > 0$ (в теореме 2). В теореме 3, наоборот, используется то, что на Ω_t функция G_{Ω_t} не больше чем $C_3 < \infty$. Поэтому проверить точность теоремы 1 так же, как это сделано для случая конечного множества в теореме 3, не представляется возможным: для этого нужна оценка сверху функции $G_{\Omega_{kt}}$ на множестве Ω_t как $C_4\rho(x)$. Такой оценки не существует, если E имеет изолированные точки, что можно показать так же, как в Лемме 2 для конечного множества E.

Пример отрицательной субгармонической функции в $\mathbb{R}^n$ с бесконечной массой, которая стремится к нулю на бесконечности.

Положим $\beta(t) = \begin{cases} 0, & t \geqslant 1 \\ \omega_n^{-1}, & 0 \leqslant t < 1 \end{cases}$, где через ω_n обозначен объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, $\beta_k(x) = k^{-2n}\beta(\frac{|x|}{k^2})$. Отметим, что $\operatorname{supp}\beta_k(x) \subset \overline{B(0, k^2)}$ (здесь и далее через $B(x, r)$ обозначается открытый шар радиуса r с центром в x) и $\int_{\mathbb{R}^n} \beta_k(x)m(dx) = 1$. Положим также

$$\chi_k(x) = \left(-\frac{1}{|x|^{n-2}}\right) * \beta_k(x) = \frac{1}{\omega_n k^{2n}} \int_{B(0,k^2)} \frac{-1}{|x-y|^{n-2}} m(dy).$$

Функция $\chi_k(x)$ является отрицательной субгармонической функцией в $\mathbb{R}^n$, а поскольку $|x|^{2-n}$ гармонична при $x \neq 0$, то $\chi_k(x) = -|x|^{2-n}$ при $|x| > k^2$. Наконец, полагаем

$$u(x) = \sum_k \chi_k(x - 2k^2). \tag{12}$$

Так как $\sum_k(-\chi_k(-2k^2)) = \sum_k(2k^2)^{2-n} < \infty$, то ряд в (12) сходится при $x = 0$, поэтому $u(x)$ есть субгармоническая функция в $\mathbb{R}^n$ и $u(x) \not\equiv -\infty$.

Далее, мера Рисса $\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\triangle w$ для $w = -\frac{1}{|x-y|^{n-2}}$ есть единичная масса в точке y. Поэтому для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $\gamma(x)$ имеем

$$\int \gamma(x)\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\triangle\chi_k(x)dx = \int \frac{\triangle\gamma(x)}{(n-2)\sigma_n}\,dx\frac{1}{\omega_n k^{2n}}\int_{B(0,k^2)}\frac{-1}{|x-y|^{n-2}}\,dy =$$
$$= \frac{1}{\omega_n k^{2n}}\int_{B(0,k^2)}dy\int\frac{\triangle\gamma(x)}{(n-2)\sigma_n}\cdot\left(-\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{\omega_n k^{2n}}\int_{B(0,k^2)}dy\int\frac{\gamma(x)}{(n-2)\sigma_n}\triangle\left(-\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right)dx = \frac{1}{\omega_n k^{2n}}\int_{B(0,k^2)}\gamma(y)dy.$$

Следовательно, $\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\triangle\chi_k(x-2k^2)$ есть суженная на шар $B(0,k^2)$ мера Лебега, деленная на объем этого шара. Поэтому общая масса меры Рисса для $u(x)$ бесконечна.

Затем при $|x - 2k^2| > k^2$ имеем

$$\chi_k(x - 2k^2) = -|x - 2k^2|^{2-n} > -k^{-2(n-2)}. \tag{13}$$

При $|x - 2k^2| \leqslant k^2$ воспользуемся вложением $B(0,k^2) \subset B(2k^2, 3k^2)$

$$\chi_k(x-2k^2) \geqslant \frac{1}{\omega_n k^{2n}}\int_{B(2k^2,3k^2)} -|x-2k^2-y|^{2-n}m(dy).$$

Оценивая среднее от субгармонической функции по шару $B(2k^2, 3k^2)$ через значение в центре, получаем для таких $x \in \mathbb{R}^n$

$$\chi_k(x-2k^2) \geqslant 3^n(-|2k^2-(x-2k^2)|^{2-n}) \geqslant -3^n k^{-2(n-2)}. \tag{14}$$

Теперь по $\varepsilon > 0$ выберем вначале N так, чтобы $\sum_{k>N} 3^n k^{-2(n-2)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Заметим, что при $|x| > 3N^2$ и $k \leqslant N$: $|x - 2k^2| > 3N^2 - 2k^2 \geqslant k^2$, поэтому для таких x из (13) и (14) следует $u(x) = \sum_{k<N}\chi_k(x-2k^2) + \sum_{k\geqslant N}\chi_k(x-2k^2) > \sum_{k<N} -|x-2k^2|^{2-n} - \frac{\varepsilon}{2}$. Но при x достаточно больших первая сумма тоже меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, так что $u(x) > -\varepsilon$.

Обозначим через Ω_t неограниченную компоненту связности множества $\{x \in \mathbb{R}^n\colon \rho(x) > t\}$ и положим $S = \sup\{|z|\colon z \in E\}$. Для доказательства основного результата нам понадобится следующее предложение.

Предложение 1. *Для любого r-выпуклого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ со связным дополнением найдется $t_0 < r/2$ такое, что при всех $t \leqslant t_0$ имеем $\{x\colon \rho(x) > \sqrt{2}t\} \subset \Omega_t$.*

Proof. Пусть $x_1, \dots, x_k$ есть $r/2$ сеть для $B(0, S+r+1) \cap \{x\colon \rho(x) > r\}$. Так как $\mathbb{R}^n \setminus E$ связно, то точки x_j можно соединить кривыми $L_j \subset \mathbb{R}^n \setminus E$ со сферой $\partial B(0, S+r+1)$, $j \in \{1, \dots, k\}$. Выберем $t_0 < \min\{r/2, \min_j \operatorname{dist}(L_j, E)\}$. Так как $L_j \subset \{x\colon \rho(x) > t_0\}$, то для всех $t \leq t_0$ имеем $x_j \in \Omega_t$.

Пусть теперь $x' \in \mathbb{R}^n \setminus E$ такая точка, что $\rho(x') > r$. Тогда для некоторого x_j имеем $|x - x_j| < r/2$. Если теперь x любая точка из отрезка $[x', x_j]$, то $\rho(x) \geq \rho(x') - |x' - x_j| > r/2$ и поэтому x' можно соединить отрезком с x_j внутри множества $\{x\colon \rho(x) > r/2\}$, так что $x' \in \Omega_t$ при $t < t_0$.

Пусть $t \leq t_0$ и x'' произвольная точка множества $\{x\colon \rho(x) > \sqrt{2}t\}$. Достаточно рассмотреть случай $\rho(x'') \leq r$. Пользуясь r-выпуклостью, выберем шар $B(x', r) \subset \mathbb{R}^n \setminus E$ так, что $x'' \in B(x', r)$. Проверим, что для любой точки x отрезка $[x'', x']$ выполняется неравенство $\rho(x) > t$. В этом случае точку x'' можно соединить с точкой x' внутри множества $\{x\colon \rho(x) > t\}$ и поэтому $x'' \in \Omega_t$ вместе с точкой x'.

Пусть это не так, и найдется точка $y \in E$ такая, что $|x - y| \leq t$. Рассмотрим треугольник, образованный точками x', x'', y. Так как $|x'' - y| \geq \sqrt{2}t$ и $|x - y| \geq r$, то углы при вершинах x' и x'' острые. Так как длина отрезка $[x', x'']$ меньше r, а длина h высоты, опущенной на этот отрезок, не больше t, то мы приходим к неравенству

$$\sqrt{(\sqrt{2}t)^2 - t^2} + \sqrt{r^2 - t^2} \leq \sqrt{(|x'' - y|)^2 - h^2} + \sqrt{|x' - y|^2 - h^2} < r,$$

откуда следует $\sqrt{r^2 - t^2} < r - t$, что невозможно. □

Определение 2. (см. [13, c.90]) Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$. Функция $G_D\colon D \times D \to [0, +\infty]$, определяемая равенством $G_D(x, y) = |x - y|^{2-n} - h_y(x)$, называется *функцией Грина для оператора Лапласа в области* D. Здесь функция $h_y(x)$ — гармоническая функция, решение задачи Дирихле в D с граничным значением $|x - y|^{2-n}$.

Эта функция симметричная относительно переменных x и y.

Назовем точку y^* инверсной к точке $y \in B(x_0, r)$, $y \neq x_0$, относительно граничной сферы этого шара, если она связана с y соотношением $y^* - x_0 = (\frac{r}{|y - x_0|})^2 (y - x_0)$. Согласно [13, c.91], функция Грина шара $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$G_{B(x_0,r)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \left(\frac{r}{|y-x_0|} \cdot \frac{1}{|x-y^*|}\right)^{n-2}, & (x, y \in B(x_0, r); y \notin \{x, x_0\}); \\ \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}}, & (x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}; y = x_0); \\ +\infty, & (x = y). \end{cases}$$

Определение 3. (см. [13], с. 31, Упражнение 1.9). Пусть D область в $\mathbb{R}^n$. Пусть $z, w \in D$. *Расстояние Гарнака между z и w* определяется как наименьшее число $\tau_D(z, w)$ такое, что для любой положительной гармонической функции h в D верно неравенство $\tau_D^{-1}(x, y) h(y) \leqslant h(x) \leqslant \tau_D(x, y) h(y)$.

Расстояние Гарнака имеет следующие свойства:

1. $\tau_D(x, y) = \tau_D(y, x) \geqslant 1$, $\tau_D(x, x) = 1$,
2. $\tau_D(x_1, x_3) \leqslant \tau_D(x_1, x_2)\tau_D(x_2, x_3)$, $x_1, x_2, x_3 \in D$,
3. τ_D непрерывная функция обеих переменных,
4. $\max_{x,y \in D_1} \tau_D(x, y) = C_5(D, D_1) < \infty$, где D_1 любое относительно компактное подмножество D.

Свойства 1, 2 следуют из определения. Для доказательства свойства 3 заметим, что для $x' \in B(x, r) \subset D$ ввиду неравенства Гарнака для гармонических функций имеем

$$\tau(x', x) \leqslant \frac{(r + |x' - x|)^{n-2}}{(r - |x' - x|)^{n-1}}.$$

Так как $\tau(x',x) \geqslant 1$, то из этого неравенства и свойства 2 расстояния вытекает непрерывность $\tau(x',x)$ по совокупности переменных в этом случае. Общий случай вытекает из неравенств $\tau(x,y)^{-1}\tau(y,y')^{-1}\tau(x,x')^{-1} \leqslant \tau(x',y') \leqslant \tau(x,y)\tau(x,x')\tau(y,y')$, где $x' \in B(x,r) \subset D$, $y' \in B(y,r) \subset D$. Свойство 4 вытекает из свойства 3.

Лемма 1. *Пусть E то же, что и в условии теоремы 1, $\widetilde{\Omega}_t = \Omega_t \cap B(0,S+2)$. Тогда при $t < t_0$, $x \in \Omega_t \cap \overline{B(0,S+1)}$ и $\lambda \in \partial B(0,S+1)$ выполняется неравенство*

$$G_{\widetilde{\Omega}_{t/5}}(x,\lambda) \geqslant C_1\rho(x) \tag{15}$$

с постоянной C_1, зависящей только от E.

Proof. Так как $\rho(x)$ ограничена сверху на $\overline{B(0,S+1)}$, а функция $G_{\widetilde{\Omega}_{t_0/5}}(x,\lambda)$ строго положительная и полунепрерывна снизу на компакте $K = \{x\colon \rho(x) \geqslant \frac{t_0}{2}, |x| \leqslant S+1\} \times \partial B(0,S+1)$, то $t \leqslant t_0$ и $(x,\lambda) \in K$ справедлива оценка $G_{\widetilde{\Omega}_{t/5}}(x,\lambda) \geqslant G_{\widetilde{\Omega}_{t_0/5}}(x,\lambda) \geqslant C_6 \geqslant C_1\rho(x)$. Это доказывает (15) при $\rho(x) \geq t_0/2$.

Пусть теперь $t < \rho(x) < t_0/2$, и пусть $x \in B(x',r) \subset \mathbb{R}^n \setminus E$. Справедлива цепочка неравенств $r > |x-x'| \geq \rho(x') - \rho(x) > r - t_0/2 > t_0/2 > \rho(x) > t$. Положим $r_1 = |x-x'| - t/5$, $r_2 = \rho(x) - t/5$. Заметим, что $r_1 > r_2 > 4t/5$ и $r_2 > 4\rho(x)/5$.

Множество $L = \partial B(x',r_1) \cap B(x,r_2/2)$ непусто, так как $r_1 - r_2/2 < |x-x'| < r_1 + r_2/2$. Пусть M есть $(n-1)$-мерный шар с границей $\partial B(x',r_1) \cap \partial B(x,r_2/2)$. Имеем $|L| \geqslant |M|$, где символом $|\cdot|$ обозначен $(n-1)$-мерный объем множества. Радиус шара M есть высота h треугольника с вершиной на $\partial B(x',r_1) \cap \partial B(x,r_2/2)$ и основанием $[x,x']$, а так как $|x-x'| > r_1$ и $|x-x'| > r_2/2$, то углы при вершинах x и x' в этом треугольнике острые, поэтому основание высоты лежит на отрезке $[x,x']$. Таким образом,

$$\sqrt{r_1^2 - h^2} + \sqrt{(r_2/2)^2 - h^2} = r_1 + t/5 < r_1 + r_2/4.$$

Отсюда следует $h > r_2/6$, потому что в противном случае получаем

$$\sqrt{r_1^2 - (r_2/6)^2} < r_1 + r_2/4 - \sqrt{(r_2/2)^2 - (r_2/6)^2} < r_1 - r_2/6,$$

что невозможно. Итак,

$$|L| > |M| = \omega_{n-1}h^{n-1} > \omega_{n-1}(r_2/6)^{n-1}. \tag{16}$$

Так как $r_1 + \frac{t}{5} < r$, то функция $G_{\widetilde{\Omega}_{t/5}}(\zeta,x)$ гармонична по ζ и положительна в шаре $B(x',r_1)$. Поэтому

$$G_{\widetilde{\Omega}_{t/5}}(x',x) = \frac{1}{\sigma_n r_1^{n-1}}\int_{\partial B(x',r_1)} G_{\widetilde{\Omega}_{t/5}}(\zeta,x)m(d\zeta) > \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}\int_L G_{\widetilde{\Omega}_{t/5}}(\zeta,x)m(d\zeta). \tag{17}$$

Поскольку $B(x,r_2) \subset \widetilde{\Omega}_{t/5}$, то для $y \in B(x,r_2)$ имеем

$$G_{\widetilde{\Omega}_{t/5}}(y,x) \geqslant G_{B(z,r_2)}(y,x) = \frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{1}{r_2^{n-2}}. \tag{18}$$

Для $\zeta \in L$ имеем $|x-\zeta| = \frac{r_2}{2}$, поэтому из (16)–(18) получаем

$$G_{\widetilde{\Omega}_{t/5}}(x',x) > \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \cdot \frac{2^{n-2}-1}{r_2^{n-2}}|L| > \frac{(2^{n-2}-1)r_2\omega_{n-1}}{6^{n-1}\sigma_n r^{n-1}} > \frac{\rho(x)\omega_{n-1}}{5\cdot 3^{n-1}\sigma_n r^{n-1}}.$$

Далее, так как $\rho(x) < \frac{t_0}{2}$, то функция $G_{\widetilde{\Omega}_{t/5}}(\zeta, x)$ неотрицательна и гармонична по переменной ζ в области $\widetilde{\Omega}_{t_0}$. При этом, поскольку $t_0 < \frac{r}{2}$, то множество $\overline{\Omega}_r \cap B(0, S+1)$ относительно компактно в $\widetilde{\Omega}_{t_0}$, поэтому расстояние Гарнака $\tau_{\widetilde{\Omega}_{t_0}}(\zeta, \lambda)$ равномерно отделено от нуля при $\zeta \in \overline{\Omega}_r \cap B(0, S+1)$, $\lambda \in \partial B(0, S+1)$. Таким образом, для любого $x \in \widetilde{\Omega}_t$, учитывая симметричность $G_{\widetilde{\Omega}_{t/5}}(\zeta, x)$ и то, что $x' \in \overline{\Omega}_r \cap B(0, S+1)$ имеем $G_{\widetilde{\Omega}_{t/5}}(x, \lambda) \geqslant \tau_{\widetilde{\Omega}_{t_0}}(x', \lambda) G_{\widetilde{\Omega}_{t/5}}(x', x) \geqslant C_7 \cdot G_{\widetilde{\Omega}_{t/5}}(x', x) \geqslant C_1 \rho(x)$. □

Доказательство теоремы 1. Пользуясь представлением Рисса ([15, Теорема 4.5.4]) представим функцию v в области $\widetilde{\Omega}_{t/10}$ в виде $v(\lambda) = u(\lambda) - \int_{\widetilde{\Omega}_{t/10}} G_{\widetilde{\Omega}_{t/10}}(\lambda, \zeta)\mu(d\zeta)$, где μ — мера Рисса функции $v(x)$, а $u(x)$ — наименьшая гармоническая мажоранта для $v(x)$ в области $\widetilde{\Omega}_{t/10}$. Так как $v(x) \leqslant \varphi(\rho(x))$ и $\rho(x) \geqslant \frac{t}{10}$ в $\widetilde{\Omega}_{t/10}$, то $v(x) \leqslant \varphi(t/10)$ и $u(x) \leqslant \varphi(t/10)$ в $\widetilde{\Omega}_{t/10}$. Пользуясь сначала предложением 1, а затем леммой 1, получаем при $t \leqslant t_0$

$$\int_{\{\zeta\colon t<\rho(\zeta), |\zeta|<S+1\}} \rho(\zeta)\mu(d\zeta) \leqslant \int_{\Omega_{t/2}\cap B(0,S+1)} \rho(\zeta)\mu(d\zeta) \leqslant C_1^{-1} \int_{\widetilde{\Omega}_{t/10}} G_{\widetilde{\Omega}_{t/10}}(\zeta, \lambda)\mu(d\zeta) =$$
$$= u(\lambda) - v(\lambda) \leqslant \varphi(t/10) - v(\lambda), \tag{19}$$

где в качестве λ можно брать любую точку из $\partial B(0, S+1)$ такую, что $v(\lambda) \neq -\infty$. Положим $H(t, \mu) = \int_{\{\zeta\colon t<\rho(\zeta), |\zeta|<S+1\}} \rho(\zeta)\mu(d\zeta)$. При $0 < t \leqslant t_0$ имеем

$$H(t, \mu) \leqslant C_8 \varphi(t/10) + C_9, \tag{20}$$

причем постоянная C_8 не зависит от v. Более того, поскольку $\rho(x) \leqslant 2S+1$ при $x \in \Omega \cap B(0, S+1)$, то $H(t, \mu) = 0$ при $t \geqslant 2S+1$, и постоянные C_8 и C_9 можно подобрать так, что (20) верно для всех $t > 0$, причем C_8 по-прежнему не зависит от v.

Если $\overline{\lim}_{x\to\infty} |x|^{n-2} v(x) = 0$, то преобразованием Кельвина $v^*(x) = (\frac{|x^*|}{S+2})^{n-2} v(x^*)$, где $x^* = (\frac{S+2}{|x|})^2 x$, относительно сферы $\partial B(0, S+2)$ получим субгармоническую функцию в окрестности нуля такую, что $\overline{\lim}_{x\to 0} v^*(x) = 0$. Следовательно, эта функция субгармонически продолжается нулем в точку $x = 0$, и по принципу максимума на сфере $\partial B(0, \frac{1}{S+2})$ есть точка ζ_0, в которой $v^*(x)$ неотрицательна. Следовательно, на сфере $\partial B(0, S+2)$ есть точка, где $v(x) \geqslant 0$, и если в (19) в качестве λ выбрать именно эту точку, то получим

$$H(t, \mu) \leqslant C_8 \varphi(t/10). \tag{21}$$

Воспользуемся так называемой “формулой послойного представления”(см. [14, Теорема 1.13]), которая, по существу, является комбинацией замены переменных и интегрирования по частям.

Пусть $\psi(t)$ абсолютно непрерывная функция на $(0, +\infty)$, $\nu(d\zeta)$ — мера на X, $f(x)$ — неотрицательная измеримая функция на X. Тогда

$$\int_X \psi(f(x))\nu(dx) = \int_0^\infty \psi'(t)\nu\{x\colon f(x) > t\}dt. \tag{22}$$

Применяя эту формулу для области $X = \Omega \cap B(0, S+1)$, функции $f(x) = \rho(x)$ и меры $\nu(E) = \int_E \rho(\zeta)\mu(d\zeta)$, получаем

$$\int_{\Omega\cap B(0,S+1)} \psi(\rho(x))\mu(dx) = \int_{\Omega\cap B(0,S+1)} \psi_1(\rho(x))\rho(x)\mu(dx) = \int_0^{2S+1} \psi_1'(t) H(t, \mu)dt.$$

Теперь ввиду (20) и в предположении, что $\psi_1(t)$ возрастает при $t \leqslant t_0$

$$\int_0^{t_0} \psi_1'(t)H(t,\mu)dt \leqslant C_8 \int_0^{t_0} \psi_1'(t)\varphi(t/10)dt + C_9\psi_1(t_0). \tag{23}$$

Для $t_0 < t < 2S+1$ имеем $H(t,\mu) \leqslant H(t_0,\mu) \leqslant C_8\varphi(t_0/10) + C_9$ и поэтому $\int_{t_0}^{2S+1} \psi_1'(t)H(t,\mu)dt \leqslant (C_8\varphi(t_0/5) + C_9)\psi_1(2S+1)$.

Таким образом, отсюда и из (23) ввиду (5) получаем $\int_{\Omega\cap B(0,S+1)} \psi(\rho(x))\mu(dx) \leqslant C(\varphi,\psi,E)$. Легко видеть, что $S+1$ можно заменить на любое число. Кроме того, в случае когда $\overline{\lim}_{x\to\infty}|x|^{n-2}v(x) = 0$, можно (20) заменить на (21), так что зависимость от v в (7) исчезнет. $\square$

Следующая лемма используется в доказательстве теоремы 2 вместо леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* $E = \{z_1,\dots,z_N\}$, $S = \max_j |z_j|$, $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \rho(x) > t\}$, $\widetilde{\Omega}_t = \Omega_t \cap B(0,3S+4)$, $t_1 = \frac{1}{2}\min\{1, \min_{j\neq k}|z_j - z_k|\}$, $æ = \frac{1}{2}[(2S+2)^{2-n} - (2S+3)^{2-n}]$. *Тогда при некотором* $k \in (0,1)$, *зависящем только от* S *и* N, *всех* $\lambda \in \partial B(0,S+1)$, $x \in \Omega_t \cap B(0,S+1)$, $t \leqslant t_1$, *выполняется неравенство* $G_{\widetilde{\Omega}_{kt}}(x,\lambda) \geqslant æ$.

Доказательство леммы. Полагаем $w(x) = \frac{1}{|x-\lambda|^{n-2}} - \frac{1}{(2S+3)^{n-2}} - \frac{æ}{N}\sum_{j=1}^N (\frac{t}{|x-z_j|})^{n-2}$. При $|x| = 3S+4$ имеем $w(x) \leqslant \frac{1}{(|x|-|\lambda|)^{n-2}} - \frac{1}{(2S+3)^{n-2}} \leqslant 0$. При x таком, что $|x - z_j| = kt$ при каком-то j, имеем $|x| \leqslant S + \frac{1}{2}$ и $|x-\lambda| \geqslant ||\lambda| - |x|| \geqslant \frac{1}{2}$. Поэтому при достаточно малых k справедлива оценка $w(x) \leqslant 2^{n-2} - \frac{æ}{N}\cdot\frac{1}{k^{n-2}} \leqslant 0$. Кроме того, для всех $x \in \Omega_t \cap B(0,S+1)$ имеем $|x - z_j| \geqslant t$, поэтому $w(x) \geqslant \frac{1}{(|x|+|\lambda|)^{n-2}} - \frac{1}{(2S+3)^{n-2}} - N\cdot\frac{æ}{N} \geqslant æ$. Функция $G_{\widetilde{\Omega}_{kt}}(x,\lambda) - w(x)$ гармоническая в $\widetilde{\Omega}_{kt}$ и неотрицательная на $\partial\widetilde{\Omega}_{kt}$. Поэтому при $x \in \Omega_t \cap B(0,S+1)$ имеем $G_{\widetilde{\Omega}_{kt}}(x,\lambda) \geqslant w(x) \geqslant æ$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Как и в доказательстве теоремы 1, воспользуемся представлением Рисса $v(\lambda) = u(\lambda) - \int_{\widetilde{\Omega}_{kt}} G_{\widetilde{\Omega}_{kt}}(\zeta,\lambda)\mu(d\zeta)$. Здесь k то же, что и в лемме 2, $\widetilde{\Omega}_t = \Omega_t \cap B(0,3S+4)$, $\lambda \in \partial B(0,S+1)$ такое, что $v(\lambda) \neq -\infty$. Пользуясь леммой 2, получаем при $t \leqslant t_1$

$$\mu\{x\colon \rho(x) > t, |x| < S+1\} \leqslant æ^{-1} \int_{\{x\colon \rho(x)>t,|x|<S+1\}} G_{\widetilde{\Omega}_{kt}}(x,\lambda)\mu(dx) \leqslant æ^{-1}[u(\lambda) - v(\lambda)]. \tag{24}$$

Для оценки $u(\lambda)$ сверху рассмотрим гармоническую функцию $w(x) = [(kt)^{n-2}\varphi(kt) + (4S+4)^{n-2}\varphi(2S+4)]\sum_{j=1}^N \frac{1}{|x-z_j|^{n-2}}$. Проверим, что эта функция мажорирует $v(x)$ в $\widetilde{\Omega}_{kt}$. Достаточно это проверить на $\partial\widetilde{\Omega}_{kt}$.

Если $|x - z_j| = kt$ при некотором j, то это очевидно, т.к. тогда $w(x) \geqslant \varphi(kt)$.

Если $|x| = 3S+4$, то $\rho(x) \geqslant 2S+4$ и $|x - z_j| \leqslant 4S+4$, поэтому опять $w(x) \geqslant \varphi(2S+4) \geqslant v(x)$.

Таким образом, $v(x) \leqslant w(x)$ и, следовательно,

$$u(\lambda) \leqslant C_{10}(kt)^{n-2}\varphi(kt) + C_{11} \tag{25}$$

с зависящими только от E постоянными C_{10} и C_{11}.

Если теперь $\underline{\lim}_{t\to 0} t^{n-2}\varphi(t) = C_{12} < \infty$, то, рассматривая только те значения t, для которых $(kt)^{n-2}\varphi(kt) \leqslant 2C_{12}$, получаем из (24) и (25) $\mu\{x\colon \rho(x) > t, |x| < S+1\} \leqslant C_{13}$ на последовательности $t \to 0$. Это доказывает (9).

Пусть теперь $\lim_{t\to 0} t^{n-2}\varphi(t) = \infty$. Применяя формулу (22) для области $\Omega\cap B(0,S+1)$, функции $f(x)=\rho(x)$ и меры $\mu(dx)$ имеем

$$\int_{\Omega\cap B(0,S+1)} \psi(\rho(x))\mu(dx) = \int_0^{2S+1} \psi'(t)\mu\{x\colon \rho(x)>t, |x|<S+1\}dt.$$

Пользуясь неравенствами (24) и (25) и учитывая, что $\psi(0)=0$, приходим к неравенству

$$\int_0^{2S+1} \psi'(t)\mu\{x\colon \rho(x)>t, |x|<S+1\}dt \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_0^{t_1} + \int_{t_1}^{2S+1}\right) \psi'(t)\mu\{x\colon \rho(x)>t, |x|<S+1\}dt \leqslant C_{14}\int_0^{t_1} \psi'(t)t^{n-2}\varphi(kt)dt + C_{15}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Если $\overline{\lim}_{|x|\to\infty}|x|^{n-2}v(x)=0$, то, рассуждая как в доказательстве теоремы 1, получаем, что постоянные C_{14} и C_{15} не зависят от v. □

Доказательство теоремы 3. Так как функция $\rho(x)^{2-n} = \sup_{z_j\in E}\frac{1}{|x-z_j|^{n-2}}$ субгармоническая в Ω, то субгармонической будет и функция $v_0(x) = \varphi((\rho(x)^{2-n})^{\frac{1}{2-n}})$. Положим $\widetilde{\Omega}_t = \Omega_t\cap B(0,3S+4)$. Функция Грина шара $G_{B(0,3S+4)}(x,\lambda)$ равномерно ограничена сверху в шаре $|x|<S+1$ при $\lambda\in\partial B(0,S+2)$, поэтому имеем

$$\int_{\Omega_t\cap B(0,S+1)} \mu_0(dx) \geqslant C_{16}\int_{\Omega_t\cap B(0,S+1)} G_{B(0,3S+4)}(x,\lambda)\mu_0(dx) \geqslant C_{16}\int_{\Omega_t\cap B(0,S+1)} G_{\widetilde{\Omega}_t}(x,\lambda)\mu_0(dx). \quad (26)$$

Далее

$$\int_{\Omega_t\cap B(0,S+1)} G_{\widetilde{\Omega}_t}(x,\lambda)\mu_0(dx) = \int_{\widetilde{\Omega}_t} G_{\widetilde{\Omega}_t}(x,\lambda)\mu_0(dx) - \int_{B(0,3S+4)\setminus\overline{B(0,S+1)}} G_{\widetilde{\Omega}_t}(x,\lambda)\mu_0(dx). \quad (27)$$

По формуле Грина

$$\int_{\widetilde{\Omega}_t} G_{\widetilde{\Omega}_t}(x,\lambda)\mu_0(dx) = u_t(\lambda) - v_0(\lambda) \geqslant u_t(\lambda) - \varphi(2). \quad (28)$$

Здесь $u_t(x)$ — наименьшая гармоническая мажоранта для $v_0(x)$ в области $\widetilde{\Omega}_t$.

Положим $w(x) = t^{n-2}\varphi(t)[\max_j \frac{1}{|x-z_j|^{n-2}} - \frac{1}{(2S+4)^{n-2}}]$. Функция $w(x)$ субгармоническая в $\mathbb{R}^n\setminus E$, при этом, если $|x-z_j|=t$, то $w(x)\leqslant\varphi(t)$. Если же $|x|=3S+4$, то $w(x)\leqslant t^{n-2}\varphi(t)[\frac{1}{(2S+4)^{n-2}} - \frac{1}{(2S+4)^{n-2}}] = 0$. Так как $u_t(x)=\varphi(\rho(x))$ при $|x|=3S+4$ и $u_t(x)=\varphi(t)$ при $\rho(x)=t$, то $u_t(x)\geqslant w(x)$ в $\widetilde{\Omega}_t$.

Далее, $w(\lambda) \geqslant t^{n-2}\varphi(t)[\frac{1}{(2S+2)^{n-2}} - \frac{1}{(3S+4)^{n-2}}] \geqslant C_{16}t^{n-2}\varphi(t)$ и, следовательно, ввиду (28)

$$\int_{\widetilde{\Omega}_t} G_{\widetilde{\Omega}_t}(x,\lambda)\mu_0(dx) \geqslant C_{17}t^{n-2}\varphi(t). \quad (29)$$

Обозначим для краткости множество $B(0,3S+4)\setminus\overline{B(0,S+1)}$ через D_S и сравним функции $G_{\widetilde{\Omega}_t}(x,\lambda)$ и $G_{D_S}(x,\lambda)$ на множестве D_S. Если $h_\lambda(x)$ — решение задачи Дирихле в D_S с граничными значениями $\frac{1}{|x-\lambda|^{n-2}}$, то, как следует из вида функции Грина, $G_{D_S}(x,\lambda) + h_\lambda(x) = \frac{1}{|x-\lambda|^{n-2}} \geqslant G_{\widetilde{\Omega}_t}(x,\lambda)$.

Но при $|\lambda| = S+2$ имеем $|x-\lambda| \geqslant 1$ на ∂D_S, поэтому $h_\lambda(x) \leqslant 1$ и, следовательно, $G_{\widetilde{\Omega}_t}(x,\lambda) \leqslant G_{D_S}(x,\lambda)+1$. При этом по формуле Грина $\int_{D_S} G_{D_S}(x,\lambda)\mu_0(dx) = v_0(\lambda)-u(\lambda)$, где $u(\lambda)$ — наименьшая гармоническая мажоранта $\varphi(\rho(x))$ в D_S. Имеем $1 \leqslant \rho(\lambda) \leqslant 4S+4$ в D_S. Поэтому $\varphi(4S+4) \leqslant v_0(z) \leqslant \varphi(1)$ и такую же оценку допускает $u(\lambda)$. Отметим еще, что масса меры μ_0 на D_S конечна, поэтому из (26), (27), (28), (29) и $G_{\widetilde{\Omega}_t}(x,\lambda) \leqslant G_{D_S}(x,\lambda)+1$ следует при малых t

$$\mu_0(\Omega_t \cap B(0,S+1)) \geqslant C_{18}t^{n-2}\varphi(t). \tag{30}$$

Далее, применим формулу (22) к области $\Omega \cap B(0,S+1)$ с мерой μ_0

$$\int_{\Omega\cap B(0,S+1)} \psi(\rho(x))\mu_0(dx) = \int_0^\infty \psi'(t)\mu_0\{x\colon \rho(x) > t, |x| < S+1\}dt.$$

Но ввиду (30) и (11) при малых t_1 имеем $\int_0^{t_1} \psi'(t)\mu_0\{x\colon \rho(x) > t, |x| < S+1\}dt = \infty$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Favorov, L. Golinskii, *A Blaschke-type condition for analytic and subharmonic functions and application to contraction operators*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **226** (2009), 37–47.
2. S. Favorov, L. Golinskii, *Blaschke-type conditions on unbounded domains, generalized convexity and applications in perturbation theory*, to appear.
3. S.Yu. Favorov, L.B. Golinskii. *Blaschke-Type Conditions for Analytic and Subharmonic Functions in the Unit Disk*, Local Analogs and Inverse Problems, Computational Methods and Function Theory, **12** (2012), №1, 151–166.
4. L.D. Radchenko, S.Yu. Favorov, *An analytical andsubharmonic functions in a disk near the growing part of the boundary*, in printing. (in Russian)
5. G. Kramer, Mathematical Methods of Statistics, M., Mir, 1975, 648 p. (in Russian)
6. J. Garnett, Bounded analytic functions, Graduate Texts in Mathematics, V.236, Springer, New York, 2007.
7. A. Borichev, L. Golinskii, S. Kupin, *A Blaschke-type condition and its application to complex Jacobi matrices*, Bull. London Math. Soc., **41** (2009), 117–123.
8. W.K. Hayman, P.B. Kennedy, Subharmonic functions, Academic Press Inc., London, LTD, 1976, 304 p.
9. M.M. Djrbashian, *Theory of Factorization of Functions Meromorphic in the Disk*, In: Proceedings of the ICM, Vancouver, B.C., **2** (1974), 197–202.
10. W.K. Hayman, B. Korenblum, *A critical growth rate for functions regular in a disk*, Michigan Math. J., **27** (1980), 21–30.
11. F.A. Shamoyan, On zeros of analytic in the disc functions growing near its boundary, Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), **18** (1983), №1.
12. A.M. Jerbashian, *On the theory of weighted classes of area integrable regular functions*, Complex Variables, **50** (2005), 155–183.
13. P.H. Armitage, S.J. Gardnier, Classical potential theory, Springer, 2002, 333 p.
14. E. Lieb, M. Loss, Analysis, Graduate Studies in Mathematics, V.14, AMS, Providence, RI, 1997.
15. T. Ransford, Potential theory in the complex plane, London Math. Soc. Student Texts, V.28, Cambridge University Press, 1995.

V.N. Karazin Kharkiv National University
liudmyla.radchenko@gmail.com.

Поступило 26.09.2013
После переработки 5.12.2013