УДК 517.51

В. В. Михайлюк, О. В. Собчук, О. Г. Фотій

ДІАГОНАЛІ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ МНОГОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

V. V. Mykhaylyuk, O. V. Sobchuk, O. G. Fotiy. *Diagonals of separately continuous multi-valued mappings*, Mat. Stud. **39** (2013), 93–98.

We solve the problem on a construction of a separately continuous mapping with the given diagonal, which is the pointwise limit of a sequence of continuous mappings with values in an equiconnected space. We construct an example of a closed-valued separately continuous mapping $f\colon [0,1]^2 \multimap \mathbb{R}$ with an everywhere discontinuous diagonal. The example shows that the results on points of joint continuity for compact-valued separately continuous mappings can not be generalized to the case of closed-valued mappings.

В. В. Михайлюк, А. В. Собчук, Е. Г. Фотий. *Диагонали раздельно непрерывных многозначных отображений* // Мат. Студії. – 2013. – Т.39, №1. – С.93–98.

Решается задача о построении раздельно непрерывных отображений с заданной диагональю, которая представляется в виде поточечного предела непрерывных отбражений со значениями в равномерно связном пространстве. Построен пример замкнутозначного раздельно непрерывного отображения $f\colon [0,1]^2 \multimap \mathbb{R}$ со всюду разрывной диагональю. Этот пример показывает, что результаты о множестве совокупной непрерывности компактнозначных раздельно непрерывных отображений не обобщаются на случай замкнутозначных отображений.

1. Вступ. Для відображення $f\colon X^2 \to Y$ функцію $g\colon X \to Y$, $g(x) = f(x,x)$, називатимемо *діагоналлю відображення* f.

Задача про побудову нарізно неперервної функції $f\colon X^2 \to \mathbb{R}$ з даною діагоналлю вперше була розв'язана Р. Бером ([1]) для випадку $X = \mathbb{R}$. Він показав, що діагоналі нарізно неперервних функцій двох дійсних змінних є, в точності, функціями першого класу Бера, тобто поточковими границями неперервних функцій. Цей результат узагальнювався багатьма математиками, як у напрямку берівської класифікації нарізно неперервних відображень $f\colon X \times Y \to Z$, так і в напрямку побудови нарізно неперервних відображень $f\colon X^2 \to Z$ з даною діагоналлю першого класу Бера (див. [3] і вказану там літературу). Найзагальніший результат про побудову нарізно неперервної функції з даною діагоналлю був одержаний в [3, наслідок 3.2], де було показано, що для довільних топологічного простору X, метризовного рівномірно зв'язного простору Z і функції першого класу Бера $g\colon X \to Z$ існує нарізно неперервна функція $f\colon X^2 \to Z$ з діагоналлю g. У зв'язку з цим природно виникає питання про те, наскільки можна послабити умову рівномірної зв'язності простору Z, зокрема, чи можна узагальнити цей

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C08.
Keywords: separately continuous mapping, multi-valued mapping, diagonal of mapping.

результат на випадок, коли діагональ g є поточковою границею неперервних функцій зі значеннями у рівномірно зв'язному підпросторі Z_1 простору Z?

З іншого боку, в теорії нарізно неперервних відображень природно виникають питання про можливість перенесення тих чи інших результатів на випадок многозначних відображень. Для компактнозначних відображень зі значеннями у метризовному просторі таке перенесення є доволі простим, адже топологія Віторіса на просторі непорожніх компактних підмножин метричного простору породжується метрикою Гаусдорфа ([5, с. 62]). Сукупна неперервність нарізно неперервних замкненозначних відображень $f\colon X \times Y \multimap \mathbb{R}$ вивчалась в [4], де було доведено аналог теореми Кальбрі-Труалліка ([2]) про множину точок сукупної неперервності на горизонталях. А саме, було показано, що для топологічного простору X, T_1-простору Y, точки $y_0 \in Y$, яка має зліченну базу околів, метризовного локально компактного σ-компактного простору Z і нарізно неперервного замкненозначного відображення $f\colon X \times Y \multimap Z$ існує залишкова множина $A \subseteq X$ така, що f неперервне за сукупністю змінних в кожній точці множини $A \times \{y_0\}$. Залишалося нез'ясованим, чи переноситься на замкненозначні відображення результат Кальбрі-Труалліка про множину вертикальних прямих, які повністю лежать у множині точок сукупної неперервності. Зокрема, залишалося без відповіді таке питання

Питання 1. *Нехай $f\colon [0,1]^2 \multimap \mathbb{R}$ — замкненозначне нарізно неперервне відображення.*

а) *Чи існує залишкова множина $A \subseteq [0,1]$ така, що f сукупно неперервне в кожній точці множини $A \times [0,1]$?*

б) *Чи для кожної неперервної функції $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ існує залишкова множина $A \subseteq [0,1]$ така, що f сукупно неперервне в кожній точці множини $\{(x,\varphi(x))\colon x \in A\}$?*

В даній статті ми спочатку узагальнимо результат з [3] про побудову нарізно неперервних функцій з даною діагоналлю. Далі, використовуючи цей факт, ми дамо негативну відповідь на обидві частини питання 1, побудувавши нарізно неперервне замкненозначне відображення $f\colon [0,1]^2 \multimap \mathbb{R}$ зі скрізь розривною діагоналлю. Крім того, ми наведемо приклади, які вказують на істотність деяких умов в одержаних результатах.

2. Діагоналі нарізно неперервних відображень зі значеннями у рівномірно зв'язних просторах. Нехай X — топологічний простір і $\Delta = \{(x,x)\colon x \in X\}$. Множину $A \subseteq X$ називатимемо *рівномірно зв'язною в* X, якщо існує неперервне відображення $\lambda\colon ((A \times A) \cup \Delta) \times [0,1] \to X$, яке задовольняє такі умови

i) $\lambda(A \times A \times [0,1]) \subseteq A$;

ii) $\lambda(x,y,0) = \lambda(y,x,1) = x$ для довільних $x, y \in A$;

iii) $\lambda(x,x,t) = x$ для довільних $x \in X$ і $t \in [0,1]$.

Рівномірно зв'язні простори — це топологічні простори, рівномірно зв'язні в собі.

Наступний результат узагальнює теорему 3.1 з [3].

Теорема 1. *Нехай X — топологічний простір, Z — гаусдорфовий простір, (Z_1, λ) — рівномірно зв'язний підпростір простору Z, $g\colon X \to Z$, $(G_n)_{n=0}^{\infty}$ і $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ — послідовності функціонально відкритих в X^2 множин G_n і функціонально замкнених в X^2 множин F_n відповідно, $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність нарізно неперервних функцій $\varphi_n\colon X^2 \to [0,1]$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність неперервних відображень $g_n\colon X \to Z_1$, які задовольняють наступні умови:*

(1) $G_0 = F_0 = X^2$ і $\Delta = \{(x,x)\colon x \in X\} \subseteq G_{n+1} \subseteq F_n \subseteq G_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$;

(2) $X^2 \setminus G_n \subseteq \varphi_n^{-1}(0)$ *і* $F_n \subseteq \varphi_n^{-1}(1)$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$*;*

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(g_n(x_n), g_{n+1}(x_n), t_n) = g(x)$ *для кожного* $x \in X$ *і довільних послідовності* $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ *точок* $t_n \in [0,1]$ *і послідовності* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *точок* $x_n \in X$ *таких, що* $(x_n, x) \in F_{n-1}$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$.

Тоді відображення $f\colon X^2 \to Y$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda(g_n(x), g_{n+1}(x), \varphi_n(x,y)), & (x,y) \in F_{n-1} \setminus F_n; \\ g(x), & (x,y) \in E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n. \end{cases} \tag{1}$$

є нарізно неперервним.

Доведення. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ і покажемо, що

$$f(x,y) = \lambda(\lambda(g_n(x), g_{n+1}(x), \varphi_n(x,y)), g_{n+2}(x), \varphi_{n+1}(x,y)) \tag{2}$$

для всіх $(x,y) \in F_{n-1} \setminus F_{n+1}$.

Нехай $(x,y) \in F_{n-1} \setminus F_n$. Оскільки $G_{n+1} \subseteq F_n$, то $(x,y) \notin G_{n+1}$ і згідно з (2), $\varphi_{n+1}(x,y) = 0$. Тому

$$\lambda(\lambda(g_n(x), g_{n+1}(x), \varphi_n(x,y)), g_{n+2}(x), \varphi_{n+1}(x,y)) = \lambda(g_n(x), g_{n+1}(x), \varphi_n(x,y)) = f(x,y).$$

Тепер нехай $(x,y) \in F_n \setminus F_{n+1}$. Тоді згідно з (2), $\varphi_n(x,y) = 1$ і

$$\lambda(\lambda(g_n(x), g_{n+1}(x), \varphi_n(x,y)), g_{n+2}(x), \varphi_{n+1}(x,y)) = \lambda(g_{n+1}(x), g_{n+2}(x), \varphi_{n+1}(x,y)) = f(x,y).$$

Використовуючи неперервність відображень λ, g_n, g_{n+1}, g_{n+2}, φ_n і φ_{n+1}, одержимо, що f неперервне на відкритій множині $G_n \setminus F_{n+1}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, як композиція неперервних відображень. Крім того, як композиція неперервних відображень, f неперервне на відкритій множині $G_0 \setminus F_1 = F_0 \setminus F_1$. Тому f неперервне на відкритій множині $X^2 \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(G_{n-1} \setminus F_n)$.

Залишилось перевірити неперервність відображення f відносно змінних x і y в точках множини E. Зауважимо спочатку, що $g(x) = g(y)$ для довільної точки $(x,y) \in E$. Справді, з умови (3) випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$. Крім того, оскільки $(x,y) \in F_{n-1}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то з умови (4) випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(y)$. Рівність $g(x) = g(y)$ випливає з гаусдорфовості простору Z.

Тепер неперервність відносно кожної змінної, зокрема, відображення f в точках множини E випливає з умови (3). □

Наслідок 1. *Нехай* X *— топологічний простір,* Z *— метризовний простір,* (Z_1, λ) *— рівномірно зв'язна в* Z *підмножина простору* Z*, і* $g\colon X \to Z$*, причому існує послідовність неперервних відображень* $g_n\colon X \to Z_1$*, яка поточково на* X *збігається до відображення* g*. Тоді існує нарізно неперервне відображення* $f\colon X^2 \to Z$ *з діагоналлю* g*.*

Доведення. Зафіксуємо деяку метрику d на просторі Z, яка породжує його топологічну структуру. Покладемо $G_0 = F_0 = X^2$ і

$$G_n = \Big\{(x,y) \in X^2 \colon d(g_k(x), g_k(y)) < \frac{1}{n},\ k \in \{1, \dots, n+1\}\Big\},$$
$$F_n = \Big\{(x,y) \in X^2 \colon d(g_k(x), g_k(y)) \le \frac{1}{n+1},\ k \in \{1, \dots, n+2\}\Big\}$$

для $n \geq 1$. Усі множини G_n — функціонально відкриті, а F_n — функціонально замкнені. Тому для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує неперервна функція $\varphi_n \colon X^2 \to [0,1]$ з $\varphi_n^{-1}(0) = X^2 \setminus G_n$ і $\varphi_n^{-1}(1) = F_n$. З неперервності функції $\lambda \colon ((Z_1 \times Z_1) \cup \Delta) \times [0,1] \to Z$ у всіх точках діагоналі $\Delta = \{(z,z) \colon z \in Z\}$ випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(z_n, z_{n+1}, t_n) = z$ для довільної збіжної до $z \in Z$ послідовності $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $z_n \in Z_1$ і довільної послідовності $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $t_n \in [0,1]$.

Тепер з допомогою теореми 1 одержимо нарізно неперервне відображення f з діагоналлю g. □

3. Побудова нарізно неперервних многозначних відображень зі скрізь розривною діагоналлю. Для топологічного простору Y через $\mathcal{F}(Y)$ ми позначатимемо простір всіх непорожніх замкнених підмножин простору Y з топологією Віторіса. Многозначне відображення $f \colon X \to \mathcal{F}(Y)$ позначається також $f \colon X \multimap Y$.

Нехай X, Y — топологічні простори. Многозначне відображення $f \colon X \multimap Y$ називається *неперервним зверху (знизу) в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної відкритої в Y множини V такої, що $f(x_0) \subseteq V$ $(f(x_0) \cap V \neq \varnothing)$ існує окіл U точки x_0 в X такий, що для кожного $x \in U$ виконується умова $f(x) \subseteq V$ $(f(x) \cap V \neq \varnothing)$. Многозначне відображення f неперервне і зверху і знизу в точці x_0 називається *неперервним в точці* x_0.

Сім'я $(A_s)_{s\in S}$ підмножин A_s топологічного простору X називається *дискретною*, якщо для кожного $x \in X$ існує окіл U точки x такий, що множина $\{s \in S \colon A_s \cap U \neq \varnothing\}$ містить не більше одного елемента.

Теорема 2. *Нехай Y — топологічний простір, у якому існує дискретна послідовність $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ підпросторів Y_n, гомеоморфних відрізку $[0,1]$. Тоді існує нарізно неперервне замкненозначне відображення $f \colon \mathbb{R}^2 \multimap Y$, діагональ якого є скрізь розривною.*

Доведення. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через φ_n деякий гомеоморфізм $\varphi_n \colon [0,1] \to Y_n$. Позначимо через Z простір $\mathcal{F}(Y)$, а через Z_1 — підпростір простору Z, який складається з усіх множин вигляду $\varphi_1([0,a_1]) \cup \dots \cup \varphi_n([0,a_n]) \cup \bigcup_{k>n}\{\varphi_k(0)\}$, де $n \in \mathbb{N}$ і $a_1, \dots, a_n \in [0,1]$. Розглянемо функцію $\lambda \colon Z_1^2 \times [0,1] \to Z_1$, яка означається так

$$\lambda(u,v,t) = \varphi_1([0,(1-t)a_1 + tb_1]) \cup \dots \cup \varphi_n([0,(1-t)a_n + tb_n]) \cup \bigcup_{k>n}\{\varphi_k(0)\},$$

де $u = \varphi_1([0,a_1]) \cup \dots \cup \varphi_n([0,a_n]) \cup \bigcup\limits_{k>n}\{\varphi_k(0)\}$, $v = \varphi_1([0,b_1]) \cup \dots \cup \varphi_n([0,b_n]) \cup \bigcup\limits_{k>n}\{\varphi_k(0)\} \in Z_1$ і $t \in [0,1]$. Легко бачити, що відображення λ — неперервне, тобто простір (Z_1, λ) рівномірно зв'язний.

Для зручності запису надалі замість числової прямої $\mathbb{R}$ ми розглядатимемо гомеоморфний їй інтервал $X = (0,1)$. Розглянемо замкненозначне відображення $g \colon (0,1) \multimap Y$, яке означається формулою $g(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n([0,x])$. Покажемо, що відображення g скрізь розривне, а саме, g не є неперервним зверху в жодній точці $x \in (0,1)$. Зафіксуємо точку $x_0 \in (0,1)$. Множина $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n([0, x_0 + \frac{1}{n}) \cap [0,1])$ є відкритою в просторі $g((0,1))$ і $g(x_0) \subseteq U$. Але множина $\{x \in (0,1) \colon g(x) \subseteq U\} = (0, x_0]$ не є околом точки x_0, тобто відображення g не є неперервним зверху в точці x_0.

Покладемо $G_0 = F_0 = X^2$, $G_n = \{(x,y) \in X^2 \colon |x-y| < \frac{1}{n+2}\}$ і $F_n = \{(x,y) \in X^2 \colon |x-y| \leq \frac{1}{n+3}\}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Крім того, для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо неперервне замкненозначне відображення $g_n \colon X \multimap Y$,

$$g_n(x) = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\varphi_n(0)\}, & x \in (0, \frac{1}{n+1}]; \\ \bigcup_{k=1}^{n} \varphi_k([0, x - \frac{1}{n+1}]) \cup \bigcup_{k>n}\{\varphi_k(0)\}, & x \in (\frac{1}{n+1}, 1). \end{cases}$$

Зауважимо, що $g_n(X) \subseteq Z_1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $g_n(x) \subseteq g(y)$ для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $x, y \in X$ з $(x, y) \in F_{n-1}$, то послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ задовольняє умову (3) теореми 1. Залишилось використати теорему 1. □

Зауваження 1. Аналогічно доводиться теорема для випадку $X = [0, 1]$. При цьому достатньо розглянути відображення $g\colon X \multimap Y$,

$$g(x) = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n([0, x]), & x \in [0, 1); \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n(0)\}, & x = 1, \end{cases}$$

і відповідним чином підправлену послідовність неперервних відображень $g_n\colon X \multimap Y$,

$$g_n(x) = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n(0)\}, & x \in (0, \frac{1}{n+1}] \cup [\frac{n}{n+1}, 1]; \\ \bigcup_{k=1}^{n} \varphi_k([0, x - \frac{1}{n+1}]) \cup \bigcup_{k>n} \{\varphi_k(0)\}, & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{n^2+1}{(n+1)^2}); \\ \bigcup_{k=1}^{n} \varphi_k([0, -nx + \frac{n^2}{n+1}]) \cup \bigcup_{k>n} \{\varphi_k(0)\}, & x \in [\frac{n^2+1}{(n+1)^2}, \frac{n}{n+1}). \end{cases}$$

Наступний наслідок дає негативну відповідь на питання 1.

Наслідок 2. Існує замкненозначне нарізно неперервне відображення $f\colon [0, 1]^2 \multimap \mathbb{R}$ зі скрізь розривною діагоналлю.

4. Приклади. Наступний приклад вказує на те, що у наслідку 1 умову рівномірної зв'язності в Z множини (Z_1, λ) не можна послабити до умови рівномірної зв'язності підпростору (Z_1, λ).

Твердження 1. *Існують метризовний простір Z, рівномірно зв'язний підпростір Z_1 простору Z і функція $g\colon [0, 1] \to Z$ першого класу Бера такі, що виконуються наступні умови:*

(1) існує послідовність неперервних функцій $g_n\colon [0, 1] \to Z_1$, яка поточково на $[0, 1]$ збігається до відображення g;

(2) функція g не є діагоналлю жодної нарізно неперервної функції $f\colon [0, 1]^2 \to Z$.

Доведення. Покажемо, що простори $Z = \{(0, 1), (0, -1)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, nx)\colon x \in \mathbb{R}\}$, $Z_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, nx)\colon x \in \mathbb{R}\}$ з топологією, індукованою $\mathbb{R}^2$, і функція

$$g(x) = \begin{cases} (0, 1), & x \in [0, \frac{1}{2}); \\ (0, -1), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

— шукані. Легко бачити, що Z_1 рівномірно зв'язний. Для доведення (1) достатньо розглянути послідовність функцій

$$g_n(x) = \begin{cases} (\frac{1}{n}, 1), & x \in [0, \frac{n-1}{2n}]; \\ (-4x + \frac{2n-1}{n}, -4nx + 2n - 1), & x \in (\frac{n-1}{2n}, \frac{1}{2}]; \\ (-\frac{1}{n}, -1), & x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Залишилось перевірити (2).

Припустимо, що існує нарізно неперервна функція $f\colon [0, 1]^2 \to Z$ з діагоналлю g. Оскільки для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина $\{(x, nx)\colon x \in \mathbb{R}\} \setminus \{(0, 0)\}$ є відкрито-замкненою в $Z \setminus \{(0, 0)\}$, то множини $\{(0, 1)\}$ і $\{(0, -1)\}$ є компонентами зв'язності в просторі $Z \setminus \{(0, 0)\}$. Звідси випливає, що кожна зв'язна множина, яка містить хоча б одну з точок $(0, 1)$ і $(0, -1)$, або одноточкова або містить точку $(0, 0)$. Тому функція f вертикально і горизонтально стала, а отже, є сталою, що приводить до суперечності. □

У зв'язку з теоремою 2 і наслідком 2 природно виникає питання про те, чи для кожного відображення першого класу Бера $g\colon [0,1] \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ існує нарізно неперервне замкненозначне відображення $f\colon [0,1]^2 \multimap \mathbb{R}$ з діагоналлю g? Наступний приклад показує, що відповідь на це питання — негативна.

Твердження 2. *Існує замкненозначне відображення $g\colon [0,1] \multimap \mathbb{R}$ першого класу Бера таке, що g не є діагоналлю для жодного нарізно неперервного замкненозначного відображення $f\colon [0,1]^2 \multimap \mathbb{R}$.*

Доведення. Розглянемо замкненозначне відображення $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x+n\}$. Зауважимо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ замкненозначне відображення $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \bigcup_{k=1}^{n}\{x+n\}$, є неперервним. Крім того, $g_n \to g$ поточково на X. Тому відображення g першого класу Бера.

Припустимо, що існує нарізно неперервне замкнезначне відображення $f\colon [0,1]^2 \multimap \mathbb{R}$ таке, що $f(x,x) = g(x)$ для кожного $x \in X$. Згідно з твердженням 3.3 з [4] для кожного $x \in [0,1]$ існує такий номер $n_x \in \mathbb{N}$, що $(f(x,y) \cup f(y,x)) \cap ((-\infty, -n_x) \cup (n_x, +\infty)) \subseteq g(x)$ для кожного $y \in [0,1]$ з $|x-y| < \frac{1}{n_x}$. Виберемо $n \in \mathbb{N}$, відкриту непорожню множину $U \subseteq [0,1]$ і щільну в U множину A такі, що $n_x \le n$ для кожного $x \in A$. Без обмеження загальності можна вважати, що $\mathrm{diam}(U) < \frac{1}{n}$. Тоді $f(x,y) \cap ((-\infty, -n_x) \cup (n_x, +\infty)) \subseteq g(x) \cap g(y)$ для довільних $x, y \in A$. Оскільки $g(x) \cap g(y) = \varnothing$ для довільних різних $x, y \in [0,1]$, то $f(x,y) \subseteq [-n,n]$ для довільних $x, y \in A$. Тепер з нарізної неперервності знизу відображення f і щільності множини A в U випливає, що $f(x,y) \subseteq [-n,n]$ для довільних $x, y \in U$. А це суперечить тому, що g є діагоналлю відображення f. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Baire R. *Sur les fonctions de variables reélles*// Ann. Mat. Pura Appl., ser.3. – 1899. – V.3. – P. 1–123.
2. Calbrix J., Troallic J.P. *Aplications separement continues*// C.R. Acad. Sc. Paris. Sec. A. – 1979. – V.288. – P. 647–648.
3. Karlova O., Mykhaylyuk V.V., Sobchuk O.V. *Diagonals of separately continuous functions and their analogs*// Topology Appl. – 2013. – V.160. – P. 1–8.
4. Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Fotiy O.G. *The relations between separately and jointly proprities of multi-valued mappings*// Mat. Stud. – 2011. – V.35, №1. – P. 106–112.
5. Shouchan Hu., Papageorgion N. Handbook of Multivalued Analysis. Theory. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publ. 1997. – 964 p.

Чернівецький національний університет,
факультет прикладної математики
vmykhaylyuk@ukr.net, ss220367@ukr.net
ofotiy@ukr.net

Надійшло 19.09.2012