УДК 517.956.227+517.956.8

Ю. Д. Головатий, В. М. Гут

АСИМПТОТИКА СПЕКТРУ НЕОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ З ЛЕГКИМИ ЖОРСТКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Yu. D. Golovaty, V. M. Hut. *Asymptotics of the spectrum of inhomogeneous plate with light-weight stiff inclusions*, Mat. Stud. **40** (2013), 79–94.

The Dirichlet spectral problem for an elliptic operator of the fourth order with singularly perturbed coefficients is considered. The problem describes the eigenmodes of a plate with finite number of the stiff and light-weight inclusions of an arbitrary shape. The asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions is studied. The number-by-number convergence of the eigenvalues and the corresponding eigenspaces is established. The limit eigenvalue problem involves a non-local boundary conditions. Justification of the asymptotic formulas is based on the norm resolvent convergence of a family of unbounded self-adjoint operators.

Ю. Д. Головатий, В. М. Гут. *Асимптотика спектра неоднородной пластины с легким жесткими включениями* // Мат. Студії. – 2013. – Т.40, №1. – С.79–94.

Рассмотрена спектральная задача Дирихле для эллиптического оператора четвертого порядка с сингулярно возмущенными коэффициентами. Задача моделирует собственные колебания упругой пластины с конечным числом жестких и одновременно легких включений произвольной формы. Изучено асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций задачи. Найдены главные члены асимптотики собственных элементов с учетом их кратности. Предельная спектральная задача содержит нелокальные краевые условия, а обоснование асимптотических формул базируется на равномерной резольвентной сходимости некоторого семейства неограниченных самосопряженных операторов.

1. Вступ. У цій статті ми досліджуємо сингулярно збурену крайову задачу для диференціального оператора четвертого порядку, а саме, асимптотичну поведінку спектра та власних підпросторів. Така задача моделює власні коливання жорстко закріпленої пластини, яка містить надміцні легкі включення.

Процеси різноманітної природи, що протікають в сильно неоднорідних середовищах, зазвичай моделюють крайовими задачами для диференціальних операторів з сингулярною залежністю від малого параметра як в коефіцієнтах операторів, так і в геометрії областей. Задачі такого типу виникають в багатьох розділах природознавства, тому їх активно досліджують в останні тридцять років ([1–4]).

Моделі зі скінченною кількістю жорстких включень вивчали в [5–7]. Значну кількість робіт присвячено коливним системам з концентрованими масами ([8–12], див. також огляд результатів в [13]). Механічні систем з масами, які концентруються в околі одновимірних многовидів, досліджувались в [14]. В [15–17] досліджені моделі середовищ

2010 *Mathematics Subject Classification:* 47A25, 47A55, 58J37, 65L15.
Keywords: spectral Dirichlet problem; biharmonic operator; eigenvalue; eigenfunction; singular perturbation; asymptotics of spectrum; stiff light inclusions.

складної геометрії з одночасним збурення як густини маси, так і коефіцієнтів жорсткості.

Спектральні властивості мембран зі скінченним числом включень, які відносно основного матеріалу відрізнялись як жорсткістю, так і густиною, розглянуто в [18–20]. Одновимірну модель розглянуто в [18], в [19] — модель пружної коливної системи зі скінченним числом жорстких і одночасно легких включень, а в [20] — випадок важких і м'яких включень. В усіх цих працях досліджувались збіжність спектрів та власних підпросторів, побудовані асимптотики власних значень.

У цитованих вище роботах вивчали сингулярно збурені задачі для диференціальних операторів другого порядку. Метою цієї праці є отримання аналогічних результатів для еліптичних операторів четвертого порядку. Ми досліджуємо асимптотичну поведінку власних значень та власних функцій пластини, в якої при $\varepsilon \to 0$ відношення коефіцієнтів жорсткості включень та "матриці" є порядку ε^{-1}, а відношення густин маси — порядку ε^m, де $m > 0$. Крайові та спектральні задачі для операторів четвертого порядку з іншим характером збурення коефіцієнтів вивчали в [21–26], див. також монографію [27].

Структура статті є такою. В розділі 2 сформульовано сингулярно збурену задачу та описано найпростіші властивості її спектру. В наступному розділі побудовано граничний оператор та встановлені його властивості. В розділі 4 побудовано операторну в'язку $T_\varepsilon(\mu)$, яка відповідає збуреній задачі. Оператори цієї в'язки діють в тому ж просторі, що й граничний оператор. В п'ятому розділі доведено рівномірну резольвентну збіжність операторів $T_\varepsilon(\mu)$ до граничного оператора. Цей результат є основним при доведені теорем збіжності спектра та власних підпросторів в останньому шостому розділі.

2. Формулювання задачі та допоміжні твердження. Нехай U — обмежена область в $\mathbb{R}^2$ з гладкою межею $\Gamma = \partial U$. Припустимо, що U є об'єднанням двох множин Ω та ω, причому ω — строго внутрішня відкрита підмножина, яка має скінченну кількість компонент зв'язності, а область Ω — зв'язна (Рис. 1). Межу ω позначимо через γ і вважатимемо її гладкою.

В області U розглянемо еліптичний диференціальний оператор четвертого порядку

$$L = 2(1-\sigma(x))\partial_{x_1x_2}\big(\varkappa(x)\partial_{x_1x_2}\big)+$$
$$+\partial_{x_1x_1}\big(\varkappa(x)(\partial_{x_1x_1}+\sigma(x)\partial_{x_2x_2})\big)+\partial_{x_2x_2}\big(\varkappa(x)(\partial_{x_2x_2}+\sigma(x)\partial_{x_1x_1})\big).$$

Тут $\varkappa$ — додатна гладка функція в замиканні кожної з підобластей Ω і ω. На кривій γ

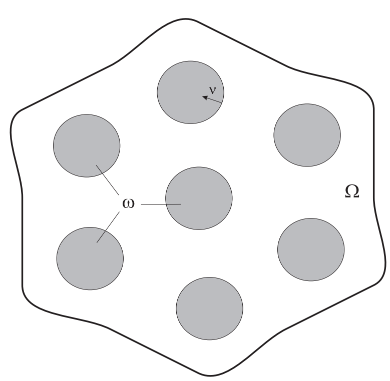

Рис. 1: Приклад області Ω.

функція $\varkappa$ може мати розрив першого роду. Функція $\sigma = \sigma(x) = \begin{cases} \sigma_\Omega, & x \in \Omega, \\ \sigma_\omega, & x \in \omega, \end{cases}$ є кусково сталою, причому сталі σ_Ω, σ_ω набувають значень з інтервалу $(0,1)$.

Введемо в околі меж Γ та γ диференціальні оператори

$$\begin{gathered} M = -\sigma\varkappa\Delta + (\sigma-1)\varkappa(\nu_1^2\partial_{x_1x_1} + 2\nu_1\nu_2\partial_{x_1x_2} + \nu_2^2\partial_{x_2x_2}), \\ K = \nu_1\,\partial_{x_1}(\varkappa(\partial_{x_1x_1} + \sigma\partial_{x_2x_2})) + \nu_2\,\partial_{x_2}(\varkappa(\partial_{x_2x_2} + \sigma\partial_{x_1x_1}))+ \\ +(1-\sigma)\nu_2\,\partial_{x_1}\big(\varkappa(\nu_1\nu_2\,(\partial_{x_1x_1} - \partial_{x_2x_2}) + 2\nu_2^2\partial_{x_1x_2})\big)+ \\ +(1-\sigma)\nu_1\,\partial_{x_2}\big(\varkappa(\nu_1\nu_2\,(\partial_{x_2x_2} - \partial_{x_1x_1}) + 2\nu_1^2\partial_{x_1x_2})\big), \end{gathered} \tag{1}$$

де $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — гладке векторне поле, яке на кривих Γ і γ збігається з полем зовнішніх нормалей до Ω.

Нехай m — дійсне додатне число, а функції r та ρ є неперервними, обмеженими і додатними в областях Ω та ω відповідно. Вивчатимемо асимптотичну поведінку при $\varepsilon \to 0$ власних значень λ^ε та власних функції u^ε крайової задачі

$$\varepsilon L u^\varepsilon = \lambda^\varepsilon r u^\varepsilon \quad \text{в } \Omega, \quad L u^\varepsilon = \lambda^\varepsilon \varepsilon^m \rho u^\varepsilon \quad \text{в } \omega, \tag{2}$$

$$u_\varepsilon = 0, \quad \partial_\nu u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{3}$$

$$[u^\varepsilon]_\gamma = 0, \quad [\partial_\nu u^\varepsilon]_\gamma = 0, \quad \varepsilon M u^\varepsilon|_{\gamma+} = M u^\varepsilon|_{\gamma-}, \quad \varepsilon K u^\varepsilon|_{\gamma+} = K u^\varepsilon|_{\gamma-}, \tag{4}$$

де $[f]_\gamma$ — стрибок функції f при переході через криву γ, а $f|_{\gamma-}$ та $f|_{\gamma+}$ — границі f в точках γ при підході до цієї кривої збоку областей ω та Ω відповідно.

Задача (2)–(4) описує власні коливання жорстко закріпленої неоднорідної пластини, яка виготовлена з двох різних матеріалів з коефіцієнтами Пуассона σ_Ω та σ_ω. Відношення коефіцієнтів Юнга цих матеріалів є малою величиною порядку ε, а відношення густин — великим порядку ε^{-m}. Така модель відповідає пластині, в якій м'який і важкий матеріал містить жорсткі і одночасно легкі включення.

Надалі через $W_2^s(G)$ позначатимемо простори Соболєва, а через $\mathring{W}_2^2(G)$ — підклас функцій з $W_2^2(G)$, які разом з першими частинними похідними мають нульові сліди на межі області G.

Нехай $L_2(r_\varepsilon, U)$ — гільбертів простір з ермітовим скалярним добутком $(u,v)_\varepsilon = \int_U r_\varepsilon u\bar{v}\,dx$ та нормою $\|u\|_\varepsilon = (u,u)_\varepsilon^{1/2}$, де $r_\varepsilon(x) = \varepsilon^m\rho(x)$ для $x \in \omega$ та $r_\varepsilon(x) = r(x)$ для $x \in \Omega$. Тоді задачі у просторі $L_2(r_\varepsilon, U)$ відповідає самоспряжений оператор A_ε з дією $A_\varepsilon f = \varepsilon^{-m}\rho^{-1}Lf$ в підобласті ω, $A_\varepsilon f = \varepsilon r^{-1}Lf$ в Ω та з областю визначення

$$\operatorname{dom} A_\varepsilon = \big\{ f \in W_2^4(U\setminus\gamma)\colon f = \partial_\nu f = 0 \text{ на } \Gamma, \\ \big[u\big]_\gamma = \big[\partial_\nu u\big]_\gamma = 0,\ \ \varepsilon M f\big|_{\gamma+} = M f\big|_{\gamma-},\ \ \varepsilon K f\big|_{\gamma+} = K f\big|_{\gamma-} \big\}.$$

Легко переконатися, що оператор A_ε є додатним і має компактну резольвенту. Тому, при кожному $\varepsilon \in (0,1)$ задача (2)–(4) є стандартною спектральною задачею з дискретним додатним спектром ([32, Т. XIII.64]). Перенумеруємо його власні значення з врахуванням кратності $0 < \lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n^\varepsilon \leqslant \cdots \to \infty$, $n \to \infty$. Власні функції $\{u_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ виберемо так, щоб вони утворювали ортонормовану базу в $L_2(r_\varepsilon, U)$.

Введемо півторалінійні форми

$$\alpha_\Omega(u,v) = \int_\Omega \varkappa E(u,v)\,dx, \quad \alpha_\omega(u,v) = \int_\omega \varkappa E(u,v)\,dx, \tag{5}$$

де $E(u,v) = 2(1-\sigma)u_{x_1x_2}\overline{v}_{x_1x_2} + \big(u_{x_1x_1} + \sigma u_{x_2x_2}\big)\overline{v}_{x_1x_1} + \big(u_{x_2x_2} + \sigma u_{x_1x_1}\big)\overline{v}_{x_2x_2}$, і нехай також $\alpha_\varepsilon = \alpha_\omega + \varepsilon\alpha_\Omega$.

Задача (2)–(4) має варіаційне формулювання: *знайти число λ^ε та ненульову функцію $u^\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(U)$, для яких виконується тотожність $\alpha_\varepsilon(u^\varepsilon, v) = \lambda^\varepsilon\,(u^\varepsilon, v)_\varepsilon$ для всіх $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(U)$.*

Встановимо деякі властивості власних значень збуреної задачі.

Лема 1. *Власні значення λ_n^ε є неперервними функціями змінної $\varepsilon \in (0,1)$. Для кожного власного значення виконується оцінка $c_n\varepsilon \leqslant \lambda_n^\varepsilon \leqslant C_n\varepsilon$, де сталі c_n і C_n не залежать від ε, причому $c_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$.*

Доведення. За варіаційним принципом Куранта маємо $\lambda_n^\varepsilon = \inf\limits_{E_n} \sup\limits_{u\in E_n\setminus\{0\}} \dfrac{\alpha_\varepsilon(u,u)}{(u,u)_\varepsilon}$, де інфімум беруть за всіма n-вимірними підпросторами E_n в $\overset{\circ}{W}{}_2^2(U)$. На кожному відрізку $[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \subset (0,1)$ квадратичні форми $\alpha_\varepsilon(u,u)$ і $(u,u)_\varepsilon$ є рівномірно неперервні стосовно ε на кожній обмеженій множині з $\overset{\circ}{W}{}_2^2(U)$. Звідси отримуємо неперервність власних значень на інтервалі $(0,1)$. Далі для всіх натуральних n маємо

$$\lambda_n^\varepsilon = \inf_{E_n} \sup_{u\in E_n\setminus\{0\}} \frac{\alpha_\varepsilon(u,u)}{(u,u)_\varepsilon} \geqslant \inf_{E_n} \sup_{u\in E_n\setminus\{0\}} \frac{\varepsilon(\alpha_\omega(u,u) + \alpha_\Omega(u,u))}{(u,u)_1} = \varepsilon\lambda_n > 0,$$

де $(u,u)_1$ — скалярний добуток $(u,u)_\varepsilon$ при $\varepsilon = 1$, а λ_n — n-те власне значення задачі (2)–(4) у випадку $\varepsilon = 1$. Нехай тепер $v_1, \dots, v_n$ — власні функції задачі

$$Lv = \mu r v \ \text{ в } \Omega, \quad v = 0, \quad \partial_\nu v = 0 \ \text{ на } \partial\Omega, \tag{6}$$

що відповідають першим n власним значенням. Через P_n позначимо підпростір в $\overset{\circ}{W}{}_2^2(U)$, який породжують ці власні функції, якщо їх продовжити нулем на всю область U. Тоді

$$\lambda_n^\varepsilon \leqslant \sup_{u\in P_n\setminus\{0\}} \frac{\alpha_\varepsilon(u,u)}{(u,u)_\varepsilon} = \sup_{u\in P_n\setminus\{0\}} \frac{\varepsilon\alpha_\Omega(u,u)}{(u,u)_{L_2(r,\Omega)}} = \varepsilon\mu_n,$$

де μ_n — n-те власне значення задачі (6). □

3. Граничний оператор. Побудуємо асимптотику власних значень та власних функцій задачі (2)–(4). З огляду на лему 1, вважатимемо, що при $\varepsilon \to 0$

$$\lambda^\varepsilon \sim \varepsilon(\mu + o(1)), \quad u^\varepsilon(x) \sim \begin{cases} u(x) + \varepsilon u_1(x) + o(\varepsilon), & x \in \Omega, \\ w(x) + \varepsilon w_1(x) + o(\varepsilon), & x \in \omega. \end{cases}$$

Підставивши ці наближення у (2)–(4), отримаємо, що функція w є розв'язком однорідної задачі

$$Lw = 0 \quad \text{в } \omega, \quad Mw|_{\gamma_-} = 0, \quad Kw|_{\gamma_-} = 0, \tag{7}$$

а функція w_1 є розв'язком неоднорідної задачі

$$Lw_1 = 0 \quad \text{в } \omega, \quad Mw_1|_{\gamma_-} = Mu|_{\gamma_+}, \quad Kw_1|_{\gamma_-} = Ku|_{\gamma_+} \tag{8}$$

з похідними функції u у крайових умовах. Функція ж u в свою чергу мусить задовольняти такі співвідношення

$$Lu = \mu r u \ \text{ в } \Omega, \quad u = \partial_\nu u = 0 \text{ на } \Gamma, \quad u = w, \quad \partial_\nu u = \partial_\nu w \ \text{ на } \gamma. \tag{9}$$

Задачі (7) відповідає самоспряжений оператор B в просторі $L_2(\rho,\omega)$

$$Bf = \rho^{-1}Lf, \quad \operatorname{dom} B = \bigl\{f \in W_2^4(\omega)\colon Mf|_{\gamma_-} = 0,\ Kf|_{\gamma_-} = 0\bigr\}.$$

Відомо ([30, с. 82]), що ядро оператора B нетривіальне і містить всі лінійні функції, т. з. жорсткі переміщення. Якщо множина ω має s компонент зв'язності, то $\dim\ker B = 3s$. Тому розв'язок w_1 задачі (8) існуватиме лише при виконанні деяких $3s$ умов ортогональності на вхідні дані.

Нехай $\mathbb{S}(\omega)$ — простір лінійних функцій $\ell = a_1x_1 + a_2x_2 + a_0$ на множині ω. Введемо позначення $M_\pm f = Mf|_{\gamma_\pm}$, $K_\pm f = Kf|_{\gamma_\pm}$ та $\omega = \bigcup_{k=1}^s \omega_k$, $\gamma = \bigcup_{k=1}^s \gamma_k$, де γ_k — межа компоненти зв'язності ω_k. Тоді ці умови матимуть вигляд

$$\int_{\gamma_k} (M_+u\,\partial_\nu\ell + K_+u\,\ell)\,dl = 0 \quad \text{для всіх } \ell \in \mathbb{S}(\omega_k) \text{ та } k \in \{1,\dots,s\}. \tag{10}$$

Необхідність умов (10) випливає з формули Гріна

$$(L\varphi,\psi)_{L_2(\omega)} = \alpha_\omega(\varphi,\,\psi) - \sum_{k=1}^s \int_{\gamma_k} (M_-\varphi\,\overline{\partial_\nu\psi} + K_-\varphi\,\overline{\psi})\,dl, \tag{11}$$

коли візьмемо $\varphi = w_1$ та $\psi = \ell$, де $\ell \in \mathbb{S}(\omega)$. Справді, з (8) та (5) маємо, що $Lw_1 = 0$, а також $\alpha_\omega(w_1,\,\ell) = 0$ для всіх $\ell \in \mathbb{S}(\omega)$, причому лінійні функції можна вибирати незалежно на кожній з компонент зв'язності ω_k. Достатність умов випливає з альтернативи Фредгольма.

Позаяк $u = w$ та $\partial_\nu u = \partial_\nu w$ на γ, а w є елементом ядра оператора B, то функція u та її нормальна похідна $\partial_\nu u$ на кривих γ_k збігаються з ℓ_k та $\partial_\nu\ell_k$ відповідно для деякої лінійної функції ℓ_k на ω_k.

Тепер ми можемо сформулювати спектральну задачу

$$\begin{cases} Lu = \mu r u \quad \text{в } \Omega, \\ u = \partial_\nu u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \\ u = \ell_k, \quad \partial_\nu u = \partial_\nu \ell_k \ \text{ на } \gamma_k \qquad \text{для деякої лінійної функції } \ell_k \in \mathbb{S}(\Omega), \\ \displaystyle\int_{\gamma_k} (M_+u\,\partial_\nu\ell + K_+u\,\ell)\,dl = 0 \quad \text{для всіх } \ell \in \mathbb{S}(\Omega) \text{ та } k \in \{1,\dots,s\}. \end{cases} \tag{12}$$

Зауважимо, що функції $\ell_1,\dots,\ell_s$ у формулюванні задачі є невідомими. Цю задачу надалі називатимемо *граничною*.

Формальні міркування, наведені вище, дозволяють сформулювати таку *гіпотезу*. Нехай λ_n^ε — власне значення задачі (2)–(4) з власною функцією u_n^ε. Тоді відношення $\varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$ прямує до деякого власного значення μ задачі (12), а u_n^ε збігається до відповідної власної функції u в області Ω та до лінійних функцій ℓ_k на кожній з компонент зв'язності ω_k області ω.

Введемо відображення $D_k, N_k\colon W_2^4(\Omega) \to L_2(\gamma_k)\times L_2(\gamma_k)$, які функціям на Ω ставлять у відповідність т. з. дані Діріхле та Неймана на кривих γ_k

$$D_k v = (v|_{\gamma_k},\,\partial_\nu v|_{\gamma_k}), \quad N_k v = (K_+v|_{\gamma_k}, M_+v|_{\gamma_k}), \quad k \in \{1,\dots,s\}.$$

Нехай підпростори $\mathcal{V}_k$ в $L_2(\gamma_k)\times L_2(\gamma_k)$ є образами множини лінійних функцій $\mathbb{S}(\Omega)$ під дією відображення D_k. Граничну задачу (12) тепер можна переписати так

$$\begin{cases} Lu = \mu r u \quad \text{в } \Omega, \quad u = \partial_\nu u = 0 \quad \text{на } \Gamma; \\ D_k u \in \mathcal{V}_k, \quad N_k u \in \mathcal{V}_k^\perp, \quad k \in \{1,\dots,s\}, \end{cases}$$

де $\mathcal{V}_k^\perp$ — ортогональне доповнення до $\mathcal{V}_k$ в прямому добутку $L_2(\gamma_k)\times L_2(\gamma_k)$. В просторі $L_2(r,\Omega)$ введемо оператор $Tf = r^{-1}Lf$,

$$\operatorname{dom}T = \big\{f \in W_2^4(\Omega)\colon f = \partial_\nu f = 0 \text{ на } \Gamma, D_k f \in \mathcal{V}_k, N_k f \in \mathcal{V}_k^\perp, k \in \{1,\dots,s\}\big\},$$

що відповідає граничній задачі.

Лема 2. *Оператор T самоспряжений і додатний, а його спектр — дискретний.*

Доведення. Нехай f — функція з області визначення T і $\ell_k = f|_{\gamma_k}$. Тоді виконується рівність

$$(Lf,g)_{L_2(r,\Omega)} = (f,Lg)_{L_2(r,\Omega)} + \int_\Gamma (M_+f\,\overline{\partial_\nu g} + K_+f\,\overline{g})\,dl - \\ - \sum_{k=1}^s \int_{\gamma_k} (\partial_\nu \ell_k\,\overline{M_+g} + \ell_k\,\overline{K_+g})\,dl + \sum_{k=1}^s \int_{\gamma_k} (M_+f\,\overline{\partial_\nu g} + K_+f\,\overline{g})\,dl \tag{13}$$

для всіх $g \in W_2^4(\Omega)$. Опишемо область визначення спряженого оператора T^*, вказавши максимальний клас функцій g, для яких криволінійні інтеграли в (13) дорівнюють нулю для всіх $f \in \operatorname{dom}T$. Інтеграл на межі Γ буде нульовим тоді і лише тоді, коли $g=0$ та $\partial_\nu g = 0$ на Γ. Далі, нехай f збігається з ℓ_k не лише на межі γ_k, але й в деякому її околі. Тоді $M_+f = 0$ та $K_+f=0$ на γ_k, що випливає з вигляду цих операторів (див. (1)). Для таких функцій f остання сума в правій частині (13) буде нульовою, а враховуючи, що лінійні функції $\ell_1,\dots,\ell_s$ можна вибирати незалежно, матимемо

$$\int_{\gamma_k} (\partial_\nu \ell\,\overline{M_+g} + \ell\,\overline{K_+g})\,dl = 0 \quad \text{для всіх } \ell \in \mathbb{S}(\Omega).$$

Отже, вектори $N_k g$ є ортогональними до підпросторів $\mathcal{V}_k$ для всіх $k \in \{1,\dots,s\}$.

Залишилося довести, що для кожної функції $g \in \operatorname{dom}T^*$ вектори $D_k g$ належать підпросторам $\mathcal{V}_k$ для $k \in \{1,\dots,s\}$. Виберемо k. Тоді для кожної пари гладких функцій φ_k та ψ_k, заданих на межі γ_k, існує гладка функція f в області Ω, яка відмінна від нуля лише в околі кривої γ_k, а на самій кривій виконуються рівності

$$f = 0, \quad \partial_\nu f = 0, \quad M_+f = \varphi_k, \quad K_+f = \psi_k.$$

Функція f належатиме області визначення T, коли вектор $N_k f = (\psi_k,\varphi_k)$ ортогональний до $\mathcal{V}_k$. Тепер з (13) матимемо

$$\int_{\gamma_k} (\varphi_k\,\overline{\partial_\nu g} + \psi_k\,\overline{g})\,dl = 0$$

для всіх гладких векторів (φ_k,ψ_k) з $\mathcal{V}_k^\perp$. Оскільки такі вектори щільні в цьому підпросторі, то вектор $(g,\partial_\nu g)$ належить до $\mathcal{V}_k$, тобто існує така лінійна функція ℓ_k в Ω, що $g = \ell_k$ та $\partial_\nu g = \partial_\nu \ell_k$ на γ_k. Отже, ми довели, що області визначення операторів T та T^* збігаються, тобто T — самоспряжений.

Додатність оператора T випливає з рівності $(Tu,u)_{L_2(r,\Omega)} = \alpha_\Omega(u,u)$. Компактність його резольвенти є наслідком компактності вкладення просторів $W_2^4(\Omega)$ та $L_2(\Omega)$, тому спектр цього оператора є дискретним. □

4. Збурена задача як операторна в'язка $T_\varepsilon(\mu)$. Переконаємося, що побудований вище оператор T справді має стосунок до асимптотичної поведінки власних значень та власних функцій задачі (2)–(4). Для цього реалізуємо останню як сім'ю операторів $T_\varepsilon(\mu)$ в цьому ж просторі $L_2(r,\Omega)$, в якому діє оператор T, і доведемо близькість $T_\varepsilon(\mu)$ і T при $\varepsilon \to 0$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.

Зробимо в задачі (2)–(4) заміну спектрального параметра $\lambda^\varepsilon = \varepsilon\mu^\varepsilon$

$$Lu^\varepsilon = \mu^\varepsilon r u^\varepsilon \quad \text{в } \Omega, \quad Lu^\varepsilon = \varepsilon^{m+1}\mu^\varepsilon \rho u^\varepsilon \quad \text{в } \omega, \tag{14}$$

$$u_\varepsilon = 0, \quad \partial_\nu u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{15}$$

$$[u^\varepsilon]_\gamma = 0, \quad [\partial_\nu u^\varepsilon]_\gamma = 0, \quad \varepsilon M_+ u^\varepsilon = M_- u^\varepsilon, \quad \varepsilon K_+ u^\varepsilon = K_- u^\varepsilon. \tag{16}$$

Розглянемо також крайову задачу

$$Lv = \theta\rho v \quad \text{в } \omega, \quad v = \varphi, \quad \partial_\nu v = \psi \quad \text{на } \gamma, \tag{17}$$

де $\varphi \in W_2^{7/2}(\gamma)$ та $\psi \in W_2^{5/2}(\gamma)$. Якщо θ не є власним значенням задачі (17) при $\varphi = 0$ і $\psi = 0$, то існує єдиний її розв'язок $v \in W_2^4(\omega)$ і можна обчислити граничні значення $M_- v$ та $K_- v$ на γ. Нехай

$$\Lambda(\theta)\colon W_2^{7/2}(\gamma) \times W_2^{5/2}(\gamma) \to W_2^{1/2}(\gamma) \times W_2^{3/2}(\gamma)$$

— відображення, яке вектору (φ, ψ) ставить у відповідність пару $(K_- v, M_- v)$. Це відображення коректно визначене для всіх θ, що не належать до спектра задачі Діріхле

$$Lv = \lambda\rho v \quad \text{в } \omega, \quad v = 0, \quad \partial_\nu v = 0 \quad \text{на } \gamma. \tag{18}$$

Введемо також позначення для граничних даних Діріхле $Dg = (g, \partial_\nu g)$ та даних Неймана $Ng = (K_+ g, M_+ g)$ на межі γ для функцій g класу $W_2^4(\Omega)$.

В наступних міркуваннях u^ε буде власною функцією задачі (14)–(16), що відповідає власному значенню μ^ε. Беручи до уваги неперервність функції u^ε та її нормальної похідної на γ, звуження u^ε на ω можна трактувати як розв'язок задачі Діріхле (17) з $\theta = \varepsilon^{m+1}\mu^\varepsilon$ та даними Діріхле $\varphi = u^\varepsilon|_{\gamma+}$, $\psi = \partial_\nu u^\varepsilon|_{\gamma+}$. Тому, скориставшись оператором $\Lambda(\theta)$, умови спряження $\varepsilon M_+ u^\varepsilon = M_- u^\varepsilon$, $\varepsilon K_+ u^\varepsilon = K_- u^\varepsilon$ можна записати так $\Lambda(\varepsilon^{m+1}\mu^\varepsilon) D u^\varepsilon = \varepsilon N u^\varepsilon$ за умови, що число $\varepsilon^{m+1}\mu^\varepsilon$ не є власним значенням задачі (18). Насправді остання рівність інтегрує в собі всі чотири умови (16).

Тепер звуження u^ε на Ω є розв'язком крайової задачі з нелінійною залежністю від спектрального параметра

$$Lu^\varepsilon = \mu^\varepsilon r u^\varepsilon \quad \text{в } \Omega, \quad u^\varepsilon = \partial_\nu u^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (\Lambda(\varepsilon^{m+1}\mu^\varepsilon) D - \varepsilon N) u^\varepsilon = 0. \tag{19}$$

У просторі $L_2(r, \Omega)$ введемо сім'ю операторів

$$T_\varepsilon(\mu) f = r^{-1} L f, \quad \operatorname{dom} T_\varepsilon(\mu) = \{ f \in W_2^4(\Omega)\colon f = \partial_\nu f = 0 \quad \text{на } \Gamma,\ \Lambda(\varepsilon^{m+1}\mu) D f = \varepsilon N f \},$$

де $\mu \in \mathbb{R}$. Оператори коректно визначені, коли $\varepsilon^{m+1}\mu$ не є власним значенням задачі Діріхле (18). Для від'ємних μ таке виконується для всіх $\varepsilon \in (0,1)$. У випадку додатного μ добуток $\varepsilon^{m+1}\mu$ завжди можна зробити меншим за перше власне значення задачі (18), вибравши ε достатньо малим.

Ми фактично довели, що звуження на область Ω власної функції u^ε з власним значенням μ^ε задовольняє операторне рівняння

$$(T_\varepsilon(\mu^\varepsilon) - \mu^\varepsilon) u^\varepsilon = 0. \tag{20}$$

Тому природно число μ називати власним значенням задачі (19), якщо μ належить до дискретного спектра оператора $T_\varepsilon(\mu)$. Очевидно, що виконується і таке твердження: якщо μ^ε є точкою дискретного спектра оператора $T_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$, то μ^ε — власне значення задачі (14)–(16).

Хоча спектральні задачі (14)–(16) та (19) не є еквівалентними, проте справджується таке твердження.

Лема 3. *Нехай $(-\infty, a)$ — інтервал спектральної осі $\mathbb{R}_\mu$. Тоді для достатньо малих ε множини тих власних значень задач (14)–(16) та (19), що лежать в інтервалі $(-\infty, a)$, збігаються.*

Доведення. За лемою 1 всі власні значення $\mu_k^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon$ задачі (14)–(16) є обмеженими функціями параметра ε: $c_k \leqslant \mu_k^\varepsilon \leqslant C_k$, $\varepsilon \in (0,1)$. Оскільки c_k необмежено зростає при $k \to \infty$, то в кожному інтервалі $(-\infty, a)$ лежить лише скінченна кількість таких власних значень. Нехай при заданому ε в цьому інтервалі лежить $n = n(a,\varepsilon)$ власних значень $\mu_1^\varepsilon, \dots, \mu_n^\varepsilon$. Зауважимо, що число $n(a,\varepsilon)$ є обмеженим при $\varepsilon \to 0$. Тоді, взявши ε достатньо малим, всі числа $\varepsilon^{m+1}\mu_1^\varepsilon, \dots, \varepsilon^{m+1}\mu_n^\varepsilon$ будуть меншими за перше власне значення задачі (18). Отже, всі оператори $\Lambda(\varepsilon^{m+1}\mu_1^\varepsilon), \dots, \Lambda(\varepsilon^{m+1}\mu_n^\varepsilon)$ визначені, а числа $\mu_1^\varepsilon, \dots, \mu_n^\varepsilon$ і лише вони є одночасно власними значеннями обох задач (14)–(16) та (19). □

Лема 4. *Оператор $T_\varepsilon(\mu)$ є самоспряженим і його спектр дискретний.*

Доведення. Нехай $D_0 f = (f, \partial_\nu f)$ — граничні дані Діріхле на межі Γ, а $N_0 a = (Kf, Mf)$ — дані Неймана на цій межі для функцій з класу $W_2^4(\Omega)$. Введемо також позначення $\Lambda_\varepsilon(\mu) = \Lambda(\varepsilon^{m+1}\mu)$. Тоді для всіх f з області визначення $T_\varepsilon(\mu)$ та $g \in W_2^4(\Omega)$ маємо формулу

$$(Lf, g)_{L_2(r,\Omega)} = (f, Lg)_{L_2(r,\Omega)} + \int_\Gamma \langle N_0 f, D_0 g\rangle\, dl + \varepsilon^{-1}\int_\gamma \langle \Lambda_\varepsilon(\mu) Df, Dg\rangle\, dl - \int_\gamma \langle Df, Ng\rangle\, dl,$$

де $\langle a, b\rangle = a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2$ – ермітів скалярний добуток в $\mathbb{C}^2$. Крім того, з формули Гріна (11) та ермітовості форми α_ω легко отримати рівність

$$\int_\gamma \langle \Lambda(\theta) D\varphi, D\psi\rangle\, dl = \int_\gamma \langle D\varphi,\, \Lambda(\theta) D\psi\rangle\, dl$$

для всіх $\varphi, \psi \in \mathrm{dom}\Lambda(\theta)$ та дійсних значень θ поза спектром задачі (18). Тоді

$$(Lf, g)_{L_2(r,\Omega)} = (f, Lg)_{L_2(r,\Omega)} + \int_\Gamma \langle N_0 f, D_0 g\rangle\, dl + \varepsilon^{-1}\int_\gamma \big\langle Df, (\Lambda_\varepsilon(\mu) D - \varepsilon N) g\big\rangle\, dl.$$

Зауважимо також, що відображення

$$N_0\colon \mathrm{dom}T_\varepsilon(\mu) \to L_2(\Gamma) \times L_2(\Gamma), \quad D\colon \mathrm{dom}T_\varepsilon(\mu) \to L_2(\gamma) \times L_2(\gamma)$$

мають щільні образи. Тому рівність $(T_\varepsilon(\mu) f, g)_{L_2(r,\Omega)} = (f, T_\varepsilon^*(\mu) g)_{L_2(r,\Omega)}$ виконуватиметься для всіх $f \in \mathrm{dom}T_\varepsilon(\mu)$ тоді і лише тоді, коли $g \in \mathrm{dom}T_\varepsilon(\mu)$. Отже, оператор $T_\varepsilon(\mu)$ є самоспряженим. Компактність його резольвенти, яка гарантує дискретність спектра, випливає з еліптичності диференціального оператора L та компактності вкладення просторів $W_2^4(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. □

5. Рівномірна резольвентна збіжність операторів $T_\varepsilon(\mu)$. Доведення збіжності власних значень та власних функцій збуреної задачі опиратиметься на таку теорему.

Теорема 1. *Для кожного дійсного μ оператори $T_\varepsilon(\mu)$ збігаються до оператора T при $\varepsilon \to 0$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.*

Розіб'ємо доведення теореми на низку лем. Розглянемо два рівняння $(T_\varepsilon(\mu) - \zeta)v^\varepsilon = f$, $(T - \zeta)v = f$ для деякої функції f з $L_2(\Omega)$ та числа ζ з ненульовою уявною частиною. Функції v^ε та v є розв'язками класу $W_2^4(\Omega)$ таких крайових задач

$$Lv^\varepsilon - \zeta r v^\varepsilon = rf \quad \text{в } \Omega, \quad v^\varepsilon = \partial_\nu v^\varepsilon = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (\Lambda(\varepsilon^{m+1}\mu) D - \varepsilon N) v^\varepsilon = 0; \tag{21}$$

$$Lv - \zeta r v = rf \quad \text{в } \Omega, \quad v = \partial_\nu v = 0 \text{ на } \Gamma, \quad D_k v \in \mathcal{V}_k, \quad N_k v \in \mathcal{V}_k^\perp, \tag{22}$$

де $k \in \{1, \dots, s\}$. Згадуючи властивості оператора $\Lambda(\theta)$, функцію v^ε можна продовжити на всю область Ω, трактуючи її як розв'язок крайової задачі

$$Lv^\varepsilon - \zeta r v^\varepsilon = rf \quad \text{в } \Omega, \quad v^\varepsilon = \partial_\nu v^\varepsilon = 0 \ \text{ на } \Gamma, \tag{23}$$

$$Lv^\varepsilon = \varepsilon^{m+1} \mu \rho v^\varepsilon \quad \text{в } \omega, \tag{24}$$

$$[v^\varepsilon]_\gamma = 0, \quad [\partial_\nu v^\varepsilon]_\gamma = 0, \quad \varepsilon M_+ v^\varepsilon = M_- v^\varepsilon, \quad \varepsilon K_+ v^\varepsilon = K_- v^\varepsilon \tag{25}$$

і зберігши за продовженням це ж саме позначення.

Далі ми отримаємо деякі апріорні оцінки для сім'ї функцій v^ε при $\varepsilon \to 0$. Усі ці оцінки будуть рівномірними стосовно L_2-норми правої частини f.

Лема 5. *Розв'язок v^ε задачі (23)–(25) при малих ε задовольняє оцінку*

$$\|v^\varepsilon\|_{W_2^2(U)} \leqslant C_1 \|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{26}$$

Крім того, існує сім'я лінійних функцій ℓ^ε таких, що

$$\|v^\varepsilon - \ell^\varepsilon\|_{W_2^2(\omega)} \leqslant C_2 \sqrt{\varepsilon}\, \|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{27}$$

$$\max_{x \in \omega} |\ell^\varepsilon(x)| \leqslant C_3 \, \|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{28}$$

Тут сталі C_k не залежать від ε та f.

Доведення. Спершу зауважимо, що

$$\|v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_1 \|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{29}$$

Ця нерівність є наслідком рівномірної обмеженості резольвент сім'ї самоспряжених операторів $T_\varepsilon(\mu)$, а саме $\|(T_\varepsilon(\mu) - \zeta)^{-1}\| \leqslant |\mathrm{Im}\zeta|^{-1}$.

Далі, домножимо рівняння (23) на $\varepsilon v^\varepsilon$, а рівняння (24) — на v^ε. Тоді, інтегруючи частинами із врахуванням умов спряження (25), отримаємо рівність

$$\alpha_\omega(v^\varepsilon, v^\varepsilon) + \varepsilon \alpha_\Omega(v^\varepsilon, v^\varepsilon) - \zeta\, \varepsilon \int_\Omega r\, |v^\varepsilon|^2 \, dx = \varepsilon^{m+1} \mu \int_\omega \rho \, |v^\varepsilon|^2 \, dx + \varepsilon \int_\Omega r f \overline{v}_\varepsilon \, dx. \tag{30}$$

Ермітова форма $\alpha_1 = \alpha_\omega + \alpha_\Omega$ задає в просторі $\overset{\circ}{W}{}_2^2(U)$ скалярний добуток, еквівалентний до стандартного ([28, с. 275]). Тому з (30) та (29) випливає нерівність

$$\alpha_\omega(v^\varepsilon, v^\varepsilon) + \varepsilon \alpha_\Omega(v^\varepsilon, v^\varepsilon) \leqslant c_2 \varepsilon^{m+1} \alpha_1(v^\varepsilon, v^\varepsilon) + c_3 \varepsilon \|f\|^2_{L_2(\Omega)},$$

яку можна записати так

$$(1 - c_2 \varepsilon^{m+1}) \alpha_\omega(v^\varepsilon, v^\varepsilon) + \varepsilon \big(1 - c_2 \varepsilon^m\big) \alpha_\Omega(v^\varepsilon, v^\varepsilon) \leqslant c_3 \varepsilon \|f\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Для малих ε обидва доданки зліва додатні, тому

$$\alpha_\Omega(v^\varepsilon, v^\varepsilon) \leqslant c_4 \|f\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \alpha_\omega(v^\varepsilon, v^\varepsilon) \leqslant c_5 \varepsilon \|f\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{31}$$

де сталі c_4 та c_5 не залежать від ε та f. Звідси маємо $\|v^\varepsilon\|_{W_2^2(U)} \leqslant c_6 \sqrt{\alpha_1(v^\varepsilon, v^\varepsilon)} \leqslant c_7 \|f\|_{L_2(\Omega)}$, що завершує доведення нерівності (26).

Відомо ([28, с.432]), що для кожної функції $g \in W_2^2(\omega)$ існує лінійна функція ℓ така, що $\|g - \ell\|_{W_2^2(\omega)} \leqslant C \sqrt{\alpha_\omega(g, g)}$ і стала C не залежить від g. Тоді оцінка (27) є безпосереднім наслідком з другої нерівності (31). Далі, лінійні функції ℓ^ε мають зображення

$$\ell^\varepsilon(x_1, x_2) = \langle \partial_{x_1} v^\varepsilon \rangle_k \left(x_1 - \langle x_1 \rangle_k\right) + \langle \partial_{x_2} v^\varepsilon \rangle_k \left(x_2 - \langle x_2 \rangle_k\right) + \langle v^\varepsilon \rangle_k, \tag{32}$$

на кожній з компонент зв'язаності ω_k, де $\langle g\rangle_k$ — середнє значення функції g в області ω_k. Зауважимо також, що з (31) випливає оцінка $\|v^\varepsilon\|_{W_2^2(U)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}$. Тому

$$\max_{x\in\omega}|\ell^\varepsilon(x)| \leqslant c_9 \max_{k\in\{1,\dots,s\}} \max\{|\langle v^\varepsilon\rangle_k|, |\langle\partial_{x_1}v^\varepsilon\rangle_k|, |\langle\partial_{x_2}v^\varepsilon\rangle_k|\} \leqslant c_{10}\|v^\varepsilon\|_{W_2^2(U)} \leqslant c_{11}\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

що завершує доведення. □

Нехай $\mathcal{W}$ — підпростір в $W_2^2(\Omega)$ таких функцій φ, що $\varphi = 0$ та $\partial_\nu\varphi = 0$ на Γ. Через $\mathcal{B}$ позначимо гільбертів простір $W_2^{3/2}(\gamma)\times W_2^{1/2}(\gamma)$ з нормою $\|g\|_{\mathcal{B}} = \|g_1\|_{W_2^{3/2}(\gamma)} + \|g_2\|_{W_2^{1/2}(\gamma)}$, де $g = (g_1,\, g_2)$.

Лема 6. *Існують незалежні від ε і f сталі C_1 та C_2 такі, що для всіх $g \in \mathcal{B}$ виконується нерівність*

$$\Big|\int_\gamma \langle Nv^\varepsilon, g\rangle\, dl\Big| \leqslant C_1\|f\|_{L_2(\Omega)}\|g\|_{\mathcal{B}}, \tag{33}$$

а також

$$\Big|\int_\gamma \langle Nv^\varepsilon, D\ell\rangle\, dl\Big| \leqslant C_2\varepsilon^m\, \|f\|_{L_2(\Omega)} \max_\omega|\ell| \tag{34}$$

для всіх ℓ з $\mathbb{S}(\omega)$.

Доведення. Нехай $Z\colon \mathcal{B}\to\mathcal{W}$ — неперервний оператор продовження такий, що кожному вектору $g = (g_1,\, g_2)$ з простору $\mathcal{B}$ ставить у відповідність функцію $u = Zg$ з $\mathcal{W}$, причому $u|_\gamma = g_1, \partial_\nu u|_\gamma = g_2$. Домноживши рівняння (23) на u та проінтегрувавши частинами, отримаємо

$$\int_\gamma \langle Nv^\varepsilon, g\rangle\, dl = -\alpha_\Omega(v^\varepsilon, u) - \zeta\int_\Omega r v^\varepsilon\, u\, dx + \int_\Omega r f\, u\, dx. \tag{35}$$

Усі доданки в правій частині є лінійними неперервними функціоналами стосовно u в просторі $\mathcal{W}$. Тому

$$\Big|\int_\gamma \langle Nv^\varepsilon, g\rangle\, dl\Big| \leqslant c(\|v^\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)})\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant c_1\|f\|_{L_2(\Omega)}\|Zg\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant c_2\|f\|_{L_2(\Omega)}\|g\|_{\mathcal{B}}$$

з огляду на нерівність (26) та неперервність оператора Z.

Для доведення оцінки (34) скористаємося рівнянням (24). Домножимо його на лінійну функцію ℓ та проінтегруємо частинами в ω. Тоді матимемо

$$\int_\gamma (M_- v^\varepsilon\, \partial_\nu\ell + K_- v^\varepsilon\, \ell)\, dl = \varepsilon^{m+1}\mu\int_\omega \rho\, v^\varepsilon\, \ell\, dx,$$

оскільки $\alpha_\omega(v^\varepsilon, \ell) = 0$ для всіх $\ell \in \mathbb{S}(\omega)$. Беручи до уваги умови спряження (25), останню рівність можна записати так

$$\int_\gamma \langle Nv^\varepsilon, D\ell\rangle\, dl = \varepsilon^m\mu\int_\omega \rho\, v^\varepsilon\, \ell\, dx.$$

Звідси, нерівність (34) випливає безпосередньо з (26). □

Зауважимо, що розв'язок задачі (22) задовольняє нерівності

$$\|v\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C_3\|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad \Big|\int_\gamma \langle Nv, g\rangle\, dl\Big| \leqslant C_4\|f\|_{L_2(\Omega)}\|g\|_{\mathcal{B}} \quad \text{для всіх } g \in \mathcal{B}, \tag{36}$$

доведення яких таке ж, як і для функцій v^ε.

Доведення теореми 1. Переконаємося, що розв'язки v^ε і v задач (21) і (22) відповідно є близькими в просторі $L_2(\Omega)$, причому ця близькість є рівномірною стосовно правої частини f. Нехай $w^\varepsilon = v^\varepsilon - v$. Ця різниця є розв'язком рівняння $Lw^\varepsilon - \zeta r w^\varepsilon = 0$ в Ω та задовольняє умови $w^\varepsilon = \partial_\nu w^\varepsilon = 0$ на Γ. Тому

$$\alpha_\Omega(w^\varepsilon,\, w^\varepsilon) - \zeta \int_\Omega r|w^\varepsilon|^2\,dx = -\int_\gamma \langle Nw^\varepsilon, Dw^\varepsilon\rangle\,dl =$$
$$= \int_\gamma \langle Nv^\varepsilon, Dv\rangle\,dl + \int_\gamma \langle Nv, Dv^\varepsilon\rangle\,dl - \int_\gamma \langle Nv^\varepsilon, Dv^\varepsilon\rangle\,dl - \int_\gamma \langle Nv, Dv\rangle\,dl. \tag{37}$$

Зауважимо, що $\int_\gamma \langle Nv, Dv\rangle\,dl = \sum_{k=1}^s \int_{\gamma_k} \langle N_k v, D_k v\rangle\,dl = 0$ з огляду на ортогональність векторів $D_k v$ та $N_k v$ в $L_2(\gamma_k) \times L_2(\gamma_k)$ для всіх $k \in \{1, \dots, s\}$.

Далі, згідно з умовами (22) існує функція $\ell_v \in \mathbb{S}(\omega)$ така, що $Dv = D\ell_v$. Зрозуміло також, що $\max\limits_\omega |\ell_v| \leqslant c\|f\|_{L_2(\Omega)}$. Тоді, скориставшись нерівністю (34) з леми 6, матимемо

$$\Big|\int_\gamma \langle Nv^\varepsilon, Dv\rangle\,dl\Big| = \Big|\int_\gamma \langle Nv^\varepsilon, D\ell_v\rangle\,dl\Big| \leqslant c_1\varepsilon^m\,\|f\|_{L_2(\Omega)} \max_\omega |\ell_v| \leqslant c_2\varepsilon^m\,\|f\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Вектори $N_k v$ ортогональні до підпросторів $\mathcal{V}_k$, зокрема вони ортогональними до векторів $D_k\ell^\varepsilon$, де ℓ^ε — сім'я функції з леми 5. Тому

$$\Big|\int_\gamma \langle Nv, Dv^\varepsilon\rangle\,dl\Big| = \Big|\int_\gamma \langle Nv, D(v^\varepsilon - \ell^\varepsilon)\rangle\,dl\Big| \leqslant c_3\|f\|_{L_2(\Omega)}\|D(v^\varepsilon - \ell^\varepsilon)\|_{\mathcal{B}} \leqslant$$
$$\leqslant c_4\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v^\varepsilon - \ell^\varepsilon\|_{W_2^2(\omega)} \leqslant c_5\sqrt{\varepsilon}\,\|f\|^2_{L_2(\Omega)},$$

що випливає з оцінок (36) та (27), а також неперервності операторів сліду

$$\|D(v^\varepsilon - \ell^\varepsilon)\|_{\mathcal{B}} \leqslant c\|v^\varepsilon - \ell^\varepsilon\|_{W_2^2(\omega)}.$$

Нарешті

$$\Big|\int_\gamma \langle Nv^\varepsilon, Dv^\varepsilon\rangle\,dl\Big| \leqslant \Big|\int_\gamma \langle Nv^\varepsilon, D(v^\varepsilon - \ell^\varepsilon)\rangle\,dl\Big| + \Big|\int_\gamma \langle Nv^\varepsilon, D\ell^\varepsilon\rangle\,dl\Big| \leqslant c_6\|f\|_{L_2(\Omega)}\|D(v^\varepsilon - \ell^\varepsilon)\|_{\mathcal{B}} +$$
$$+ c_7\varepsilon^m\,\|f\|_{L_2(\Omega)} \max_\omega |\ell^\varepsilon| \leqslant c_8(\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon^m)\|f\|^2_{L_2(\Omega)} = c_8\varepsilon^{2\delta(m)}\|f\|^2_{L_2(\Omega)},$$

де $\delta(m) = \min\{m/2, 1/4\}$. Тут ми скористалися лемою 6.

Повертаючись до (37), бачимо, що $\left|\alpha_\Omega(w^\varepsilon,\, w^\varepsilon) - \zeta\int_\Omega r|w^\varepsilon|^2\,dx\right| \leqslant c_9\varepsilon^{2\delta(m)}\,\|f\|^2_{L_2(\Omega)}$. Звідси $\|w^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = \|v^\varepsilon - v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_{10}\varepsilon^{\delta(m)}\,\|f\|_{L_2(\Omega)}$, бо уявна частина ζ відмінна від нуля. Тому маємо $\|v^\varepsilon - v\|_{L_2(\Omega)} = \left\|(T_\varepsilon(\mu) - \zeta)^{-1}f - (T - \zeta)^{-1}f\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_{11}\varepsilon^{\delta(m)}\,\|f\|_{L_2(\Omega)}$, що еквівалентне до рівномірної збіжності резольвент $(T_\varepsilon(\mu) - \zeta)^{-1} \to (T - \zeta)^{-1}$ при $\varepsilon \to 0$. $\square$

6. Збіжність спектра та власних підпросторів. Нехай H — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$, а B — самоспряжений оператор в H з областю визначення $\operatorname{dom} B$.

Означення 1. *Квазімодою з нев'язкою* ε для оператора B будемо називати таку пару $(\mu, v) \in \mathbb{R} \times \operatorname{dom} B$, що $\|Bv - \mu v\| \leqslant \varepsilon$ і $\|v\| = 1$.

Означення 2. Нехай $(\mu, v_1), \dots, (\mu, v_N)$ — квазімоди оператора B. Говоритимемо, що *вони утворюють сім'ю квазімод з нев'язкою* ε *та відхиленням від ортогональності* τ, якщо $\|Bv_j - \mu v_j\| \leqslant \varepsilon$ та $|(v_j, v_k) - \delta_{jk}| \leqslant \tau$ для всіх $j, k \in \{1, \dots, N\}$, де δ_{jk} — символ Кронекера.

Твердження 1 ([33]). *Нехай $\{(\mu, v_j)\}_{j=1}^N$ — сім'я квазімод оператора B з нев'язкою ε та відхиленням від ортогональності τ, а також для деякого $h > 0$ спектр B на відрізку $[\mu-h, \mu+h]$ є дискретним. Якщо $\varepsilon h^{-1}+\tau < N^{-1}$, то оператор B на множині $[\mu-h, \mu+h]$ має власні значення сумарної кратності не менше N.*

6.1. Збіжність власних значень. Нехай $\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ та $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ — власні значення задач (2)–(4) та (12) відповідно, перераховані із врахуванням кратності.

Лема 7. *Для кожного $n \in \mathbb{N}$ послідовність $\mu_n^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$ має скінченну границю при $\varepsilon \to 0$, яка є точкою спектра оператора T.*

Доведення. Припустимо від супротивного, що $\mu_* = \varliminf\limits_{\varepsilon\to 0} \mu_n^\varepsilon < \varlimsup\limits_{\varepsilon\to 0} \mu_n^\varepsilon = \mu^*$ для деякого n. Числа μ_* та μ^* є скінченними, оскільки, згідно з лемою 1, послідовність μ_n^ε є обмеженою. Доведемо, що спектр оператора T є скрізь щільний на інтервалі (μ_*, μ^*).

Величина μ_n^ε є неперервною за змінною ε згідно з цією ж лемою 1, тому кожна точка $\mu \in (\mu_*, \mu^*)$ є границею деякої підпослідовність $\mu_n^{\varepsilon'}$ при $\varepsilon' \to 0$. Нехай $\Delta_h(\mu) = (\mu-h, \mu+h)$. Виберемо число h таким, що $\Delta_h(\mu) \subset (\mu_*, \mu^*)$. Інтервал $\Delta_h(\mu)$ при малих ε' містить власні значення операторів $T_{\varepsilon'}(\mu_n^{\varepsilon'})$. З рівномірної резольвентної збіжності операторів $T_{\varepsilon'}(\mu_n^{\varepsilon'})$ до T випливає, що цей інтервал містить власні значення оператора T ([31, Т. VIII.23]).

З довільності μ і h випливає, що спектр оператора T мав би бути скрізь щільним в (μ_*, μ^*), що суперечить структурі спектра цього оператора (див. лему 2). Отже, числа μ_* і μ^* рівні та збігаються з одним із власних значень оператора T. □

Теорема 2. *Нехай $\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ та $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ — власні значення задач (2)–(4) та (12) відповідно, перераховані із врахуванням кратності. Для кожного натурального n відношення $\varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$ збігається до μ_n при $\varepsilon \to 0$.*

Доведення. Нагадаємо, що збуреній задачі відповідає самоспряжений оператор A_ε в просторі $L_2(r_\varepsilon, U)$ зі скалярним добутком $(u, v)_\varepsilon = \int_U r_\varepsilon u\overline{v}\,dx$ та нормою $\|u\|_\varepsilon = (u,u)_\varepsilon^{1/2}$.

Нехай μ є власним значенням оператора T кратності p. Виберемо h таким, щоб окіл $\Delta_h(\mu)$ не містив інших точок спектра T, окрім μ. Згідно з теоремою 1 та теоремою VIII.23 з монографії [31] для достатньо малих ε в інтервалі $\Delta_h(\mu)$ лежать власні значення оператора $T_\varepsilon(\mu)$ сумарної кратності p. Позначимо їх $\mu_1^\varepsilon, \dots, \mu_p^\varepsilon$. Нехай $v_1^\varepsilon, \dots, v_p^\varepsilon$ — відповідні ортонормовані в $L_2(r, \Omega)$ власні функції, які є розв'язками задач

$$Lv_k^\varepsilon = \mu_k^\varepsilon r v_k^\varepsilon \quad \text{в } \Omega, \quad v_k^\varepsilon = \partial_\nu v_k^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (\Lambda_\varepsilon(\mu)D - \varepsilon N)v_k^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Кожну з функцій v_k^ε продовжимо на всю область U, як розв'язок задачі

$$Lv_k^\varepsilon = \mu_k^\varepsilon\, r v_k^\varepsilon \quad \text{в } \Omega, \quad Lv_k^\varepsilon = \mu\, \varepsilon^{m+1}\rho v_k^\varepsilon \quad \text{в } \omega, \tag{38}$$

$$v_k^\varepsilon = \partial_\nu v_k^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad [v_k^\varepsilon]_\gamma = [\partial_\nu v_k^\varepsilon]_\gamma = 0, \quad \varepsilon M_+ v_k^\varepsilon = M_- v_k^\varepsilon, \quad \varepsilon K_+ v_k^\varepsilon = K_- v_k^\varepsilon \tag{39}$$

зберігши для продовження теж саме позначення. Очевидно, що

$$1 \leqslant \|v_k^\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant c \tag{40}$$

для деякої сталої c, незалежної від ε.

Нехай $\widehat{v}_k^\varepsilon = \|v_k^\varepsilon\|_\varepsilon^{-1} v_k^\varepsilon$. Доведемо, що пари $(\varepsilon\mu, \widehat{v}_1^\varepsilon), \dots, (\varepsilon\mu, \widehat{v}_p^\varepsilon)$ утворюють сім'ю майже ортогональних квазімод оператора A_ε. Безпосередньо з (38) отримуємо, що $(A_\varepsilon - \varepsilon\mu)\widehat{v}_k^\varepsilon = f_k^\varepsilon$, де $f_k^\varepsilon = \varepsilon\,(\mu - \mu_k^\varepsilon)\,\|v_k^\varepsilon\|_\varepsilon^{-1} v_k^\varepsilon$ в Ω та $f_k^\varepsilon = 0$ в ω. Тому $\|(A_\varepsilon - \varepsilon\mu)\widehat{v}_k^\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant \varepsilon|\mu - \mu_k^\varepsilon| < \varepsilon h$

для всіх $k \in \{1, \dots, p\}$. Далі, скориставшись ортогональністю власних функцій v_k^ε в просторі $L_2(r, \Omega)$ та (40), для $j \neq k$ матимемо

$$|(\widehat{v}_j^\varepsilon, \widehat{v}_k^\varepsilon)_\varepsilon| \leqslant \varepsilon^m \int_\omega \rho |v_j^\varepsilon||v_k^\varepsilon|\, dx \leqslant c_1 \varepsilon^m.$$

А це означає, що $\{(\varepsilon\mu, \widehat{v}_k^\varepsilon)\}_{k=1}^p$ — сім'я квазімод оператора A_ε з нев'язкою εh та відхиленням від ортогональності $c_1\varepsilon^m$. Згідно з твердженням 1, як тільки $\varepsilon + c_1\varepsilon^m < p^{-1}$, то оператор A_ε в інтервалі $\Delta_h(\mu)$ має власні значення сумарної кратності не менше p. Позаяк $\Delta_h(\mu)$ містить лише одну точку спектра T, то за лемою 7 всі ці власні значення, поділені на ε, збігаються до μ.

Якщо сім'я квазімод $\{(\varepsilon\mu, \widehat{v}_k^\varepsilon)\}_{k=1}^p$ апроксимує не весь спектр оператора A_ε, що міститься в околі $\varepsilon\mu$, то існує власне значення $\varepsilon\eta_\varepsilon$ та власна функція w^ε оператора A_ε такі, що

$$\eta_\varepsilon \to \mu, \quad (w^\varepsilon, \widehat{v}_k^\varepsilon)_\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad k \in \{1, \dots, p\}, \tag{41}$$

а w^ε нормована умовою $\int_\Omega r|w^\varepsilon|^2\, d\Omega = 1$. Доведемо, що тоді μ повинно бути власним значенням оператора T кратності більшої за p.

Загалом, звуження w^ε на Ω неналежить до $\operatorname{dom} T_\varepsilon(\mu)$. Розглянемо допоміжну задачу

$$Lz^\varepsilon = \zeta_\varepsilon r z^\varepsilon \quad \text{в } \Omega, \quad z^\varepsilon = \partial_\nu z^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (\Lambda_\varepsilon(\mu)D - \varepsilon N)z^\varepsilon = \psi^\varepsilon \quad \text{на } \gamma, \tag{42}$$

де $\psi^\varepsilon = \big(\Lambda_\varepsilon(\mu_\varepsilon) - \Lambda_\varepsilon(\mu)\big)Dw^\varepsilon$. Послідовність чисел ζ_ε вибираємо так, щоб $\zeta_\varepsilon \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$ та $\operatorname{dist}\{\zeta_\varepsilon, \sigma(T_\varepsilon(\mu))\} \geqslant \varepsilon$. Нехай $\psi^\varepsilon = (\psi_1^\varepsilon, \psi_2^\varepsilon)^\top$. Оскільки $w^\varepsilon \in W_2^4(U \setminus \gamma)$, то $\widetilde{\psi}^\varepsilon = (\psi_2^\varepsilon, \psi_1^\varepsilon)^\top \in \mathcal{B}$ та існує єдиний розв'язок $z^\varepsilon \in W_2^4(\Omega)$ задачі (42). Функцію z^ε можна подати у вигляді $z^\varepsilon = z_0^\varepsilon + z_1^\varepsilon$, де $z_1^\varepsilon \in W_2^4(\Omega) \cap \mathcal{W}$ і задовольняє умову $(\Lambda_\varepsilon(\mu)D - \varepsilon N)z_1^\varepsilon = \psi^\varepsilon$. Крім того, $\|z_1^\varepsilon\|_{W_2^4(\Omega)} \leqslant c\|\widetilde{\psi}^\varepsilon\|_{\mathcal{B}}$. Функція $z_0^\varepsilon \in \operatorname{dom} T_\varepsilon(\mu)$ є розв'язком такого рівняння $(T_\varepsilon(\mu) - \zeta_\varepsilon)z_0^\varepsilon = f_\varepsilon$, де $f_\varepsilon = -(L - \zeta_\varepsilon)z_1^\varepsilon$.

Звідси маємо

$$\|z^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|(T_\varepsilon(\mu) - \zeta_\varepsilon)^{-1} f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \|z_1^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|(T_\varepsilon(\mu) - \zeta_\varepsilon)^{-1}\|\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \|z_1^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_1\|z_1^\varepsilon\|_{W_2^4(\Omega)}}{\operatorname{dist}\{\zeta_\varepsilon, \sigma(T_\varepsilon(\mu))\}} \leqslant \frac{c_2}{\varepsilon}\|\widetilde{\psi}^\varepsilon\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{c_2}{\varepsilon}\Big\|\Lambda_\varepsilon(\eta_\varepsilon) - \Lambda_\varepsilon(\mu)\Big\|\,\|Dw^\varepsilon\|_{\mathcal{B}} \leqslant c_2 M\varepsilon^m|\eta_\varepsilon - \mu| \leqslant c_3\varepsilon^m,$$

бо на кожному відрізку $[\theta_1, \theta_2] \subset \mathbb{R}$, що не містить власних значень задачі (18), виконується нерівність $\|\Lambda(\theta) - \Lambda(\theta')\| \leqslant M|\theta - \theta'|$ для всіх $\theta, \theta' \in [\theta_1, \theta_2]$, де стала M залежить лише від вибраного відрізка.

За побудовою функції z^ε сума $w_*^\varepsilon = w^\varepsilon + z^\varepsilon$ належить області визначення оператора $T_\varepsilon(\mu)$, а коректор z^ε є нескінченно малим в L_2-нормі. Далі,

$$(T_\varepsilon(\mu) - \mu)w_*^\varepsilon = \frac{1}{r}Lw^\varepsilon - \mu w^\varepsilon + \frac{1}{r}Lz^\varepsilon - \mu z^\varepsilon = (\eta_\varepsilon - \mu)w^\varepsilon + (\zeta_\varepsilon - \mu)z^\varepsilon,$$

тому величина $h_*^\varepsilon = \|(T_\varepsilon(\mu) - \mu)w_*^\varepsilon\|_{L_2(r,L)}$ нескінченно мала порядку $|\eta_\varepsilon - \mu| + |\zeta_\varepsilon - \mu|\varepsilon^m$ при $\varepsilon \to 0$. З (40) та (41) випливає, що $(w^\varepsilon, v_k^\varepsilon)_{L_2(r,\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для всіх k. Беручи до уваги малість z^ε, добутки $(w_*^\varepsilon, v_k^\varepsilon)_{L_2(r,\Omega)}$ теж прямують до нуля. Отже, (μ, v_1^ε), …, (μ, v_s^ε), (μ, w_*^ε) є сім'єю квазімод оператора $T_\varepsilon(\mu)$ з нескінченно малими нев'язкою та відхиленням від ортогональності. Згідно з твердженням 1 вимірність спектрального проектора для $T_\varepsilon(\mu)$, що відповідає інтервалу $\Delta_h(\mu)$, буде не меншою ніж $p+1$. Оскільки, резольвенти $T_\varepsilon(\mu)$ збігаються до резольвенти T рівномірно, а кратність μ як власного значення оператора T рівна p, отримуємо суперечність. □

6.2. Збіжність власних підпросторів. Нехай V_1 та V_2 — підпростори гільбертового простору H, а P_1 і P_2 — відповідні ортогональні проектори. *Розхилом* між підпросторами V_1 та V_2 називатимемо величину $\delta_H(V_1, V_2) = \|P_1 - P_2\|$.

Твердження 2 ([8]). *Нехай* $\dim V_1 = \dim V_2 = p < \infty$ *і для довільного нормованого вектора* $u \in V_1$ *існує вектор* $v \in V_1$ *такий, що виконується нерівність* $\|u - v\|_H \leqslant \beta$ *зі сталою* $\beta \in (0, p^{-1})$. *Тоді* $\delta_H(V_1, V_2) \leqslant C\beta$, *де стала* C *залежить лише від* p.

Через V_μ^0 позначимо власний підпростір оператора T, що відповідає власному значенню μ. Оскільки звуження елементів підпростору V_μ^0 на γ_k збігаються зі звуження деяких лінійних функцій на цю межу, то їх можна продовжити цими лінійними функціями з Ω на всю область U, отримавши підпростір V_μ в $L_2(U)$. Очевидно, що простори V_μ^0 і V_μ мають однакову вимірність.

Теорема 3. *Нехай* V_μ^ε — *підпростір в* $L_2(U)$, *породжений усіма такими власними функціями* u_k^ε *оператора* A_ε, *що* $\varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon \to \mu$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Тоді для кожної точки* μ *зі спектра оператора* T *маємо*

$$\delta_{L_2(U)}(V_\mu^\varepsilon, V_\mu) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{43}$$

Якщо $\mu = \mu_n$ — *просте власне значення, то власна функція* u_n^ε *оператора* A_ε *збігається в* $L_2(U)$ *до власної функції* v_n *оператора* T, *яка продовжена за неперервністю лінійними функціями в область* ω.

Доведення. З теореми 2 випливає, що підпростори V_μ^ε та V_μ мають однакову вимірність для достатньо малих ε. Нехай $\dim V_\mu = p$, а v довільна нормована функція з V_μ. Доведемо, що існує такий елемент $u_\varepsilon \in V_\mu^\varepsilon$, що $\|u_\varepsilon - v\|_{L_2(U)} \leqslant c(\varepsilon + \varepsilon^m)$.

Знайдемо таку функцію w, що елемент $v_\varepsilon = v + \varepsilon w$ лежить в $\operatorname{dom} A_\varepsilon$. Виберемо функцію w так, що на множині ω вона є одним з розв'язків задачі

$$Lw = 0 \text{ в } \omega, \quad M_- w = M_+ v, \quad K_- w = K_+ v \text{ на } \gamma.$$

Розв'язок w існує, бо виконуються умови $\int_{\gamma_k} \langle N_k v, D_k l\rangle\, dl = 0$ для всіх $l \in \mathbb{S}(\Omega)$ та $k \in \{1, \dots, s\}$. Продовжимо його в область Ω так, що $[w]_\gamma = [\partial_\nu w]_\gamma = 0$, $M_+ w = K_+ w = 0$ та $w = \partial_\nu w = 0$ на Γ, причому звуження w на Ω є класу W_2^4. Отже, $v_\varepsilon \in \operatorname{dom} A_\varepsilon$ та $\big|\|v_\varepsilon\|_\varepsilon - 1\big| \leqslant c_1\varepsilon$.

Введемо позначення $\widehat{v}_\varepsilon = \|v_\varepsilon\|_\varepsilon^{-1} v_\varepsilon$ і доведемо, що пара $(\varepsilon\mu, \widehat{v}_\varepsilon)$ є квазімодою оператора A_ε з нескінчено малою нев'язкою. Безпосередньо переконуємося, що $A_\varepsilon \widehat{v}_\varepsilon - \varepsilon\mu\widehat{v}_\varepsilon = f_\varepsilon$, де $f_\varepsilon = \dfrac{1}{\|v_\varepsilon\|_\varepsilon} \cdot \begin{cases} -\varepsilon\mu(v + \varepsilon w)) & \text{в } \omega, \\ \varepsilon^2(\frac{1}{r} Lw - \mu w) & \text{в } \Omega. \end{cases}$ Тому виконується оцінка

$$\|f_\varepsilon\|_\varepsilon^2 = \varepsilon^{2+m}\mu^2\|v + \varepsilon w\|^2_{L_2(\rho,\omega)} + \varepsilon^4\|r^{-1}Lw - \mu w\|^2_{L_2(r,\Omega)} \leqslant c_2\varepsilon^{2\beta},$$

де $\beta = \min\{1 + m/2, 2\}$.

Нехай інтервал $[\mu - h, \mu + h]$ не містить власних значень оператора T, окрім μ. Згідно з лемою [29] для всіх достатньо малих ε існує нормований вектор $u_\varepsilon \in V_\mu^\varepsilon$ такий, що $\|u_\varepsilon - \widehat{v}_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant \frac{2c_2}{h}\varepsilon^\beta$. Тоді

$$\|u_\varepsilon - v\|_\varepsilon \leqslant \|u_\varepsilon - \widehat{v}_\varepsilon\|_\varepsilon + \|\widehat{v}_\varepsilon - v\|_\varepsilon \leqslant c_3\varepsilon^\beta + \big\|\|v_\varepsilon\|_\varepsilon^{-1}(v + \varepsilon w) - v\big\|_\varepsilon \leqslant c_3\varepsilon^\beta + c_4\varepsilon\|w\|_\varepsilon \leqslant c_5\varepsilon.$$

Звідси, $u_\varepsilon \to v$ в $L_2(\Omega)$. Доведемо також, що функції u_ε та v близькі в просторі $L_2(U)$. Для нормованого вектора $u_\varepsilon \in V_\mu^\varepsilon$ маємо зображення $u_\varepsilon = c_1^\varepsilon u^{\varepsilon,1} + \ldots + c_p^\varepsilon u^{\varepsilon,p}$, де через $u^{\varepsilon,j(k)}$ перенумеровані u_k^ε власні функції A_ε, для яких $\varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$. Крім того, кожна власна функція задовольняє тотожність $\alpha_\varepsilon(u_l^\varepsilon,\, u_l^\varepsilon) = \lambda_l^\varepsilon(u_l^\varepsilon,\, u_l^\varepsilon)_\varepsilon$. Домножимо почергово ці рівності на $(c_l^\varepsilon)^2$ і додамо їх. Оскільки λ_l^ε обмежені, а $\|u_\varepsilon\|_\varepsilon = 1$ то в результаті одержимо оцінку $\alpha_\omega(u^\varepsilon,\, u^\varepsilon) + \varepsilon\alpha_\Omega(u^\varepsilon,\, u^\varepsilon) \leqslant c\varepsilon$. Нагадаємо, що ермітова форма $\alpha_\omega + \alpha_\Omega$ задає в просторі $\overset{\circ}{W}{}_2^2(U)$ скалярний добуток еквівалентний стандартному, тому $\|u^\varepsilon\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(U)} \leqslant C$. Отже, існує слабко збіжна в $\overset{\circ}{W}{}_2^2(U)$ підпослідовність $u^{\varepsilon'}$, яка збігається сильно $L_2(\Omega)$. З оцінки $\alpha_\omega(u^\varepsilon,\, u^\varepsilon) \leqslant c_1\varepsilon$ та нерівності Фрідріхса випливає, що в області ω ця підпослідовність збігається до лінійної функції. Звідси, врахувавши, що послідовність u_ε збігається сильно в просторі $L_2(\Omega)$ отримуємо збіжність $\|u^\varepsilon - v\|_{L_2(U)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Згідно з твердженням 2 $\delta_{L_2(U)}(V_\mu^\varepsilon, V_\mu) \to 0$, що завершує доведення (43). У випадку одновимірних просторів V_μ та V_μ^ε, збіжність до нуля їхнього розхилу еквівалентна збіжності одиничних векторів, які їх породжують. Тобто, функція u_n^ε збуреної задачі збігається в $L_2(\Omega)$ до власної функції v_n граничної задачі (12), яка продовжена за неперервністю лінійними функціями на всю область U. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Marchenko V.A., Khruslov E.Ya. Homogenized Models of Microinhomogeneous Media. – Kiev, Naukova Dumka, 2005 (in Russian). English translated in Homogenization of partial differential equations, Progress in Mathematical Physics, V.46, Birkhäuser, Boston, 2006.
2. Sanchez Hubert J., Sanchez Palencia E. Vibration and coupling of continuous systems. – Springer-Verlag, 1989. – 421 p.
3. Oleinik O.A., Shamaev A.S., Yosifian G.A. Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization. – North-Holland, London, 1992.
4. Zhikov V.V., Kozlov S.M., Oleinik O.A. Homogenization of differential operators and integral functionals, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, NewYork, 1994.
5. Geymonat G., Lobo-Hidalgo M., Sanchez-Palencia E., Roach G.F. *Spectral properties of certain stiff problems in elasticity and acoustics*// Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 1982. – V.4. – P. 291–306.
6. Lobo M., Nazarov S.A., Pérez E. *Eigen-oscillations of contrasting non-homogeneous elastic bodies: asymptotic and uniform estimates for eigenvalues*// IMA J. Appl. Math. – 2005. – P. 1–40.
7. Gómez D., Lobo M., Nazarov S.A., Pérez E. *Asymptotics for the spectrum of the Wentzell problem with a small parameter and other related stiff problems*// J. Math. Pures Appl. – 2006. – V.86. – P. 369–402.
8. Golovaty Yu.D. *Spectral properties of oscillatory systems with added masses*// Trudy Moskov. Mat. Obshch. – 1992. – V.54. – P. 29–72 (in Russian). English transl. in Trans. Moscow Math. Soc. – 1993. – P. 23–59.
9. Chechkin G.A. *Asymptotic expansions of the eigenvalues and eigenfunctions of an elliptic operator in a domain with many "light" concentrated masses near the boundary. The two-dimensional case*// Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. – 2005. – V.69, №4. – P. 161—204 (in Russian). English transl. in Izv. Math.– 2005. – V.69, №4. – P. 805—846.
10. Rybalko V. *Vibrations of elastic systems with a large number of tiny heavy inclusions*// Asymptotic Analysis. – 2002. – V.32. – P. 27–62.
11. Chechkin G.A., Mel'nyk T.A. *Asymptotics of eigenelements to spectral problem in thick cascade junction with concentrated masses*// Appl. Anal. – 2011. – P. 1–41.
12. Golovaty Yu.D., Nazarov S.A., Oleinik O.A. *Asymptotic behavior of eigenvalues and eigen-functions in problems on oscillations of a medium with singular perturbation of the density*// Uspekhi Mat. Nauk. – 1988. – V.43, №5. – P. 189–190 (in Russian). English transl. in Russian Math. Surveys– 1988. – V.43, №5. – P. 229–230.
13. Lobo M., Pérez E. *Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review*// C. R. Mecanique. – 2003. – V.331. – P. 303–317.
14. Golovaty Yu.D., Gomez D., Lobo M., Pérez E. *On vibrating membranes with very heavy thin inclusions*// Math. Models Methods. Appl. Sci. – 2004. – V.14, №7. – P. 987–1034.
15. Melnyk T.A., Nazarov S.A. *Asymptotic analysis of the Neumann problem in a junction of body and heavy spokes*// Algebra i Analiz. – 2000. – V.12, №2. – P. 188–238 (in Russian). English transl. in St. Petersburg Math. J. – 2001. – V.12, №2. – P. 317–351.

16. Melnyk T.A., Nazarov S.A. *The asymptotic structure of the spectrum in the problem of harmonic oscillations of a hub with heavy spokes*// Dokl. Akad. Nauk of Russia. – 1993. – V.333, №1. – P. 13–15. (in Russian). English transl. in Acad. Sci. Dokl. Math. – 1994. – V.48, №3. – P. 428–432.
17. Sandrakov G.V. *Averaging of the system of equations of the theory of elasticity with contrasting coefficients*// Mat. Sb. –1999. – 190, №12. – P. 37–92 (in Russian). English transl. in Sbornik: Mathematics. –1999. – 190, №12. – P. 1749–1806.
18. Babych N., Golovaty Yu.D. *Low and high frequency approximations to eigenvibrations in a medium with double contrasts*// J. Comput. Appl. Math. – 2010. – V.234. – P. 1860–1867.
19. Golovaty Yu.D., Hut V.M. *Vibrating systems with stiff light-weight inclusions: asymptotics of spectrum and eigenspaces*// Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal. – 2012. – V.64, №10. – P. 1315–1330 (in Ukrainian). English transl. in Ukr. Math. J. – 2013. – V.64, №10. – P. 1495–1513.
20. Hut V.M. *Vibrating systems with heavy soft inclusions*// Mat. Stud. – 2012. – V.38, №2. – P. 162–176. (in Ukrainian)
21. Golovaty Yu.D. *On eigenoscillations and eigenfrequencies of a clamped plate with an attached mass*// Uspekhi Mat. Nauk – 1988. – V.43, №5. – P. 185–186 (in Russian). English transl. in Russian Math. Surveys – 1988. – V.43, №5. – P. 227–228.
22. Golovaty Yu.D., Lavrenyuk A.S. *Asymptotic expansions of local eigenvibrations for plate with density perturbed in neighbourhood of one-dimensional manifold*// Mat. Stud. – 2000. – V.13, №1. – P. 51–62.
23. Golovaty Yu.D., Lavrenyuk A.S. *On the asymptotic of eigenvalues for plate with a local perturbation of stiffness coefficient*// Visn. L'viv Univ. Ser. Mekh.-Mat. – 2000. – V.58. – P. 118–128. (in Ukrainian)
24. Lavrenyuk A.S. *A singularly perturbed spectral problem for a biharmonic operator with Neumann conditions*// Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal. – 1999. – V.51, №11. – P. 1467–1475 (in Ukrainian). English transl. in Ukr. Math. J. – 1999. – V.51, №11. – P. 1656–1667.
25. Shaposhnikova T.A. *Homogenization of the boundary-value problem for the biharmonic equation in a domain containing thin canals of small length*// Mat. Sb. – 2001. – 192, №10. – P. 131–160 (in Russian). English transl. in Sbornik: Mathematics. – 2001. – 192, №10. – P. 1553–1585.
26. Kozlov V.A., Nazarov S.A. *The spectrum asymptotics for the Dirichlet problem in the case o f the biharmonic operator in a domain with highly indented boundary*// Algebra i Analiz. – 2010. – V.22, №6. – P. 127–184 (in Russian). English transl. in St. Petersburg Math. J. – 2011. – V.22, №6. – P. 941–983.
27. Andrianov I.V., Danishevs'kyy V.V., Ivankov A.O. Asymptotic Methods in the Theory of Beams and Plates Oscillations, Dnipropetrovs'k: PGASA, 2010. – 216 p. (in Russian)
28. Rektorys K. Variational Methods in Mathematics, Science, and Engineering.: Transl. from English. – M. Mir, 1985. – 590 p.
29. Vishik M.I., Lyusternik L.A. *Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter*// Uspehi Mat. Nauk. – 1957. – V.12, №5. – P. 3–122 (in Russian). English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. – 1962. – V.20, №2. – P. 239–364.
30. Hsiao G.C., Wendland W.L. Boundary integral equations. Appl. Math. Sci. – Berlin: Springer, 2008, V.164. – 618 p.
31. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics, V.1: Functional Analysis. – M. Mir, 1977. (in Russian)
32. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics, V.4: Analysis of Operators. – M. Mir, 1982. (in Russian)
33. Lazutkin V.F. *Semiclassical asymptotics of eigenfunctions*// Ser. Sovrem. Probl. Mat., Fundam. Napravleniya. (Itogi Nauki Tekh.) – M., 1988. – V.34. – P. 135–174 (in Russian). English transl. in Encyclopedia of Math. Sci. – V.34, Partial Differential Equations V, M.V. Fedoryuk (Editor), Springer, New York, 1999, 133 p.

Львівський національний університет імені Івана Франка
yu_holovaty@franko.lviv.ua
v.hut@ukr.net

Надійшло 27.06.2013