

УДК 512.552

В. В. Кириченко, О. В. Зеленський

УНІКАЛЬНІ САГАЙДАКИ

V. V. Kirichenko, A. V. Zelensky. *Unique quivers*, Mat. Stud. **40** (2013), 3–10.

We consider unique admissible quivers, i. e. quivers of Gorenstein exponent matrices. It is proved that admissible quiver with a loop at each vertex is unique if and only if it is a simple cycle, and that there are different from the simple cycles unique quivers with any number of vertices.

В. В. Кириченко, А. В. Зеленский. *Уникальные колчаны* // Мат. Студії. – 2013. – Т.40, №1. – С.3–10.

Рассматриваются уникальные допустимые колчаны, т. е. колчаны горенштейновых матриц показателей. Доказывается, что допустимый колчан с петлей в каждой вершине является уникальным тогда и только тогда, когда он является простым циклом, и что существуют отличные от простых циклов уникальные колчаны с произвольным количеством вершин.

1. Вступ. У статті [1] охарактеризовано сагайдаки матриць показників як підклас простих сильно зв'язних сагайдаків з ваговою функцією, визначеною на стрілках сагайдака. Такі сагайдаки називаються допустимими.

Мета цієї статті — дослідити допустимі сагайдаки, які є сагайдаками тільки горенштейнових матриць показників.

Поняття черепичного порядку ввів І. Капланський. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників, зокрема, сагайдаки таких кілець.

Термін “сагайдак”, введений П. Габріелем в 1972 р. у зв'язку з вивченням зображень скінченновимірних алгебр. Це, в точності, скінченний орієнтований граф, можливо з кратними стрілками і кратними петлями. Петля — це стрілка, початок і кінець якої збігаються.

Відзначимо, що в нашій термінології “черепичний порядок”, — це нетерове з двох сторін первинне напівдосконале та напівдистрибутивне кільце з ненульовим радикалом Джекобсона.

У даній статті ми розглядаємо сагайдаки, які виникають у теорії черепичних порядків. Ці сагайдаки визначаються матрицями показників і відіграють важливу роль при дослідженні властивостей черепичних порядків. Так, наприклад, якщо сагайдак черепичного порядку має петлю хоча б у одній вершині, то такий порядок має нескінченну глобальну розмірність.

2010 *Mathematics Subject Classification*: 05C22, 16H10.

Keywords: exponent matrix; admissible quiver; Gorenstein's matrix.
doi:10.30970/ms.40.1.3-10

Порівняно недавно матриці показників стали окремим об'єктом вивчення. Робота присвячена дослідженню сагайдаків горенштейнових матриць показників.

2. Попередні відомості.

Означення 1. Матриця $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ ($M_n(\mathbb{Z})$ — кільце матриць розмірності n з цілими елементами), для якої виконуються такі умови:

$$1) \alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_i \text{ для всіх } i, j, k \in \{1, \dots, n\};$$

$$2) \alpha_{ii} = 0 \text{ для всіх } i \in \{1, \dots, n\};$$

називається *матрицею показників*.

Матриця показників, для якої виконується умова

$$3) \alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1 \text{ для всіх } i, j \in \{1, \dots, n\} (i \neq j) \text{ називається зведеною матрицею показників.}$$

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників. Введемо матрицю $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij}) = \mathcal{E} + E_n \in M_n(\mathbb{Z})$, де E_n — одинична матриця, та матрицю $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$: $\gamma_{ij} = \min_k \{\beta_{ik} + \beta_{kj}\}$.

Означення 2. Сагайдаком зведеної матриці показників $Q = Q(\mathcal{E})$ називається сагайдак, матриця суміжності якого задається формулою $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$.

Для елементів матриці суміжності сагайдака Q маємо такі формули

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \gamma_{ij} - \beta_{ij} = \min_k (\beta_{ik} + \beta_{kj}) - \beta_{ij} = \min \left(1, \min_{k \neq i, j} (\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \beta_{ij}) \right) = \\ &= \min \left(1, \min_{k \neq i, j} (\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij}) \right). \\ q_{ii} &= \min_k (\beta_{ik} + \beta_{ki}) - \beta_{ii} = \min \left(2, \min_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki}) \right) - 1 = \min \left(1, \min_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1) \right). \end{aligned}$$

Звідси отримуємо, що $q_{ij} = 1$ при $i \neq j$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij}$ для всіх $k \neq i, j$; $q_{ii} = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} > 1$ для всіх $k \neq i$.

Означення 3. Зведені матриці показників $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$ називаються *еквівалентними*, якщо одну можна отримати з іншої за допомогою елементарних перетворень двох типів:

1. відняти ціле число t від елементів i -го рядка та додати це число до елементів i -го стовпчика,
2. поміняти місцями два рядки і поміняти місцями два стовпчика з такими ж номерами.

Означення 4. Сагайдак Q називається *допустимим*, якщо існує зведена матриця показників $\mathcal{E}$ така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$.

Означення 5. Зведена матриця показників називається *горенштейнковою*, якщо існує підстановка σ для множини $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ така, що $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для $i, k \in \{1, \dots, n\}$.

Означення 6. Підстановка σ горенштейнкової матриці називається *підстановкою Кириченка*.

Зауваження 1. Підстановка Кириченка не містить нерухомих елементів.

Якщо припустити, що $\sigma(i) = i$, то з означення горенштейнкової матриці отримуємо $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \alpha_{i\sigma(i)} = 0$, що суперечить зведеності матриці Γ .

Означення 7. Нехай σ — підстановка множини $\{1, 2, \dots, n\}$. Тоді $P_\sigma = \sum_{i=1}^n e_{i\sigma(i)}$ називається *матрицею підстановки*.

Означення 8. Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називається *зв'язним*, якщо визначена функція $\omega: AQ \rightarrow \mathbb{R}$. Функція ω називається ваговою, а її значення на стрілці називається *вагою стрілки*. Сума ваг всіх стрілок шляху називається *вагою шляху*.

Теорема 1 ([1]). Сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ є допустимим тоді і тільки тоді, коли існує вагова функція $\omega: AQ \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\emptyset\}$, яка задовольняє наступні умови:

1. вага стрілки з точки i у точку j менша за вагу шляху довжини $l \geq 2$ з точки i у точку j ;
2. вага петлі в точці i менше за вагу будь-якого циклу довжини $l \geq 2$, що проходить через точку i ;
3. вага будь-якого циклу не менша за 1;
4. вага петлі дорівнює 1;
5. через кожну точку без петлі проходить цикл довжини $l \geq 2$, вага якого дорівнює 1.

Зауваження 2. За умовами 4 та 5, через кожну точку допустимого сагайдака проходить цикл ваги 1.

Означення 9. Простий цикл в сагайдака $Q = (VQ, AQ)$, вага якого дорівнює 1, називатимемо *одиничним*.

Твердження 1 ([2]). В допустимого сагайдака $Q = (VQ, AQ)$, між вершинами одиничного циклу не існує інших стрілок, крім стрілок цього циклу.

Твердження 2 ([2]). Допустимий сагайдак Q не може містити двох стрілок (v_i, v_a) та (v_j, v_a) та не може містити стрілки (v_a, v_i) , (v_a, v_j) , де вершини v_i, v_j належать до одного одиничного циклу.

3. Унікальні сагайдаки.

Означення 10. Допустимий сагайдак, який одержується тільки з Горенштейнових матриць, називається *унікальним*.

З теореми 3.1 ([3]) отримуємо таке твердження.

Твердження 3. Сагайдак, який є одиничним циклом або простим циклом з петлею в кожній вершині, є унікальним.

Твердження 4. Якщо в допустимого сагайдака з кожної вершини виходить тільки одна стрілка, то він простий цикл.

Доведення. З першої вершини виходить тільки одна стрілка. Нехай ця стрілка закінчується у другій вершині. З другої вершини виходить тільки одна стрілка. Якщо ця стрілка закінчується в першій вершині, то ми отримали суперечність, бо з другої вершини не можна потрапити у інші і тому сагайдак не сильнозв'язний.

Нехай стрілка, яка виходить з другої вершини, закінчується у третій. Тоді стрілка, яка починається в третій вершині, не може закінчуватись в першій або другій, бо сагайдак сильнозв'язний. І так далі, продовжимо міркування, поки шлях не замкнеться. Тобто стрілка, яка починається в останній вершині, закінчуватися може тільки в першій. $\square$

Наслідок 1. *Якщо допустимий сагайдак не є простим циклом, то в нього існує вершина, з якої виходить не менше двох стрілок.*

Доведення. Припустимо протилежне, що не існує такої вершини. Оскільки сагайдак сильнозв'язний, то з кожної вершини виходить точно одна стрілка. За твердженням 4 сагайдак є простим циклом. Отримали суперечність. $\square$

Теорема 2. *Допустимий сагайдак з петлею в кожній вершині унікальний тоді і тільки тоді, коли він простим циклом.*

Доведення. Те, що простий цикл з петлею в кожній вершині є унікальним, доведено в [3]. Доведемо, що якщо допустимий сагайдак з петлею в кожній вершині не є простим циклом, то він не є унікальним.

Припустимо протилежне, що $Q = Q(\mathcal{E})$ — унікальний сагайдак з петлею в кожній вершині, який не є простим циклом, де $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — горенштейнова матриця. Визначимо вагову функцію сагайдака Q так: $\omega(\sigma_{ij}) = \alpha_{ij}$. За ваговою функцією ω означимо вагову функцію ω_1

$$\omega_1(\sigma_{ij}) = 10\omega(\sigma_{ij}).$$

Вагова функція ω задовольняє умови теореми 1: вага довільного циклу не менша від двійки та вага шляху більша, ніж вага стрілки. Очевидно, що в сагайдака Q з ваговою функцією ω_1 вага циклу також більша від одиниці. Отже, ω_1 задовольняє умови теореми 1, тобто ω_1 — допустима вагова функція сагайдака Q . Побудуємо за функцією ω_1 сагайдака Q зведену матрицю показників $\mathcal{E}_1 = (\phi_{ij})$. Оскільки ω_1 — допустима вагова функція сагайдака Q , то $Q = Q(\mathcal{E}_1) = Q(\mathcal{E})$. Сагайдак Q — унікальний, тому $\mathcal{E}_1$ — горенштейнова. Нехай σ — підстановка Кириченка для матриці $\mathcal{E}_1$. За наслідком з твердження 4 в сагайдака Q існує вершина, з якої виходить не менше двох стрілок. Нехай це вершина з номером “ i ”, $\sigma_{ij}, \sigma_{ip} \in AQ$. Оскільки $\mathcal{E}_1$ — горенштейнова матриця, то виконується рівність

$$\phi_{ij} + \phi_{j\sigma(i)} = \phi_{i\sigma(i)} \quad \text{для } k \in \{1, \dots, n\}. \quad (1)$$

Це означає, що всі вершини сагайдака розташовані на одному з найлегших шляхів, що йдуть з i в $\sigma(i)$.

Побудуємо вагову функцію ω_2 так: вагова функція ω_2 дорівнює ваговій функції ω_1 , $\omega_2(\sigma_{xy}) = \omega_1(\sigma_{xy})$ для всіх стрілок, крім стрілки σ_{ij} , $\omega_2(\sigma_{ij}) = \omega_1(\sigma_{ij}) - 1$. Оскільки для вагової функції ω вага довільного циклу не менша за 2, то для ω_1 вага циклу не менша за 20, а для ω_2 вага циклу не менша від 19. Умову 1 теореми 1 для вагової функції ω можна записати у вигляді

$$\omega(\sigma_{i_1 i_2}) + \omega(\sigma_{i_2 i_3}) + \dots + \omega(\sigma_{i_{t-1} i_t}) \geq \omega(\sigma_{i_1 i_t}) + 1.$$

Для вагової функції ω_1 ця умова набуває вигляду

$$10\omega(\sigma_{i_1i_2}) + 10\omega(\sigma_{i_2i_3}) + \dots + 10\omega(\sigma_{i_{t-1}i_t}) > 10\omega(\sigma_{i_1i_t}) + 10. \quad (2)$$

Для вагової функції ω_2 умова (2) може набути вигляду

$$10\omega(\sigma_{i_1i_2}) + 10\omega(\sigma_{i_2i_3}) + \dots + 10\omega(\sigma_{i_{t-1}i_t}) \geq 10\omega(\sigma_{i_1i_t}) + 9.$$

Отже, умова 1 теореми 1) для функції ω_2 виконується, ω_2 — допустима вагова функція. За ваговою функцією ω_2 та сагайдаком Q побудуємо матрицю $\mathcal{E}_2 = (\gamma_{ij})$.

З рівності (1) випливає, що

$$\phi_{ij} + \phi_{j\sigma(i)} = \phi_{ip} + \phi_{p\sigma(i)} = \phi_{i\sigma(i)}. \quad (3)$$

Рівність (3) переходить в рівність $\gamma_{ij} + \gamma_{j\sigma(i)} + 1 = \gamma_{ip} + \gamma_{p\sigma(i)} = \gamma_{i\sigma(i)}$. Отже, $\mathcal{E}_2$ — не горенштейнова матриця. Отримали суперечність. $\square$

Теорема 3. Для довільного складеного $n \geq 4$ існують унікальні сагайдаки з n вершинами, які відрізняються від простого циклу.

Доведення. Розглянемо сагайдак Q_4 з матрицею суміжності $[Q_4] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Нехай $Q_4 = (\mathcal{E})$. Доведемо, що $\mathcal{E}$ — горенштейновой матриця. Для цього розглянемо для сагайдака Q_4 допустимі вагові функції.

Вершина 1 не має петлі, тому вона належить до одиничного циклу. Оскільки одиничний цикл не має інших стрілок, крім стрілок самого циклу, то цикли (1234), (123), (134) не одиничні. Тоді одиничним є цикл (13). З подібних міркувань випливає, що через вершину 2 проходить одиничний цикл (24).

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\omega(\sigma_{13}) = 0$, $\omega(\sigma_{31}) = 1$.

(Якщо навпаки $\omega(\sigma_{13}) = 1$, $\omega(\sigma_{31}) = 0$, то виконаємо елементарне перетворення першого типу: від першого рядка матриці $\mathcal{E}$ відніmemo одиницю та до першого стовпця матриці $\mathcal{E}$ додамо одиницю. Після виконання перетворення одержимо $\omega(\sigma_{13}) = 0$, $\omega(\sigma_{31}) = 1$).

Аналогічно, не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\omega(\sigma_{24}) = 0$, $\omega(\sigma_{42}) = 1$.

Оскільки вага стрілки менша, ніж вага шляху, то одержуємо такі нерівності

$$\begin{cases} \omega(\sigma_{13}) + \omega(\sigma_{34}) + \omega(\sigma_{42}) > \omega(\sigma_{12}), \\ \omega(\sigma_{31}) + \omega(\sigma_{12}) + \omega(\sigma_{24}) > \omega(\sigma_{34}), \\ \omega(\sigma_{24}) + \omega(\sigma_{41}) + \omega(\sigma_{13}) > \omega(\sigma_{23}), \\ \omega(\sigma_{42}) + \omega(\sigma_{23}) + \omega(\sigma_{31}) > \omega(\sigma_{41}). \end{cases}$$

Якщо підставити $\omega(\sigma_{13}) = 0$, $\omega(\sigma_{31}) = 1$, $\omega(\sigma_{24}) = 0$, $\omega(\sigma_{42}) = 1$, то одержимо наступну систему нерівностей

$$\begin{cases} \omega(\sigma_{34}) + 1 > \omega(\sigma_{12}), \\ \omega(\sigma_{12}) + 1 > \omega(\sigma_{34}), \\ \omega(\sigma_{41}) > \omega(\sigma_{23}), \\ \omega(\sigma_{23}) + 2 > \omega(\sigma_{41}). \end{cases}$$

З першої та другої нерівності випливає $\omega(\sigma_{34}) = \omega(\sigma_{12})$. З третьої та четвертої нерівності випливає, що $\omega(\sigma_{41}) = \omega(\sigma_{23}) + 1$. Позначимо $x = \omega(\sigma_{12})$, $y = \omega(\sigma_{23})$. Тоді $\omega(\sigma_{34}) = x$, $\omega(\sigma_{41}) = y + 1$.

Оскільки $\omega(\sigma_{12}) + \omega(\sigma_{23}) > \omega(\sigma_{13})$, то $x + y > 0$, тобто $x + y \geq 1$.

Елемент α_{ij} матриці показників $\mathcal{E}$ дорівнює вазі шляху мінімальної ваги з i в j .

Тому матриця показників має вигляд $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & x \\ y+1 & 0 & y & 0 \\ 1 & x+1 & 0 & x \\ y+1 & 1 & y+1 & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, що $\mathcal{E}$ — горенштейнова матриця з підстановкою Кириченка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Отже, сагайдак Q_4 — унікальний.

Нехай сагайдак Q_{2m} заданий матрицею суміжності

$$[Q_{2m}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

або $[Q_{2m}] = P_\sigma + P_{\sigma^2}$, де $\sigma = (1, 2, \dots, 2m)$ — підстановка Кириченка, а P_σ — матриця підстановки. Подібно, як і у попередньому випадку доводиться, що сагайдак Q_{2m} з точністю до ізоморфізму одержується з горенштейнковою матрицею

$$\mathcal{E}_{2m} = \begin{pmatrix} B & A & A & \dots & A & A \\ C & B & A & \dots & A & A \\ C & C & B & \dots & A & A \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C & C & C & \dots & B & A \\ C & C & C & \dots & C & B \end{pmatrix}, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y+1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ y+1 & 1 \end{pmatrix},$$

$x+y \geq 1$. Легко побачити, що $\mathcal{E}_{2m}$ — горенштейнова матриця з підстановкою Кириченка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2m \\ 2m & 1 & 2 & \dots & 2m-1 \end{pmatrix}$.

Отже, для довільного парного n існує унікальний сагайдак з n вершинами, який не є простим циклом. Зауважимо, що для непарного складеного n також існують унікальні сагайдаки, які не є простими циклами.

Нехай Q_9 — сагайдак, заданий матрицею суміжності

$$[Q_9] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо за сагайдаком матрицю показників, з якої він одержується. Міркуємо повністю аналогічно до міркувань з попереднього випадку. Вершина 1 не має петлі, тому вона належить до до одиничного циклу. Оскільки одиничний цикл не має інших стрілок, крім стрілок самого циклу, то вершина 1 належить до одиничного циклу (147). Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\omega(\sigma_{14}) = 0$, $\omega(\sigma_{47}) = 0$, $\omega(\sigma_{71}) = 1$. Подібно одержуємо, що

$$\omega(\sigma_{25}) = 0, \omega(\sigma_{58}) = 0, \omega(\sigma_{82}) = 1, \omega(\sigma_{36}) = 0, \omega(\sigma_{69}) = 0, \omega(\sigma_{93}) = 1.$$

Використовуючи пункт 1 теореми 1, одержуємо систему нерівностей

$$\begin{cases} \omega(\sigma_{14}) + \omega(\sigma_{45}) + \omega(\sigma_{58}) + \omega(\sigma_{82}) > \omega(\sigma_{12}), \\ \omega(\sigma_{14}) + \omega(\sigma_{47}) + \omega(\sigma_{78}) + \omega(\sigma_{82}) > \omega(\sigma_{12}), \\ \omega(\sigma_{47}) + \omega(\sigma_{78}) + \omega(\sigma_{82}) + \omega(\sigma_{25}) > \omega(\sigma_{45}), \\ \omega(\sigma_{47}) + \omega(\sigma_{71}) + \omega(\sigma_{12}) + \omega(\sigma_{25}) > \omega(\sigma_{45}), \\ \omega(\sigma_{71}) + \omega(\sigma_{12}) + \omega(\sigma_{25}) + \omega(\sigma_{58}) > \omega(\sigma_{78}), \\ \omega(\sigma_{71}) + \omega(\sigma_{12}) + \omega(\sigma_{25}) + \omega(\sigma_{58}) > \omega(\sigma_{78}). \end{cases}$$

Підставивши попередні значення вагових функцій, одержимо

$$\begin{cases} \omega(\sigma_{45}) + 1 > \omega(\sigma_{12}), \\ \omega(\sigma_{78}) + 1 > \omega(\sigma_{12}), \\ \omega(\sigma_{78}) + 1 > \omega(\sigma_{45}), \\ \omega(\sigma_{12}) + 1 > \omega(\sigma_{45}), \\ \omega(\sigma_{12}) + 1 > \omega(\sigma_{78}), \\ \omega(\sigma_{12}) + 1 > \omega(\sigma_{78}). \end{cases}$$

Оскільки вагова функція набуває цілих значень, то $\omega(\sigma_{12}) = \omega(\sigma_{45}) = \omega(\sigma_{78})$.

Аналогічно отримуємо, що $\omega(\sigma_{23}) = \omega(\sigma_{56}) = \omega(\sigma_{89})$ і $\omega(\sigma_{34}) = \omega(\sigma_{67}) = \omega(\sigma_{91}) - 1$. Позначимо $x = \omega(\sigma_{12})$, $y = \omega(\sigma_{23})$, $z = \omega(\sigma_{34})$.

За ваговою функцією ω побудуємо зведену матрицю показників $\mathcal{E}_9$

$$\begin{pmatrix} 0 & x & x+y & 0 & x & x+y & 0 & x & x+y \\ y+z+1 & 0 & y & y+z & 0 & y & y+z & 0 & y \\ z+1 & x+z+1 & 0 & z & x+z & 0 & z & x+z & 0 \\ 1 & x+1 & x+y+1 & 0 & x & x+y & 0 & x & x+y \\ y+z+1 & 1 & y+1 & y+z+1 & 0 & y & y+z & 0 & y \\ z+1 & x+z+1 & 1 & z+1 & x+z+1 & 0 & z & x+z & 0 \\ 1 & x+1 & x+y+1 & 1 & x+1 & x+y+1 & 0 & x & x+y \\ y+z+1 & 1 & y+1 & y+z+1 & 1 & y+1 & y+z+1 & 0 & y \\ z+1 & x+z+1 & 1 & z+1 & x+z+1 & 1 & z+1 & x+z+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{або } \mathcal{E}_9 = \begin{pmatrix} B & A & A \\ C & B & A \\ C & C & B \end{pmatrix}, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 0 & x & x+y \\ y+z & 0 & y \\ z & x+z & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & x & x+y \\ y+z+1 & 0 & y \\ z+1 & x+z+1 & 0 \end{pmatrix},$$

$C = \begin{pmatrix} 1 & x+1 & x+y+1 \\ y+z+1 & 1 & y+1 \\ z+1 & x+z+1 & 1 \end{pmatrix}$. Очевидно, що $\mathcal{E}_9$ — горенштейнова матриця з підстановкою Кириченка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 9 \\ 9 & 1 & 2 & \dots & 8 \end{pmatrix}$.

Подібно будується унікальний сагайдак для довільного складеного n (для $n = pk$ будується сагайдак $Q_n = \{VQ, AQ\}$ з множиною вершин $VQ = \{1, 2, \dots, n\}$ і множиною стрілок $\{\sigma_{12}, \sigma_{23}, \dots, \sigma_{n1}, \sigma_{1p+1}, \sigma_{2p+2}, \dots, \sigma_{np}\}$ і як у попередніх випадках доводиться, що Q_n — унікальний). $\square$

4. Висновок. Допустимий сагайдак унікальний, якщо він одержується тільки з горенштейнових матриць. Простий цикл без петель та простий цикл з петлею в кожній вершині — унікальні сагайдаки. Існують інші унікальні сагайдаки з n вершинами, де n — складене число, які відрізняються від простого циклу. Не існує інших унікальних сагайдаків з петлею в кожній вершині, крім простого циклу. Залишається відкритим питання існування унікальних сагайдаків, які відрізняються від простого циклу, у випадку, коли n — просте число.

ЛІТЕРАТУРА

1. Zhuravlev V.N. *Acceptable quivers*// Fundamental and Applied Mathematics. — 2008. — V.14, №7. — P. 121–128. (in Russian)
2. Zhuravlev V.N., Zelensky A.V., Darmosiuk V.M. *Unit quivers of exponent matrices*// Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics. — 2012. — V.4. — P. 27–31. (in Ukrainian)
3. Roggenkamp K.W., Kirichenko V.V., Khibina M.A., Zhuravlev V.N. *Gorenstein tiled orders*// Communication in Algebra. — 2001. — V.29, №9. — P. 4231–4247.
4. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. *Algebras Rings and Modules*. — Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 2004. — 380p.
5. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. *Algebras Rings and Modules*. — Mathematical and Its Applications, Springer, 2007, V.2, 400 p.
6. Kirichenko V.V., Zelenskiy O.V., Zhuravlev V.N. *Exponent matrices and tiled order over discrete valuation rings*// International Journal of Algebra and Computation. — 2005. — V.15, №5,6. — P. 1–16.

Механіко-математичний факультет
Київський національний університет ім. Т. Шевченка
vkir@univ.kiev.ua

Фізико-математичний факультет
Кам'янець-Подільський національний університет ім. І. Огієнка
zelik82@mail.ru

Надійшло 27.06.2013