УДК 517.51

В. К. Маслюченко, О. В. Маслюченко, О. Г. Фотій

ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗНИЗУ НЕПЕРЕРВНИХ ЗВЕРХУ ВІДОБРАЖЕНЬ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ПРЯМІЙ ЗОРҐЕНФРЕЯ

V. K. Maslyuchenko, O. V. Maslyuchenko, O. G. Fotiy. *On a lower continuity of upper continuous mappings with values in the Sorgenfrey line*, Mat. Stud. **40** (2013), 23–29.

We shown that for each lower continuous finite valued mapping from metrizable topological space X in Sorgenfrey line the set of points of upper continuous is residual in X.

В. К. Маслюченко, О. В. Маслюченко, О. Г. Фотий. *О непрерывности снизу непрерывных сверху отображений со значениями в прямой Зоргенфрея* // Мат. Студії. – 2013. – Т.40, №1. – С.23–29.

Показано, что для любого конечнозначного непрерывного сверху отображения метризуемого пространства X в прямую Зоргенфрея множество точек непрерывности снизу является остаточным в X.

1. Вступ. Нагадаємо, що многозначне відображення $F\colon X \to Y$ між топологічними просторами X і Y називається *неперервним зверху /знизу/ в точці* x_0 з X, якщо для кожної відкритої в Y множини V такої, що $F(x_0) \subseteq V$ $/F(x_0) \cap V \neq \varnothing/$ існує такий окіл U точки x_0 в X, що $F(x) \subseteq V/F(x) \cap V \neq \varnothing/$, як тільки $x \in U$. Символом $C^+(F)/C^-(F)/$ ми позначатимемо множину всіх тих точок x з X, в яких відображення F неперервне зверху /знизу/. Відображення F називається *неперервним зверху /знизу/*, якщо $C^+(F) = X$ $/C^-(F) = X/$. Символом $|Z|$ ми будемо позначати потужність множини Z.

Поняття неперервності зверху та знизу тісно пов'язані між собою. А саме, П. Кендеров ([1]) встановив, що у кожного неперервного зверху многозначного відображення $F\colon X \to Y$ топологічного простору X у сепарабельний метризовний простір Y множина $C^-(F)$ залишкова в X. З другого боку, Ґ. Дебс ([2]) показав, що для неперервного знизу компактнозначного відображення F зі значеннями у метризовному просторі Y множина $C^+(F)$ залишкова в X.

У працях [3–7] досліджувалась можливість перенесення результатів Кендерова і Дебса на той випадок, коли простір значень Y неметризовний. Особливо детально вивчалося це питання у випадку, коли Y — це пряма Зорґенфрея $\mathbb{L}$ ([8, с. 47]). Зокрема, в [3] було з'ясовано, що кожне n-значне неперервне знизу відображення $F\colon X \to \mathbb{L}$ зв'язного простору X є сталим, якщо ж $|F(x)| \le n$ на X для деякого номера n і простір X локально зв'язний, то множина $LS(F)$ точок локальної сталості відображення F відкрита і всюди щільна в X, а для скінченнозначного відображення F вона відкрита і залишкова в X. В усіх цих випадках, зрозуміло, що множина $C^+(F)$ залишкова в X,

2010 *Mathematics Subject Classification:* 26E25, 54C60.
Keywords: Sorgenfrey line; upper semicontinuous multi-valued mapping; lower semicontinuous multi-valued mapping.

як і в теоремі Дебса. Разом з тим в [4] був побудований приклад неперервного знизу компактнозначного відображення $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{L}$, у якого $C^+(F) = \varnothing$.

З другого боку, в [5] було показано, що для берівського простору X з другою аксіомою зліченності n-значні неперервні зверху відображення $F\colon X \to \mathbb{L}$ є локально сталими у всіх точках деякої відкритої всюди щільної в X множини. А в [6, 7] іншим способом з'ясовано, що такі відображення будуть сталими, якщо простір X є c-зв'язним, зокрема, лінійно зв'язним. Був також наведений приклад неперервного зверху відображення $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{L}$, у якого $C^-(F) = \varnothing$. В дисертації [9, т. 3.4.9, с. 83] було показано, що для берівського простору X з другою аксіомою зліченності у неперервного зверху відображення $F\colon X \to \mathbb{L}$, у якого $|F(x)| \leq 2$ на X, множина $C^-(F)$ залишкова в X. Залишалася недослідженою поведінка неперервних зверху відображень $F\colon X \to \mathbb{L}$, у яких $|F(x)| \leq n$ на X для деякого номера $n \geq 3$, і скінченнозначних неперервних зверху відображень $F\colon X \to \mathbb{L}$ навіть у випадку $X = \mathbb{R}$.

Тут ми розглядаємо загальний випадок скінченнозначних неперервних зверху відображень F, які діють з метризовного топологічного простору X у пряму Зорґенфрея $\mathbb{L}$. З допомогою нової класифікаційної процедури нам вдалось отримати, що для таких відображень множина точок неперервності знизу $C^-(F)$ залишкова в X. Цей результат був анонсований в [10].

2. σ-гра і точки локальної сталості. Нагадаємо ([11]), що *гра Шоке* $\mathrm{Ch}(X)$ на топологічному просторі X — це така гра двох гравців α та β, які почергово (починає β) вибирають відкриті в X непорожні множини U_n і V_n відповідно так, що $V_{n+1} \subseteq U_n \subseteq V_n$ для довільного $n \in \mathbb{N}$. При цьому гравець α виграє, якщо

$$I = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \varnothing.$$

Якщо $I = \varnothing$, то виграє β. Кажуть, що простір X є *β-несприятливим у грі Шоке* $\mathrm{Ch}(X)$, якщо гравець β не має виграшної стратегії у цій грі. Відомо ([11]), що простір X буде β-несприятливим у грі Шоке тоді і тільки тоді, коли він берівський.

Нам буде потрібна одна модифікація гри Шоке, яка подібна до σ-гри Христенсена ([12]). В ній, як і в грі Шоке, беруть участь два гравці α та β (починає β), причому β ходить відкритими непорожніми в X множинами V_n, а гравець α — парами (U_n, x_n), де U_n — відкрита в X множина і $x_n \in U_n$, причому, як і раніше, $V_{n+1} \subseteq U_n \subseteq V_n$ для кожного номера n. У цій грі α виграє, якщо $I \cap \overline{\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}} \neq \varnothing$, де I визначається вище, інакше виграє β. Цю гру ми позначатимемо символом $\mathrm{Ch}_\sigma(X)$. Будемо говорити, що простір X є *β-несприятливим у грі* $\mathrm{Ch}_\sigma(X)$, якщо β не має виграшної стратегії у цій грі.

Теорема 1. *Нехай X — метризовний берівський простір. Тоді X є β-несприятливим у грі* $\mathrm{Ch}_\sigma(X)$.

Доведення. Нехай це не так, тобто β має виграшну стратегію s у грі $\mathrm{Ch}_\sigma(X)$. Доведемо, що тоді гравець β буде мати виграшну стратегію t і у грі Шоке $\mathrm{Ch}(X)$.

Зафіксуємо деяку метрику d на просторі X, яка породжує його топологію і покладемо $B(x_0, r) = \{x \in X \colon d(x, x_0) < r\}$. Домовимося ходи гравців у грі $\mathrm{Ch}(X)$ позначати U_n, V_n, а у грі $\mathrm{Ch}_\sigma(X)$ — відповідно (U_n^σ, x_n) і V_n^σ. Нехай $t(\varnothing) = V_1 = V_1^\sigma = s(\varnothing)$ — перший хід гравця β і U_1 — відповідь α. Візьмемо $x_1 \in U_1$ і покладемо $U_1^\sigma = U_1 \cap B(x_1, 1)$. Нехай $V_2^\sigma = s(U_1^\sigma, x_1)$ — відповідь β на хід (U_1^σ, x_1) гравця α згідно зі стратегією s.

Визначимо $V_2 = t(U_1) = V_2^\sigma$. Нехай U_2 — деяка відповідь α на хід V_2. Візьмемо $x_2 \in U_2$ і покладемо $U_2^\sigma = U_2 \cap B(x_2, \frac{1}{2})$, $V_3^\sigma = s(U_1^\sigma, x_1; U_2^\sigma, x_2)$ і $V_3 = t(U_1, U_2) = V_3^\sigma$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми визначимо стратегію t гравця β у грі $\mathrm{Ch}(X)$, згідно з якою

$$V_n = t(U_1, \dots, U_{n-1}) = V_n^\sigma = s(U_1^\sigma, x_1; \dots ; U_{n-1}^\sigma, x_{n-1}),$$

де $x_k \in U_k$ і $U_k^\sigma = U_k \cap B(x_k, \frac{1}{k})$ при $k < n$. Доведемо, що t — виграшна стратегія для β у грі $\mathrm{Ch}(X)$. Для цього треба довести, що $I = \bigcap_{n=1}^\infty U_n = \bigcap_{n=1}^\infty V_n = \varnothing$. Нехай це не так, тобто $I \neq \varnothing$. Візьмемо $x \in I$. За побудовою

$$x \in I \subseteq V_{n+1} = V_{n+1}^\sigma \subseteq U_n^\sigma \subseteq B\big(x_n, \tfrac{1}{n}\big),$$

для кожного номера n. Тому $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$, отже, $x_n \to x$. Тоді $x \in I \cap \overline{\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}}$, що неможливо, адже $I \cap \overline{\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}} = \varnothing$, бо β грав згідно зі своєю виграшною стратегією s у грі $\mathrm{Ch}_\sigma(X)$. Таким чином $I = \varnothing$ і t — виграшна стратегія для β у грі $\mathrm{Ch}(X)$.

Ми довели, що простір X буде β-сприятливим у грі Шоке, а тому ([11]) не берівським, що суперечить умові. $\square$

Через $L_{\min}(f)$ /$L_{\max}(f)$/ будемо позначати множину всіх точок локального мінімуму /максимуму/ функції $f \colon X \to \mathbb{R}$.

Ми кажемо, що x_0 — це *точка локальної сталості* функції $f \colon X \to \mathbb{R}$, якщо існує такий окіл U точки x_0 в X, що звуження $f|_U$ стале. Множину всіх точок локальної сталості функції f в X ми позначаємо символом $LS(f)$. Легко перевірити, що множина $LS(f)$ відкрита і $LS(f) = L_{\min}(f) \cap L_{\max}(f)$.

Теорема 2. *Нехай X — β-несприятливий простір у грі $\mathrm{Ch}_\sigma(X)$ і $f \colon X \to \mathbb{R}$ функція, для якої $L_{\min}(f) = X$. Тоді множина $LS(f)$ є відкритою і всюди щільною в X.*

Доведення. Покажемо, що $\overline{L_{\max}(f)} = X$. Міркуватимемо від супротивного. Припустимо, що множина $G = X \setminus \overline{L_{\max}(f)} \neq \varnothing$. Побудуємо стратегію s для гравця β у грі $\mathrm{Ch}_\sigma(X)$. Нехай $V_1 = s(\varnothing) = G$ — перший хід гравця β, а (U_1, x_1) — відповідь гравця α на V_1, причому $x_1 \in U_1 \subseteq V_1$. Оскільки $x_1 \in V_1$, то $x_1 \notin L_{\max}(f)$, тому існує точка $y_1 \in U_1$ така, що $f(y_1) > f(x_1)$. Але $y_1 \in L_{\min}(f)$, тому існує відкритий окіл V_2 точки y_1 такий, що $V_2 \subseteq U_1$ і $f(x) \geq f(y_1)$ для кожного $x \in V_2$. Нехай $V_2 = s(U_1, x_1)$ — другий хід гравця β.

Припустимо, що α уже зробив ходи (U_k, x_k), де $k < n$ для деякого $n \geq 3$. Оскільки $x_{n-1} \in G$, то x_{n-1} не є точкою локального максимуму функції f. Тоді існує точка $y_{n-1} \in U_{n-1}$ така, що $f(y_{n-1}) > f(x_{n-1})$. Але $y_{n-1} \in L_{\min}(f)$. Тому існує відкритий окіл V_n точки y_{n-1} такий, що $f(x) \geq f(y_{n-1})$ при $x \in V_n$. Нехай $V_n = s\big((U_k, x_k)_{k=1}^{n-1}\big)$ — відповідь гравця β за стратегією s на ходи (U_k, x_k), гравця α при $k < n$. Оскільки X — це β-несприятливий простір у грі $\mathrm{Ch}_\sigma(X)$, то s не є виграшною стратегією для гравця β, тобто існує така відповідь (U_n, x_n) гравця α, що гравець β в партії $((U_n, x_n), V_n)_{n=1}^\infty$ програє. Тому існує така точка x у замиканні $A = \overline{\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}}$, що $x \in \bigcap_{n=1}^\infty U_n = \bigcap_{n=1}^\infty V_n$.

Покажемо, що $x \notin L_{\min}(f)$. Нехай U — довільний окіл точки x в X. Оскільки $x \in A$, то існує $m \in \mathbb{N}$ з $x_m \in U$. Зауважимо, що для точок x_n і y_n, що виникали в процесі гри виконуються нерівності

$$f(x_1) < f(y_1) \leq f(x_2) < f(y_2) \leq ... \leq f(x_n) < f(y_n) \leq f(x_{n+1}) < \dots .$$

Але $x \in V_{m+1}$, тому за побудовою $f(x) \geq f(y_m) > f(x_m)$. Отже, $f(x) > f(x_m)$. Це доводить, що x не є точкою локального мінімуму функції f. Але це неможливо, бо за припущенням $L_{\min}(f) = X$. Таким чином, $\overline{L_{\max}(f)} = X$. Але

$$LS(f) = L_{\min}(f) \cap L_{\max}(f) = X \cap L_{\max}(f) = L_{\max}(f).$$

Тому і $\overline{LS(f)} = X$. □

Як відомо, пряма Зорґенфрея $\mathbb{L}$ є β-сприятливою для гри $\mathrm{Ch}_\sigma(\mathbb{L})$, але є α-сприятливою для гри Сан-Ремо ([11]), яка відрізняється від гри $\mathrm{Ch}_\sigma(X)$ відсутністю умови $x_n \in U_n$. Наступний приклад показує, що умову β-несприятливості у грі $\mathrm{Ch}_\sigma(X)$ в попередній теоремі не можна замінити на умову α-сприятливості у грі Сан-Ремо і, тим більше, послабити до беровості.

Приклад. *Для функції $f\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, що діє за правилом $f(x) = x$, виконується рівність $LS(f) = \varnothing$, хоча $L_{\min}(f) = \mathbb{L}$.*

3. Допоміжні твердження. Нам буде потрібний наступний наслідок з теореми Банаха про категорію ([13, с. 87]).

Лема 1. *Нехай X — топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді існує відкрита множина $G \subseteq X$ така, що $G \subseteq \overline{A}$, підпростір $G \cap A$ є берівським і $A \setminus G$ є множиною першої категорії в X.*

Доведення. Розглянемо систему множин

$$\mathcal{U} = \{U\colon U \text{ — відкрита в } X \text{ і } U \cap A \text{ — множина першої категорії в } X\}$$

і покладемо $H = \bigcup \mathcal{U}$. Тоді множина $G = X \setminus \overline{H}$ відкрита. Зрозуміло, що для довільної непорожньої відкритої множини V в G перетин $V \cap A$ непорожній і є множиною другої категорії в X, а значить, і в $G \cap A$. Тому $G \subseteq \overline{A}$ і простір $G \cap A$ — берівський.

З теореми Банаха про категорію випливає, що перетин $H \cap A = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (U \cap A)$ є множиною першої категорії в X, адже такими є всі множини $U \cap A$, де $U \in \mathcal{U}$. Оскільки

$$A \setminus G = A \cap (X \setminus G) = A \cap \overline{H} = (A \cap \mathrm{fr} H) \cup (A \cap H)$$

і множина $\mathrm{fr} H$ ніде не щільна (як межа відкритої множини), то $A \setminus G$ є множиною першої категорії в X. □

Наступний простий результат є розвитком відомої леми Бреккенріджа-Нішіури ([14]).

Лема 2. *Нехай X — топологічний простір, $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ і множини G_n відкриті в X, причому множини $A_n \setminus G_n$ — першої категорії. Тоді множина $G = \bigcup_{n=1}^\infty G_n$ залишкова в X.*

Доведення. Доведення проведемо від супротивного. Нехай $X \setminus G$ — це множина другої категорії в X. Тоді, оскільки множина $\overline{G} \setminus G$ ніде не щільна, то і $H = X \setminus \overline{G}$ — також множина другої категорії. Але $H = \bigcup_{n=1}^\infty (H \cap A_n)$, тому існує номер n такий, що $H \cap A_n$ — множина другої категорії. В такому разі $H \cap G_n \neq \varnothing$, адже якщо $H \cap G_n = \varnothing$, то $H \cap A_n$ буде множиною першої категорії, бо тоді $H \cap A_n \subseteq A_n \setminus G_n$. Таким чином, ми прийшли до суперечності, бо $\varnothing = H \cap G \supseteq H \cap G_n \neq \varnothing$. □

Нарешті встановимо одну цікаву властивість неперервних зверху многозначних відображень.

Лема 3. *Нехай X — топологічний простір, Y — T_1-простір і $F\colon X \to Y$ — неперервне зверху відображення, для якого існують G_δ-множина B в Y і всюди щільна в X множина E такі, що $F(x) = B$ для кожного $x \in E$. Тоді $B \subseteq F(x)$ для кожного $x \in X$ і існує G_δ-множина A така, що $F(x) = B$ для всіх $x \in A$.*

Доведення. Доведемо спочатку, що $B \subseteq F(x)$ для всіх $x \in X$. Нехай це не так. Тоді $B \nsubseteq F(x_0)$ для деякої точки $x_0 \in X$. Отже, існує точка $y_0 \in B \setminus F(x_0)$. Одноточкова множина $\{y_0\}$ замкнена в Y, адже Y є T_1-простором. Тому множина $V = Y \setminus \{y_0\}$ відкрита в Y. Оскільки $y_0 \notin F(x_0)$, то $F(x_0) \subseteq V$. Відображення F неперервне зверху в точці x_0. Тому існує такий окіл U цієї точки, що $F(x) \subseteq V$ для кожного $x \in U$. Множина E — щільна в X. Отже, існує деяка точка $x \in E \cap U$, для якої $B = F(x) \subseteq V$. Таким чином, $y_0 \in B \subseteq V$, що неможливо.

Далі, оскільки B є G_δ-множиною, то вона подається у вигляді зліченного перетину відкритих множин в Y, тобто $B = \bigcap_{n=1}^\infty H_n$, де множини H_n відкриті в Y. Для кожного номера n розглянемо множини $G_n = F^+(H_n) = \{x \in X\colon F(x) \subseteq H_n\}$. Відображення F є неперервним зверху, тому множини G_n відкриті в X. Вони ж будуть всюди щільні в X, бо $E \subseteq G_n$ і $\overline{E} = X$. Покладемо $A = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$. Тоді A — це множина типу G_δ, причому $E \subseteq A$. Візьмемо точку x з A. Тоді $x \in G_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому $F(x) \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty H_n = B$. Крім того, оскільки $B \subseteq F(x)$ для довільного $x \in X$, то $F(x) = B$ для кожного $x \in A$. □

4. Основний результат.

Теорема 3. *Нехай X — метризовний простір, $F\colon X \to \mathbb{L}$ — скінченнозначне неперервне зверху відображення. Тоді множина $C^-(F)$ залишкова в X.*

Доведення. Розглянемо множину Σ всіх можливих скінченних наборів $\sigma = (s_k)_{k=1}^{2m}$ раціональних чисел, довільної парної довжини $2m$, таких, що $s_k < s_{k+1}$ для кожного номера $k < 2m$. Зрозуміло, що Σ — зліченна множина. Для кожного $\sigma \in \Sigma$ покладемо

$$A(\sigma) = \{x \in X\colon (|F(x)| = m) \text{ і } (\forall k = 1, \dots, m)(|F(x) \cap (s_{2k-1}, s_{2k})| = 1)\}.$$

Нехай $\Sigma = \{\sigma_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ — деяка перенумерація множин Σ і $A_n = A(\sigma_n)$. Зрозуміло, що $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. За лемою 1 існують відкриті множини $G_n \subseteq X$ такі, що $G_n \subseteq \overline{A_n}$, простір $G_n \cap A_n$ берівський і множини $A_n \setminus G_n$ першої категорії для кожного $n \in \mathbb{N}$.

За лемою 2 множина $G = \bigcup_{n=1}^\infty G_n$ залишкова в X. Покладемо

$$U_n = G_n \setminus \bigcup_{k<n} \overline{G_k},\ E_n = \overline{G_n} \setminus G_n.$$

Зауважимо, що послідовність множин U_n диз'юнктна і для кожного номера n множини E_n ніде не щільні в X, а значить, $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ є множиною першої категорії. Оскільки

$$U_n = \Big(G_n \setminus \bigcup_{k<n} G_k\Big) \setminus \bigcup_{k<n} E_k,\ G = \bigcup_{n=1}^\infty G_n = \bigcup_{n=1}^\infty \Big(G_n \setminus \bigcup_{k<n} G_k\Big),$$

то
$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} U_n \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(G_n \setminus \bigcup_{k<n} G_k\Big)\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = G \setminus E.$$
Тому множина $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} U_n$ залишкова в X. Оскільки $U_n \subseteq G_n$, то множини $X_n = U_n \cap A_n$ відкриті в $G_n \cap A_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже, X_n є берівським простором для кожного $n \in \mathbb{N}$. Крім того, $U_n \subseteq \overline{X_n}$, бо $U_n \subseteq \overline{A_n}$ і множина U_n відкрита.

Зафіксуємо деякий номер n. Нехай $\sigma_n = (s_1, \ldots, s_{2m})$. Тоді $F(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\}$ для кожного $x \in X_n$, причому
$$s_1 < f_1(x) < s_2 < s_3 < f_2(x) < s_4 < \ldots < s_{2m-1} < f_m(x) < s_{2m}.$$

Доведемо, що для цих відображень $f_k\colon X_n \to \mathbb{R}$, виконується рівність $L_{\min}(f_k) = X_n$, для кожного $k \in \{1, \ldots, m\}$. Візьмемо $x_0 \in X_n$. Покладемо $V = \bigcup_{k=1}^{m} [f_k(x_0); s_{2k})$. Очевидно, що множина V відкрита в $\mathbb{L}$ і $F(x_0) \subseteq V$. Відображення F неперервне зверху в точці x_0, тому існує окіл U точки x_0 такий, що $U \subseteq U_n$ і $F(x) \subseteq V$ для кожного $x \in U$. Нехай тепер $x \in U \cap X_n$. Тоді $F(x) = \{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$, причому $s_{2k-1} < f_k(x) < s_{2k}$ для кожного $k \in \{1, \ldots, m\}$. Отже, $f_k(x) \in V \cap (s_{2k-1}, s_{2k}) = [f_k(x_0); s_{2k})$. Таким чином, $f_k(x) \geq f_k(x_0)$ при $x \in U \cap X_n$, отже, $x_0 \in L_{\min}(f_k)$ для кожного $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Простір X_n метризовний і берівський, а отже, за теоремою 1 β-несприятливий у грі $\mathrm{Ch}_\sigma(X)$. За теоремою 2 маємо, що множина $LS(f_k)$ відкрита і всюди щільна в X_n. Але $\bigcap_{k=1}^{m} LS(f_k) = LS(F|_{X_n})$. Оскільки простір X_n берівський, то його підпростір $Y_n = LS(F|_{X_n})$ відкритий і всюди щільний в X_n. Ясно, що звуження $F_n = F|_{Y_n}$ є локально сталим. Тому система $\mathcal{V}_n = \{F_n^{-1}(B)\colon B \in F_n(Y_n)\}$, де $F_n^{-1}(B)$ — повний прообраз елемента B при відображенні $F_n\colon Y_n \to 2^{\mathbb{R}}$, це відкрите диз'юнктне покриття простору Y_n. Оскільки $Y_n \subseteq X_n \subseteq U_n$, то для довільної множини $V \in \mathcal{V}_n$ існує відкрита в U_n множина U_V така, що $U_V \cap Y_n = V$. Для кожного V з $\mathcal{V}_n$ звуження $F|_V$ стале.

Зауважимо, що система множин $\mathcal{U}_n = \{U_V : V \in \mathcal{V}_n\}$ є диз'юнктною, бо множини Y_n є щільними в U_n і система $\mathcal{V}_n$ диз'юнктна. Для $V \in \mathcal{V}_n$ і $U = U_V \in \mathcal{U}_n$ покладемо $E_U = U \cap Y_n = V$. Як зазначено вище, звуження $F|_{E_U}$ стале. Система $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ також диз'юнктна.

Розглянемо відкриту множину $W_n = \bigcup \mathcal{U}_n = \bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} U_V$, яка міститься в U_n. Оскільки $U_V \supseteq V$, для кожного $V \in \mathcal{V}_n$ і $\mathcal{V}_n$ — покриття Y_n, то
$$W_n \supseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} V = Y_n.$$

Але множина Y_n щільна в U_n, тому і W_n щільна в U_n. Оскільки W_n відкрита, то $U_n \setminus W_n$ ніде не щільна в X. Тому множина
$$W = \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \setminus W_n)\right)$$
є залишковою в X, адже об'єднання $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ залишкове в X, а об'єднання $\bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n \setminus W_n)$ є множиною першої категорії в X.

Таким чином, ми побудували таку диз'юнктну систему $\mathcal{U}$ відкритих множин U в X, що для довільного $U \in \mathcal{U}$ існує множина $E_U \subseteq U$ така, що E_U щільна в U і звуження $F|_{E_U}$ стале, причому $W = \bigcup \mathcal{U}$ залишкова в X. Зафіксуємо $U \in \mathcal{U}$. Візьмемо таку скінченну множину B_U, що $F(x) = B_U$ при $x \in E_U$. Застосувавши лему 3 до звуження $F|_U$ побудуємо таку щільну в U множину A типу G_δ, що $A_U \subseteq U$ і $F(x) = B_U$ для кожного $x \in A_U$ і $B_U \subseteq F(x)$ для кожного $x \in U$. Тоді $U \setminus A_U$ є множиною першої категорії. Покладемо $A = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} A_U$. За теоремою Банаха про категорію множина A буде залишковою в W, а значить, і в X.

Доведемо, що множина $A \subseteq C^-(F)$. Візьмемо точку $a \in A$ і відкриту в $\mathbb{L}$ множину O таку, що $O \cap F(a) \neq \varnothing$. Оскільки $a \in A$, то існує елемент $U \in \mathcal{U}$ такий, що $a \in A_U$. Множина U відкрита і $a \in U$, тому U є околом точки a в X. Крім того, $F(a) = B_U$ і $B_U \subseteq F(x)$ для кожного $x \in U$. Отже, для кожного $x \in U$ перетин $F(x) \cap O \neq \varnothing$, бо

$$\varnothing \neq F(a) \cap O = B_U \cap O \subseteq F(x) \cap O.$$

Таким чином, $a \in C^-(F)$. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Kenderov P.S. *Multivalued mapping and its properties like to continuity*// Uspekhi mat. nauk. – 1980. – V.35, №3. – P. 194–196. (in Russian)
2. Debs G. *Points de continuité d'une function séparément continue*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – V.97, №1. – P. 167–176.
3. Kozhukar O.G., Maslyuchenko V.K. *Around Debs theorem on multivalued mappings*// Nauk. visn. Chernivetskoho un-tu. Matematyka. – 2004. – V.191–192. – P. 61–66. (in Ukrainian)
4. Maslyuchenko V.K., Fotiy O.G. *Lower semi-continuous maspping with compact-values in the Sorgenfrey line*// Mat. Stud. – 2005. – V.24, №2. – P. 203–206. (in Ukrainian)
5. Maslyuchenko V.K., Fotiy O.G. *Upper continuous mapping into the Sorgenfrey line*// Nauk. visn. Chernivetskoho un-tu. Matematyka. – 2005. – V.269. – P. 68–72. (in Ukrainian)
6. Maslyuchenko V.K., Fotiy O.G. *Stbility of upper continuous two-valued mapping into the Sorgenfrey line*// Ukr. mat. zhurn. – 2007. – V.59, №8. – P. 1034–1039. (in Ukrainian)
7. Maslyuchenko V.K., Maslyuchenko O.V., Fotiy O.G. *Space of n-point sets and n-valued mappings*// Dopovidi NAN Ukrajiny. – 2006. – V.10. – P. 24–27. (in Ukrainian)
8. Engelking R. General topology. – M.: Mir, 1986, 752 p. (in Russian)
9. Fotiy O.G. Conection betveen different types of continuity of multivalued mappings: Dys...kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.01. – Chernivtsi, 2007, 122 p.
10. Maslyuchenko V.K., Maslyuchenko O.V., Fotiy O.G. *Finite-valued upper continuous with values in the Sorgenfrey line*// Vseukr. nauk. konf. "Suchasni problemy teoriji jmovirnostej ta matematychnoho analizu." Tezy dopovidej. 2011, Vorokhta. – Ivano-Frankivsk: Prykarp. nats. un-t. im. V. Stefanyka. – P. 54–55. (in Ukrainian)
11. Saint Raymond J. *Jeux topologiques et espace de Namioka*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – V.87, №3. – P. 499–504.
12. Christensen J.P. *Joint continuity of separately continuous function*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – V.82, №3. – P. 455–461.
13. Kuratovsky K. Topology, V.1. – Moskow: Mir, 1966. – 596 p. (in Russian)
14. Breckenridge J.C., Nishiura T. *Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces*// Bull. Inst. Acad. Sinica. – 1976. – V.4, №2. – P. 191–203.

Чернівецький національний університет
vmaslyuchenko@ukr.net
ofotiy@ukr.net
Буковинський державний фінансово-економічний університет
ovmasl@gmail.com

Надійшло 25.06.2013