УДК 514.764

И. Н. Курбатова

О ДИФФЕОМОРФИЗМАХ ПОЧТИ КВАТЕРНИОННЫХ МНООБРАЗИЙ

I. N. Kurbatova. *On diffeomorfisms of almost quaternion manifolds*, Mat. Stud. **40** (2013), 95–103.

The special type mappings between Riemannian spaces with almost quaternion structure are studied. The fundamental theorems of theory of these mappings are proved.

И. Н. Курбатова. *О диффеоморфизмах почти кватернионных многообразий* // Мат. Студії. – 2013. – Т.40, №1. – C.95–103.

Исследовались специальные типы отображений между римановыми пространствами с почти кватернионной структурой. Доказаны основные теоремы теории рассматриваемых отображений.

1. Введение. В последние десятилетия интенсивно изучаются многочисленные обобщения теории геодезических отображений аффинносвязных и римановых пространств и голоморфно-проективных отображений почти комплексных многообразий.

Геодезическое отображение одного пространства аффинной связности A_n на другое $\overline{A}_n$ определяется как взаимно однозначное соответствие между их точками, при котором каждая геодезическая линия A_n переходит в геодезическую линию $\overline{A}_n$.

Если на римановом пространстве определена абсолютно параллельная почти комплексная структура, согласованная с метрикой ([1]), его называют келеровым. Известно ([2]), что геодезическое отображение келерова пространства на келерово с сохранением комплексной структуры является тривиальным. Поэтому для келеровых пространств изучаются более общие, так называемые голоморфно проективные отображения, введенные Т. Оцуки и Я. Тасиро ([3]) и явившиеся предметом исследования многих отечественных и зарубежных математиков. Обстоятельное изложение результатов, полученных в теории геодезических и голоморфно проективных отображений, можно найти в ([2], [4]).

Одним из направлений современной дифференциальной геометрии является теория дифференцируемых многообразий, снабженных различными геометрическими структурами, в частности, алгебраическими, то есть изоморфно предсталяющими некоторую алгебру ([5], [6]). В соответствии с этим развивается теория диффеоморфизмов многообразий с различными аффинорными структурами, таких, например, как квазигеодезические, почти геодезические, тригеодезические, p-геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств.

В ([7]) Н. С. Синюковым и Й. Микешем было предложено весьма широкое обобщение геодезических и голоморфно-проективных отображений пространств аффинной

2010 *Mathematics Subject Classification:* 53B20, 53B35.
Keywords: Riemannian space; almost quaternion structure.

связности без кручения с произвольной аффинорной структурой — квазипланарные отображения.

Заметим, что во всех вышеуказанных отображениях многообразия были наделены лишь одной аффинорной структурой определенного типа.

Мы исследуем отображения пространств аффинной связности без кручения с почти кватернионной структурой, которые называем 4-квазипланарными.

Как известно, почти кватернионным пространством ([1]) называется дифференцируемое многообразие X_n с заданными на нем почти комплексными структурами F^1 и F^2, которые наряду с

$$\overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h = -\delta_i^h \tag{1}$$

удовлетворяют условиям

$$\overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h + \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = 0. \tag{2}$$

Тензор $\overset{3}{F}{}_i^h = \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h$, очевидно, тоже определяет почти комплексную структуру. Связь между F^1, F^2, F^3 имеет вид

$$\overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h = -\overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = \overset{3}{F}{}_i^h, \ \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{3}{F}{}_\alpha^h = -\overset{3}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h = \overset{1}{F}{}_i^h, \ \overset{3}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = -\overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{3}{F}{}_\alpha^h = \overset{2}{F}{}_i^h. \tag{3}$$

Любые две из трех определяют исходную почти кватернионную структуру на X_n.

Почти кватернионная структура на пространстве аффинной связности A_n с объектом связности Γ называется келеровой ([1]), если каждая из образующих аффинорных структур — келерова, то есть $\overset{s}{F}{}_{i,j}^h = 0, \ s \in \{1,2,3\}$, где “,” — знак ковариантной производной по связности Γ.

Ранее мы показали ([8]), что 4-квазипланарное отображение келерова кватернионного пространства на келерово с сохранением кватернионной структуры тривиально. Поэтому имеет смысл рассматривать условия более общего дифференциального характера, чем ковариантное постоянство аффиноров почти кватернионной структуры, либо не требовать, чтобы образ келерова кватернионного пространства при отображении также был келеровым.

В п.2 мы даем основные уравнения 4-квазипланарных отображений пространств аффинной связности с сохранением почти кватернионной структуры.

В п.3 вводится понятие Q^*-пространства и выясняется специфика рассматриваемого отображения при имеющихся дифференциальных условиях на структуру.

В п.4 строятся геометрические объекты, инвариантные относительно 4-квазипланарных отображений Q^*-пространств

В п.5 рассматриваются римановы Q^*-пространства, допускающие 4-квазипланарные отображения на плоское пространство. Они названы 4-квазиплоскими.

Основной задачей теории рассматриваемых (как, впрочем, и любых других) отображений является разработка регулярных методов, позволяющих, во-первых, для заданного аффинносвязного (риманова) пространства выяснить, допускает ли оно нетривиальные отображения указанного типа или нет и, во-вторых, если допускает, то найти все пространства, на которые отображается данное пространство.

Решению этих вопросов посвящены результаты п.6, где в разной форме представлены основные теоремы теории 4-квазипланарных отображений римановых Q^*-пространств. Приводятся примеры использования этих теорем.

Исследования носят локальный характер, проводятся в тензорной форме в классе достаточно гладких функций.

2. 4**-квазипланарные отображения пространств аффинной связности с почти кватернионной структурой.** Рассмотрим пару пространств аффинной связности без кручения A_n, $\overline{A}_n$ с объектами связности Γ, $\overline{\Gamma}$ и почти кватернионными структурами (F^1, F^2), $(\overline{F}^1, \overline{F}^2)$, соответственно.

Назовем 4-*квазипланарным отображением* $f\colon A_n \to \overline{A}_n$*, сохраняющим почти кватернионную структуру*, взаимно однозначное отображение между их точками, при котором в общей по отображению системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ имеет место зависимость

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \sum_{s=0}^{3} \overset{s}{q}_{(i}(x) \overset{s}{F}{}^h_{j)}(x), \tag{4}$$

где $F^{h\circ}_i = \delta^h_i$, $F^{h3}_i = F^{\alpha 1}_i F^{h2}_\alpha$, $F^{hs}_i(x) = \overline{F}^{hs}_i(x)$, $q^s{}_i(x)$ — некоторые ковекторы. Нетрудно видеть, что при отображениях (4) сохраняются кривые вида $x^h = x^h(t)$, $h \in \{1, 2, \dots, n\}$, вдоль которых выполняются дифференциальные уравнения

$$\lambda^h{}_{,\alpha}\lambda^\alpha = \lambda^\alpha \sum_{s=0}^{3} \overset{s}{a}(t) \overset{s}{F}{}^h_\alpha, \ \lambda^h = \frac{dx^h}{dt},$$

где $a^s(t)$ — некоторые функции параметра t, $<,>$ — знак ковариантной производной по связности Γ. Эти кривые представляют собой аналог геодезических линий пространств аффинной связности и аналитически планарных кривых почти комплексных многообразий.

3. 4**-квазипланарные отображения** Q^***-пространств.** Рассмотрим пространства A_n и $\overline{A}_n$, находящиеся в 4-квазипланарном отображении, сохраняющем почти кватернионную структуру, т.е. $(F^1, F^2) \equiv (\overline{F}^1, \overline{F}^2)$. Будем полагать, что помимо алгебраических условий (1), (2) структурные аффиноры удовлетворяют условиям дифференциального характера

$$\overset{*}{Q}{}^{\gamma\delta}_{ij} \sum_{s=0}^{3} \overset{s}{F}{}^h_\alpha \overset{s}{F}{}^\alpha_{\gamma,\delta} = 0, \quad \text{где} \quad \overset{*}{Q}{}^{\gamma\delta}_{ij} = \sum_{s=0}^{3} \overset{s}{F}{}^\gamma_i \overset{s}{F}{}^\delta_j. \tag{5}$$

Отметим, что почти кватернионные многообразия, структура которых удовлетворяет дифференциальным условиям (5), являются обобщением так называемых O^*-пространств ([1]) в теории почти комплексных многообразий. В этой связи будем называть пространства, в которых выполняются (1), (2), (5), Q^*-пространствами.

Поскольку тензор Q^{*hk}_{ij} может быть представлен в виде

$$\overset{*}{Q}{}^{hk}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta^h_\alpha \delta^k_\beta + \overset{1}{F}{}^h_\alpha \overset{1}{F}{}^k_\beta\right)\left(\delta^\alpha_\gamma \delta^\beta_\sigma + \overset{2}{F}{}^\alpha_\gamma \overset{2}{F}{}^\beta_\sigma\right)\left(\delta^\gamma_i \delta^\sigma_j + \overset{3}{F}{}^\gamma_i \overset{3}{F}{}^\sigma_j\right),$$

то классу Q^*-пространств принадлежат и почти кватернионные пространства, являющиеся O^*-, K-, H- и келеровыми пространствами ([1]) относительно каждой из структур F^1, F^2, F^3. Все вышеотмеченные пространства принадлежат классу почти аптовых пространств ([1]). Мы также полагаем, что относительно каждой из структур F^s пространства A_n и $\overline{A}_n$ являются почти аптовыми, то есть

$$\overset{s}{F}{}^\alpha_{i,\alpha} = 0, \quad \overset{s}{F}{}^\alpha_{i|\alpha} = 0, \quad s \in \{1, 2, 3\}, \tag{6}$$

где $< | >$ — знак ковариантной производной по связности $\overline{\Gamma}$.

На основании (1), (2), (4) соотношения (6) эквивалентны системе уравнений

$$n\Big(\overset{\circ}{q}_\alpha \overset{1}{F}{}_i^\alpha + \overset{1}{q}_i\Big) + 2\Big(\overset{2}{q}_\alpha \overset{3}{F}{}_i^\alpha - \overset{3}{q}_\alpha \overset{2}{F}{}_i^\alpha\Big) = 0,\ n\Big(\overset{\circ}{q}_\alpha \overset{2}{F}{}_i^\alpha + \overset{2}{q}_i\Big) + 2\Big(\overset{3}{q}_\alpha \overset{1}{F}{}_i^\alpha - \overset{1}{q}_\alpha \overset{3}{F}{}_i^\alpha\Big) = 0,$$
$$n\Big(\overset{\circ}{q}_\alpha \overset{3}{F}{}_i^\alpha + \overset{3}{q}_i\Big) + 2\Big(\overset{1}{q}_\alpha \overset{2}{F}{}_i^\alpha - \overset{2}{q}_\alpha \overset{1}{F}{}_i^\alpha\Big) = 0,$$

решение которой находим в виде

$$\overset{s}{q}_i = -\frac{n}{n-4}\overset{\circ}{q}_\alpha \overset{s}{F}{}_i^\alpha, \quad n > 4, \quad s \in \{1,2,3\}. \tag{7}$$

4. Геометрические объекты, инвариантные относительно 4-квазипланарных отображений почти аптовых Q^*-пространств. При свертывании (4) по индексам h, i ввиду (7) получаем $\overline{\Gamma}{}^\alpha_{\alpha j} - \Gamma^\alpha_{\alpha j} = \frac{n^2-4}{n-4} q_j{}^\circ$, что позволяет представить (4) в форме $\overline{T}{}^h_{ij} = T^h_{ij}$, где

$$T^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \frac{1}{n^2-4}\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Big((n-4)\delta^\beta_{(i}\delta^h_{j)} - n\sum_{s=1}^3 \overset{s}{F}{}^\beta_{(i}\overset{s}{F}{}^h_{j)}\Big). \tag{8}$$

Аналогично выражаются в $\overline{A}_n$ компоненты $\overline{T}_n$. Таким образом, T^h_{ij} — неоднородный геометрический объект, сохраняющийся при 4-квазипланарных отображениях почти аптовых Q^*-пространств и являющийся аналогом проективных параметров Томаса в теории геодезических отображений аффинносвязных пространств. Инвариантность этого объекта при отображении A_n на $\overline{A}_n$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы это отображение было 4-квазипланарным.

Далее, ввиду (4) зависимость между тензорами Римана пространств A_n и $\overline{A}_n$ такова

$$\overline{R}{}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \sum_{s=0}^3\Big(\overset{s}{L}_{i[j}\overset{s}{F}{}^h_{k]} + \overset{s}{L}_{[kj]}\overset{s}{F}{}^h_i\Big) + \sum_{s=1}^3\Big(\overset{s}{q}_i \overset{s}{F}{}^h_{[k,j]} + \overset{s}{F}{}^h_{i,[j}\overset{s}{q}_{k]}\Big), \tag{9}$$

где

$$\overset{\circ}{L}_{ij} = \overset{\circ}{q}_{i,j} - \overset{\circ}{q}_i\overset{\circ}{q}_j + \frac{n-8}{n}\sum_{s=1}^3 \overset{s}{q}_i\overset{s}{q}_j, \quad \overset{1}{L}_{ij} = \overset{1}{q}_{i,j} - \frac{n}{n-4}\overset{1}{q}_{(i}\overset{\circ}{q}_{j)} + \overset{2}{q}_{[i}\overset{3}{q}_{j]},$$
$$\overset{2}{L}_{ij} = \overset{2}{q}_{i,j} - \frac{n}{n-4}\overset{2}{q}_{(i}\overset{\circ}{q}_{j)} + \overset{3}{q}_{[i}\overset{1}{q}_{j]}, \quad \overset{3}{L}_{ij} = \overset{3}{q}_{i,j} - \frac{n}{n-4}\overset{3}{q}_{(i}\overset{\circ}{q}_{j)} + \overset{1}{q}_{[i}\overset{2}{q}_{j]}.$$

Из (9) с учетом (1), (2), (4), (5), (7) будем иметь

$$\overline{\widetilde{R}}{}^h_{ijk} = \widetilde{R}^h_{ijk} + \overset{*}{Q}{}^{\alpha h}_{[jk]}A_{i\alpha}, \tag{10}$$

где

$$\overline{\widetilde{R}}{}^h_{ijk} = Q^{\beta h}_{i\alpha}\overset{*}{Q}{}^{\gamma\delta}_{jk}\overline{R}{}^\alpha_{\beta\gamma\delta},\ \widetilde{R}^h_{ijk} = Q^{\beta h}_{i\alpha}\overset{*}{Q}{}^{\gamma\delta}_{jk}R^\alpha_{\beta\gamma\delta},\ A_{ij} = \overset{*}{Q}{}^{\gamma\beta}_{ij}\sum_{s=0}^3 \overset{s}{L}_{\alpha\beta}\overset{s}{F}{}^\alpha_\gamma,\ Q^{kh}_{ij} = \delta^k_i\delta^h_j - \sum_{s=1}^3 \overset{s}{F}{}^k_i\overset{s}{F}{}^h_j. \tag{11}$$

В результате свертывания (10) по h, k, выясняется, что

$$A_{ij} = \frac{1}{n+2}\Big(\overline{\widetilde{R}}_{ij} - \widetilde{R}_{ij}\Big), \quad \overline{\widetilde{R}}_{ij} = \overline{\widetilde{R}}{}^\alpha_{ij\alpha}, \quad \widetilde{R}_{ij} = \widetilde{R}^\alpha_{ij\alpha}.$$

Наконец, при подстановке выражений для A_{ij} в (10) приходим к выводу, что $\overline{T}^h_{ijk} = T^h_{ijk}$, где

$$T^h_{ijk} = \widetilde{R}^h_{ijk} - \frac{1}{n+2}\overset{*}{Q}{}^{\alpha h}_{[jk]}\widetilde{R}_{i\alpha}. \tag{12}$$

Подобным образом представляются компоненты тензора $\overline{T}^h_{ijk}$ в $\overline{A}_n$. Нетрудно видеть, что T^h_{ijk}-инвариантный относительно 4-квазипланарных отображений почти аптовых Q^*-пространств геометрический объект, являющийся аналогом тензора Вейля в теории геодезических отображений аффинносвязных и римановых пространств.

Итак, нами доказана

Теорема 1. *Геометрические объекты* (8) *и* (12) *инвариантны относительно* 4*-квазипланарных отображений почти аптовых* Q^**-пространств размерности* $n > 4$*, сохраняющих почти кватернионную структуру.*

5. 4-квазипланарные отображения на плоское пространство. Назовем 4-*квазиплоским* почти кватернионное пространство, допускающее 4-квазипланарное отображение на плоское пространство $\overline{A}_n = E_n$.

Если 4-квазиплоское почти аптово Q^*-пространство является римановым с метрическим тензором g_{ij}, а его почти кватернионная структура помимо (1), (2), (5) удовлетворяет условию почти эрмитовости ([1])

$$g_{\alpha\beta}\overset{s}{F}{}^{\alpha}_{i}\overset{s}{F}{}^{\beta}_{j} = g_{ij}, \quad s \in \{1,2,3\}, \tag{13}$$

то несложно получить его необходимый тензорный признак. Действительно, для 4-квазиплоского Q^*-пространства вследствие $\overline{R}^h_{ijk} = 0$ очевидно, что $T^h_{ijk} = 0$ или

$$\widetilde{R}^h_{ijk} - \frac{1}{n+2}\overset{*}{Q}{}^{\alpha h}_{[jk]}\widetilde{R}_{i\alpha} = 0. \tag{14}$$

Свертыванием с g^{ij} отсюда получаем $\widetilde{R}_{ij} = \frac{\widetilde{R}}{n}g_{ij}$, $\widetilde{R} = \widetilde{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\alpha}g^{\beta\gamma}$, вследствие чего (14) принимают вид

$$\widetilde{R}^h_{ijk} = \frac{\widetilde{R}}{n(n+2)}\overset{*}{Q}{}^{\alpha h}_{[jk]}g_{i\alpha}, \tag{15}$$

$\widetilde{R}^h_{ijk}$ даются формулами (11).

Имеет место

Теорема 2. *Тензор Римана* 4*-квазиплоского риманова почти аптова* Q^**-пространства по необходимости удовлетворяет условиям* (15)*.*

В частности, в келеровом кватернионном 4-квазиплоском пространстве соотношения (15) упрощаются

$$R^h_{ijk} = \frac{R}{n(n+2)}\overset{*}{Q}{}^{\alpha h}_{[jk]}g_{i\alpha}.$$

6. Новая форма 4-квазипланарных отображений римановых Q^*-пространств. Рассмотрим почти аптово Q^*-пространство H_n, отнесенное к произвольной системе координат $x^1, x^2, ..., x^n$, с метрическим тензором $g_{ij}(x)$ и почти кватернионной структурой $\left(F^1(x), F^2(x)\right)$. Согласно нашему определению H_n допускает нетривиальное 4-квазипланарное отображение с сохранением структуры на почти кватернионное пространство $\overline{H}_n$ с метрическим тензором $\overline{g}_{ij}(x)$ тогда и только тогда, когда в общей по отображению системе координат имеют место (4), которые можно представить в эквивалентной форме

$$\overline{g}_{ij,k} = 2\overset{\circ}{q}_k \overline{g}_{ij} + \overset{\circ}{q}_{(i}\overline{g}_{j)k} - \frac{n}{n-4}\overset{\circ}{q}_\alpha \sum_{s=1}^{3} \overset{s}{F}{}^{\alpha}_{(i} \overset{s}{\overline{F}}_{j)k}, \tag{16}$$

где $\overset{s}{\overline{F}}_{jk} = \overline{g}_{j\alpha}\overset{s}{F}{}^{\alpha}_{k}$, причем вектор $q^\circ{}_i$ по необходимости градиентен.

В теории геодезических отображений римановых пространств Синюковым Н.С. разработан метод, успешно работающий и при исследовании многочисленных обобщений этой теории ([4]). Следуя указанному методу, представим основные уравнения наших отображений в новой более эффективной для изучения форме, для чего введем в H_n дважды ковариантный неособенный симметричный тензор $a_{ij} = e^{2q}\overline{g}^{\alpha\beta}g_{\alpha i}g_{\beta j}$, $q^\circ{}_i = \frac{\partial q}{\partial x^i}$.

Ввиду (16) имеем

$$a_{ij,k} = \lambda_\alpha \check{Q}^{\alpha\beta}_{(ij)} g_{\beta k}, \tag{17}$$

где

$$\check{Q}^{\alpha\beta}_{ij} = \delta^\alpha_i \delta^\beta_j + \frac{n}{n-4}\sum_{s=1}^{3} \overset{s}{F}{}^{\alpha}_{i} \overset{s}{F}{}^{\beta}_{j}, \quad \lambda_i = -e^{2q}\overset{\circ}{q}_\alpha \overline{g}^{\alpha\beta} g_{\beta i}. \tag{18}$$

Нетрудно показать, что вектор λ_i градиентен. Действительно, свертывание (17) с g^{ij} по i, j показывает, что

$$\left(a_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\right)_{,k} = \frac{4(n-1)}{n-4}\lambda_k.$$

Очевидно также, что вследствие (16)

$$a_{\alpha\beta}\overset{s}{F}{}^{\alpha}_{i} \overset{s}{F}{}^{\beta}_{j} = a_{ij}. \tag{19}$$

Наконец, соотношения (18) говорят о том, что $\lambda_i \neq 0$ при $q^\circ{}_i \neq 0$ и наоборот.

Имеет место

Теорема 3. *Для того, чтобы почти аптово Q^*-пространство H_n $(n > 4)$ допускало нетривиальное $(q^\circ{}_i \neq 0)$ 4-квазипланарное отображение с сохранением почти кватернионной структуры, необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве существовал дважды ковариантный неособенный симметрический тензор, удовлетворяющий условиям* (17), (19) *при некотором векторе* $\lambda_i \neq 0$.

Доказательство проводится по аналогии с ([2]).

Заметим, что если H_n является келеровым кватернионным пространством, то (16) на основании (13) можно представить в виде

$$\overline{g}_{ij,k} = 2\overset{\circ}{q}_k \overline{g}_{ij} - \frac{n-1}{n-4}\overset{\circ}{q}_\alpha \sum_{s=1}^{3} \overset{s}{F}{}^{\alpha}_{(i} \overset{s}{\overline{F}}_{j)k}.$$

В соответствии с этим (17) тоже изменятся $a_{ij,k} = \frac{n-1}{n-4}\lambda_\alpha Q^{*\alpha\beta}_{(ij)} g_{\beta k}$, где λ_i задается формулой (18).

Напомним, что эквидистантным ([4]) называется риманово пространство, в котором существует векторное поле $\varphi_i \neq 0$, удовлетворяющее уравнениям $\varphi_{i,j} = \rho g_{ij}$. Такие векторные поля называются конциркулярными ([4]). При $\rho \neq 0$ пространство считается принадлежащим основному типу, а при $\rho = 0$ — особому.

Если келерово почти кватернионное пространство является эквидистанстным основного типа, то оно допускает нетривиальное 4-квазипланарное отображение. Действительно, в таком пространстве тензор $a_{ij} = c_1 \varphi_\alpha \varphi_\beta \overset{*}{Q}{}^{\alpha\beta}_{ij} + c_2 g_{ij}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 6.1 при произвольных постоянных c_1, c_2, которые могут быть выбраны так, чтобы a_{ij} был невырожденным.

Соотношения (17) представляют собой новую форму основных уравнений теории 4-квазипланарных отображений Q^*-пространств с сохранением почти кватернионной структуры. Их мы и будем исследовать в дальнейшем.

Условия интегрируемости (17) с учетом тождества Риччи имеют вид

$$a_{\alpha(j} R^\alpha_{i)kl} = \lambda_{\alpha,[l} g_{k]\beta} \check{Q}^{\alpha\beta}_{(ij)} + \lambda_\alpha \check{Q}^{\alpha\beta}_{(ij),[l} g_{k]\beta}. \tag{20}$$

Для удобства вычислений введем тензор типа $(2,2)$

$$\hat{Q}^{ij}_{hm} = \frac{n(n-4)}{16(n-1)} \left(\frac{4-3n}{n} \delta^i_h \delta^j_m + \sum_{s=1}^{3} \overset{s}{F}{}^i_h \overset{s}{F}{}^j_m \right), \tag{21}$$

замечательный тем, что $\check{Q}^{ij}_{\alpha\beta} \hat{Q}^{\alpha\beta}_{hm} = \delta^i_h \delta^j_m$.

Тогда из (20) свертыванием с $\hat{Q}^{ij}_{h\alpha} g^{\alpha k}$ получаем

$$n\lambda_{i,l} = \nu g_{il} + \lambda_\alpha A^\alpha_{il} + a_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta}_{il}, \tag{22}$$

где $A^\alpha_{il} = \check{Q}^{\alpha\beta}_{(\sigma\gamma),[l} g_{\delta]\beta} g^{\delta\nu} \hat{Q}^{\sigma\gamma}_{i\nu}$, $B^{\alpha\beta}_{il} = R^\alpha_{\gamma\sigma l} g^{\delta\sigma} \hat{Q}^{\beta\gamma}_{(i\delta)}$, $\nu = \lambda_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}$.

Ковариантное дифференцирование (22) по x^k с последующим альтернированием по k, l дает нам

$$\nu_{[k} g_{l]i} + \lambda_\alpha C^\alpha_{i[lk]} + a_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta}_{i[l,k]} = 0, \tag{23}$$

где $C^\alpha_{ilk} = A^\alpha_{i[l,k]} + \check{Q}^{\alpha\delta}_{\gamma\beta} B^{\gamma\beta}_{i[l} g_{k]\delta} - nR^\alpha_{ilk}$.

Свертывая (23) с g^{il}, обнаруживаем, что

$$(n-1)\nu_k = \lambda_\alpha C^\alpha_{\gamma[\delta k]} g^{\gamma\delta} + a_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta}_{\gamma[\delta,k]} g^{\gamma\delta}. \tag{24}$$

Соотношения (17), (22), (24), которые обозначим (A), представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений первого порядка типа Коши относительно искомых функций a_{ij}, λ_k, ν. В теории дифференциальных уравнений для таких систем разработаны регулярные методы. Заметим, что получить такую систему из системы дифференциальных уравнений (17), фигурирующей в теореме 6.1, не всегда удается.

По существу нами доказана

Теорема 4. *Для того, чтобы Q^*-пространство H_n $(n > 4)$ допускало нетривиальное 4-квазипланарное отображение с сохранением почти кватернионной структуры, необходимо и достаточно, чтобы система дифференциальных уравнений (A) имела нетривиальное решение*

$$a_{ij}(x) \Big(= a_{ji}(x), \quad \det \|a_{ij}\| \neq 0 \Big), \quad \lambda_i(x) (\neq 0), \quad \nu(x),$$

удовлетворяющее условиям (19).

Из теории дифференциальных уравнений известно, что система (A) имеет не более одного решения для каждого набора начальных значений Коши

$$a_{ij}(x_\circ)=a^\circ{}_{ij}, \quad \lambda_i(x_\circ)=\lambda^\circ{}_i, \quad \nu(x_\circ)=\nu^\circ,$$

поэтому, как легко видеть, число произвольных постоянных в общем решении уравнений (A) при условии (19) ограничено. Однако система (A) не всегда совместна. Вопрос о существовании у нее нетривиальных решений сводится к исследованию ее условий интегрируемости и их дифференциальных продолжений, которые будут уже алгебраической системой уравнений относительно неизвестных функций с коэффициентами из H_n.

Условия интегрируемости первой группы уравнений системы (A), т.е. соотношений (17), получаются из (20) после замены производных от вектора λ_i выражениями (22)

$$a_{\alpha\beta}\overset{1}{T}{}^{\alpha\beta}_{ijkl}+\lambda_\alpha \overset{1}{P}{}^{\alpha}_{ijkl}=0, \tag{25}$$

где $\overset{1}{T}{}^{\alpha\beta}_{ijkl}=n\delta^\alpha_{(i}R^\beta_{j)lk}+B^{\alpha\beta}_{\gamma[l}g_{k]\delta}\check{Q}^{\gamma\delta}_{(ij)}$, $\overset{1}{P}{}^{\alpha}_{ijkl}=n\check{Q}^{\alpha\beta}_{(ij),[l}g_{k]\beta}+A^\alpha_{\gamma[l}g_{k]\beta}\check{Q}^{\gamma\beta}_{(ij)}$.

Для второй группы уравнений (A) находим условия интегрируемости заменой в (23) ν_k согласно (24)

$$a_{\alpha\beta}\overset{2}{T}{}^{\alpha\beta}_{ikl}+\lambda_\alpha \overset{2}{P}{}^{\alpha}_{ikl}=0, \tag{26}$$

где

$$\overset{2}{T}{}^{\alpha\beta}_{ikl}=(n-1)B^{\alpha\beta}_{i[l,k]}+\big(B^{\alpha\beta}_{\gamma[\delta,k]}g_{li}-B^{\beta}_{\gamma[\delta,l]}g_{ki}\big)g^{\gamma\delta}, \quad \overset{2}{P}{}^{\alpha}_{ikl}=(n-1)C^\alpha_{i[lk]}+\big(C^\alpha_{\gamma[\delta k]}g_{li}-C^\alpha_{\gamma[\delta l]}g_{ki}\big)g^{\gamma\delta}.$$

Наконец, условия интегрируемости уравнений (24) имеют вид

$$a_{\alpha\beta}\overset{3}{T}{}^{\alpha\beta}_{[kl]}+\lambda_\alpha \overset{3}{P}{}^{\alpha}_{[kl]}+\nu S_{[kl]}=0, \tag{27}$$

где $\overset{3}{T}{}^{\alpha\beta}_{kl}=\big(B^{\alpha\beta}_{\sigma l}C^\sigma_{\gamma[\delta k]}+nB^{\alpha\beta}_{\gamma[\delta,k]l}\big)g^{\gamma\delta}$, $\overset{3}{P}{}^{\alpha}_{kl}=\big(A^\alpha_{\beta l}C^\beta_{\gamma[\delta k]}+n\big(C^\alpha_{\gamma[\delta k],l}+Q^{\alpha\xi}_{(\sigma\beta)}g_{\xi l}B^{\sigma\beta}_{\gamma[\delta,k]}\big)\big)g^{\gamma\delta}$,
$S_{kl}=C^\alpha_{\gamma[\delta k]}g_{\alpha l}g^{\gamma\delta}$.

Условия интегрируемости системы (A), представленные нами в форме (25)–(27), обозначим (B). Как видим, (B) и их дифференциальные продолжения (обозначим их (B_1), (B_2),(B_3),...) являются системой линейных однородных алгебраических уравнений относительно a_{ij}, λ_i, ν с коэффициентами из H_n. Ввиду того, что число неизвестных функций ограничено, найдется такое натуральное число s, что B_s и последующие продолжения будут уже следствиями (B), (B_1), (B_2),...,(B_{s-1}).

Справедлива

Теорема 5. *Q^*-пространство H_n $(n>4)$ допускает нетривиальное 4-квазипланарное отображение с сохранением почти кватернионной структуры на Q^*-пространство $\overline{H}_n$ тогда и только тогда, когда система уравнений (B), (B_1), (B_2),...,(B_{s-1}) имеет в H_n решение $a_{ij}(x)(=a_{ji}(x),\ \det\|a_{ij}\|\neq 0)$, $\lambda_i(x)(\neq 0)$, $\nu(x)$.*

Теорема 5 показывает, что задача отыскания почти кватернионных многообразий рассматриваемого типа, допускающих 4-квазипланарные отображения, по существу сводится к решению системы линейных однородных уравнений с большим числом неизвестных.

Рассмотрим ситуацию, когда система (A) вполне интегрируема. Тогда для нее существует решение при любых начальных значениях $a_{ij}(x_\circ) = a^\circ{}_{ij},\ \lambda_i(x_\circ) = \lambda^\circ{}_i,\ \nu(x_\circ) = \nu^\circ$. В случае полной интегрируемости системы (A) ее условия интегрируемости (B) выполняются тождественно относительно a_{ij}, λ_i, μ.

Пусть H_n — келерово кватернионное пространство, тогда соотношения (25) принимают вид $a_{\alpha\beta}\overset{1}{T}{}^{\alpha\beta}_{ijkl} = 0$. Поскольку эти уравнения должны выполняться тождественно относительно a_{ij}, то в силу симметрии a_{ij} имеем

$$\overset{1}{T}{}^{\alpha\beta}_{ijkl} + \overset{1}{T}{}^{\beta\alpha}_{ijkl} = 0. \tag{28}$$

Ввиду келеровости почти кватернионной структуры H_n его тензор Римана удовлетворяет условиям $R^h_{i\alpha\beta}\overset{s}{F}{}^\alpha_j\overset{s}{F}{}^\beta_k = R^h_{ijk}$, $R^\alpha_{\beta jk}\overset{s}{F}{}^h_\alpha\overset{s}{F}{}^\beta_i = -R^h_{ijk}$. С учетом этих свойств после довольно громоздких алгебраических преобразований из (28) удается выразить компоненты тензора Римана в виде

$$R^h_{ijk} = \frac{R}{n(n+2)}\overset{*}{Q}{}^{\alpha h}_{[jk]}g_{i\alpha}, \tag{29}$$

то есть наше пространство оказалось 4-квазиплоским.

Можно проверить (это потребует немало времени), что в келеровом кватернионном пространстве, тензор Римана которого удовлетворяет соотношениям (29), уравнения (25)–(27) выполняются тождественно. Таким образом, справедлива

Теорема 6. *Келерово кватернионное пространство H_n $(n > 4)$ является максимально подвижным относительно 4-квазипланарных отображений тогда и только тогда, когда оно 4-квазиплоское.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Beklemishev D.V. *Differential geometry of spaces with almost complex structure*// Akad. Nauk SSSR. Inst. Naun. Informacii, Geometry. – 1965. – P. 165–212. (in Russian)
2. Mikes J., Vanzurova A., Hinterleitner I., Geodesic Mappings and Some Generalizations, Palacky University, Olomouc, Faculty of Science, Olomouc, 2009.
3. Otsuki T., Tashiro Y. *On curves in Kaehlerian spaces*// J. Okayama Univ. – 1954. – V.4. – P. 57–78.
4. Sinyukov N.S. Geodesic mappings of Riemannian spaces. – Moscow, Nauka, 1979. – 256 p. (in Russian)
5. Shirokov A.P. *Spaces over algebras and their applications*// Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Mat. Prilozh., Temat. Obz. – 2002. – V.73. – P. 135–161. (in Russian)
6. Vishnevskij V.V. *Integrable affinor structures and their plural interpretations*// Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Mat. Prilozh., Temat. Obz. – 2002. – V.73. – P. 5–64. (in Russian)
7. Mikes J., Sinyukov N.S. *On quasiplanar mappings of spaces of affine connections*// Izv. Vysch. Uchebn. Zaved. Mat. – 1983. – V.248, №1. – P. 55–61. (in Russian)
8. Kurbatova I.N. *About 4-quasiplanar mappings of almost quaternion manifolds. On quasiplanar mappings of spaces of affine connections*// Izv. Vysch. Uchebn. Zaved. Mat. – 1986. – №1. – P. 75–78. (in Russian)

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, ИМЭМ
irina.kurbatova27@gmail.com

Поступило 28.06.2013