УДК 517.956

Р. В. Андрусяк, Н. О. Бурдейна, В. М. Кирилич

ЗАДАЧА ПРО СПРЯЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ВЗДОВЖ НЕВІДОМОЇ КОНТАКТНОЇ МЕЖІ В СЕКТОРІ

R. V. Andrusyak, N. O. Burdeyna, V. M. Kyrylych. *The problem on conjugation on solutions of a hyperbolic system along unknown contact boundary in sector*, Mat. Stud. **39** (2013), 74–83.

The conditions of solvability in the generalized sense of a problem with unknown breaking line of initial data for a hyperbolic quasilinear system with two independent variables in the sector were established. Applying the method of characteristics a solution of the problem is reduced to finding the fixed point of the operator whose existence and uniqueness are proved using the Banach theorem.

Р. В. Андрусяк, Н. А. Бурдейна, В. М. Кирилич. *Задача о сопряжении решений гиперболической системы вдоль неизвестной контактной границы в секторе* // Мат. Студії. – 2013. – Т.39, №1. – С.74–83.

Установлены условия разрешимости в обобщенном смысле задачи с неизвестной линией разрыва выходных данных для гиперболической квазилинейной системы с двумя независимыми переменными в секторе. Используя метод характеристик, отыскание решения поставленной задачи сведено к нахождению неподвижной точки оператора, существование и единственность которой доказаны с помощью теоремы Банаха.

1. Вступ. Більшість процесів природознавства та техніки моделюються нелінійними рівняннями з частинними похідним і лише суттєві додаткові обмеження (наприклад про малість амплітуд коливання) приводять до лінійних рівнянь, які достатньо вивчені.

Для гіперболічних систем нелінійних рівнянь проблемними, зазвичай, є як сама постановка задачі, так і встановлення методів її розв'язування, причому складність проявляється вже у випадку однієї просторової змінної, і можна очікувати, що розв'язки багатовимірних рівнянь локально мають, в основному, ті ж властивості, що й розв'язки одновимірних. Дослідження одновимірних гіперболічних рівнянь та систем проводять методом характеристик, який добре працює при вивченні класичних лінійних задач, проте переноситься й на більш загальні постановки задач, зокрема, для нелінійних рівнянь та систем. Зауважимо, що область існування розв'язку таких задач є, взагалі кажучи, локальною, що пов'язано насамперед з необмеженим зростанням розв'язку та його похідної ("градієнтна катастрофа", [1]–[10]).

Задачі для гіперболічних систем зустрічаються в теорії пружності, електромагнетизмі, теплопровідності із використанням узагальненого закону Фур'є, газо- та гідродинаміці, оптиці, фінансовій математиці, оптимальному керуванні, теорії відносності тощо ([1]–[5]). Традиційно такі задачі формулюють у прямокутнику або криволінійній трапеції, зокрема, з рухомими межами. Однак, у газовій динаміці ([1], [2]), є задачі,

2010 *Mathematics Subject Classification:* 32L50.
Keywords: hyperbolic problem, quasi-linear equations, free discontinuity line, method of characteristic.

в яких відрізок задання початкових умов вироджується в точку, тобто областю визначення вихідних даних є сектор. Подібні області виникають в задачах з розривними даними, якщо лінії розриву мають спільні точки ([6], [7]). У проблемах теорії фазових переходів, подібні задачі досліджують в областях з вільною (невідомою) межею ([13]). Задача Стефана про поширення тепла в середовищі із зміною фаз властива не лише для параболічних рівнянь, а й для гіперболічних ([13]–[15]).

У праці розглянуто задачу з нелокальними крайовими умовами та невідомою лінією розриву вихідних даних для гіперболічної системи квазілінійних рівнянь у секторі. Використавши метод характеристик, відшукання узагальненого розв'язку задачі зведено до знаходження нерухомої точки оператора, існування та єдиність якої доведено на основі теореми Банаха, що в деякій мірі повторює методику праці [11]. Подібні задачі про спряження розв'язків гіперболічних систем вздовж невідомих кривих розглядались у роботах [12]–[15].

2. Формулювання задачі. Визначимо області $V_T^{s-} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < t < T,\, -kt < x < s(t)\}$, $V_T^{s+} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < t < T,\, s(t) < x < kt\}$, де $k > 0$ — задана стала, а $s\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ — невідома функція така, що $s(0) = 0$. В області V_T^{s-} розглянемо гіперболічну систему, записану в інваріантах Рімана

$$\frac{\partial u_i^-}{\partial t} + \lambda_i^-(x,t,u^-)\frac{\partial u_i^-}{\partial x} = f_i^-(x,t,u^-), \quad i \in \{1,\dots,n\}, \tag{1}$$

а в області V_T^{s+} — систему

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial t} + \lambda_i^+(x,t,u^+)\frac{\partial u_i^+}{\partial x} = f_i^+(x,t,u^+), \quad i \in \{1,\dots,n\}, \tag{2}$$

де $u^- = (u_1^-,\dots,u_n^-)\colon \overline{V}_T^{s-} \to \mathbb{R}^n$, $u^+ = (u_1^+,\dots,u_n^+)\colon \overline{V}_T^{s+} \to \mathbb{R}^n$ — шукані функції, а λ_i^-, λ_i^+, f_i^-, $f_i^+\colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ — відомі функції. Нехай поведінку функції s описує диференціальне рівняння

$$\frac{ds}{dt} = h(s,t,u^-(s,t),u^+(s,t)), \tag{3}$$

де $h\colon \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}$ — відома функція, а також відомими є значення розв'язків u^-, u^+ в кутовій точці

$$u^-(0,0) = u^+(0,0) = 0. \tag{4}$$

Зауважимо, що ці значення не обов'язково повинні бути нульовими, не виключений і випадок $u^-(0,0) \neq u^+(0,0)$, який заміною шуканих функцій можна звести до вигляду (4). Нехай функції λ_i^-, λ_i^+, h задовольняють умови $\lambda_i^-(\mathbf{0}) \neq -k$, $\lambda_i^+(\mathbf{0}) \neq k$, $\lambda_i^-(\mathbf{0}) \neq h(\mathbf{0})$, $\lambda_i^+(\mathbf{0}) \neq h(\mathbf{0})$. Визначимо підмножини індексів із множини $\{1,\dots,n\}$ так $I_1 = \{i\colon \lambda_i^-(\mathbf{0}) > -k\}$, $I_2 = \{i\colon \lambda_i^+(\mathbf{0}) < k\}$, $I_- = \{i\colon \lambda_i^-(\mathbf{0}) < h(\mathbf{0})\}$, $I_+ = \{i\colon \lambda_i^+(\mathbf{0}) > h(\mathbf{0})\}$, (тут і нище $\mathbf{0}$ позначає вектор з нульовими компонентами, на розмірність якого вказує розмірність області визначення відповідної функції) та доповнимо задачу нелокальними крайовими умовами

$$\begin{aligned} u_i^-(-kt,t) &= \beta_i^1(s(t),t,\hat{u}^-(-kt,t),\hat{u}^+(kt,t),\tilde{u}^-(s(t),t),\tilde{u}^+(s(t),t)), \quad i \in I_1,\\ u_i^+(kt,t) &= \beta_i^2(s(t),t,\hat{u}^-(-kt,t),\hat{u}^+(kt,t),\tilde{u}^-(s(t),t),\tilde{u}^+(s(t),t)), \quad i \in I_2, \end{aligned} \tag{5}$$

а також умовами спряження на контактній межі

$$\begin{aligned} u_i^-(s(t),t) &= \gamma_i^-(s(t),t,\hat{u}^-(-kt,t),\hat{u}^+(kt,t),\tilde{u}^-(s(t),t),\tilde{u}^+(s(t),t)), \quad i \in I_-,\\ u_i^+(s(t),t) &= \gamma_i^+(s(t),t,\hat{u}^-(-kt,t),\hat{u}^+(kt,t),\tilde{u}^-(s(t),t),\tilde{u}^+(s(t),t)), \quad i \in I_+, \end{aligned} \tag{6}$$

де вектор $\hat{u}^-(-kt,t)$ містить компоненти вектора $u^-(-kt,t)$ з індексами із множини $\{1,\dots,n\}\setminus I_1$, подібно вектор $\hat{u}^+(kt,t)$ містить компоненти вектора $u^+(kt,t)$ з індексами із множини $\{1,\dots,n\}\setminus I_2$, вектор $\tilde{u}^-(s(t),t)$ містить компоненти вектора $u^-(s(t),t)$ з індексами із множини $\{1,\dots,n\}\setminus I_-$, а вектор $\tilde{u}^+(s(t),t)$ містить компоненти вектора $u^+(s(t),t)$ з індексами із множини $\{1,\dots,n\}\setminus I_+$, причому β_i^1, β_i^2, γ_i^-, γ_i^+ — відомі функції.

Зауважимо, що замість систем (1), (2) можна розглядати одну систему стосовну набору невідомих $u=(u_1,\dots,u_n)\colon \overline{V}_T^{s-}\cup\overline{V}_T^{s+}\to\mathbb{R}^n$, причому вихідні дані системи мають розрив вздовж невідомої кривої s. Тоді через u^-, u^+ позначити звуження u на ліву та праву частини сектора та подібно визначити функції λ_i^-, λ_i^+, f_i^-, f_i^+, як звуження функцій λ_i, f_i на відповідні множини. В результаті ми зведемо нашу систему до систем (1), (2).

3. Узагальнений розв'язок задачі. Якщо (u^-,s) є відомий набір функцій, а $(x_0,t_0)\in\overline{V}_T^{s-}$, причому $\lambda_i^-(x,t,u^-(x,t))$, як складена функція змінних x,t, є достатньо гладкою у відповідній області, то задача Коші

$$\frac{dx}{dt}=\lambda_i^-(x,t,u^-(x,t)),\ (x,t)\in\overline{V}_T^{s-},\quad x(t_0)=x_0,$$

має єдиний розв'язок, який можна продовжити до межі області V_T^{s-}. Позначимо цей розв'язок через $\varphi_i^-[u^-,s](t;x_0,t_0)$, тут координати (x_0,t_0) є параметрами, а залежність від (u^-,s) є функціональною. Зауважимо, що функція $\varphi_i^-[u^-,s]$ розглядається виключно при $t\le t_0$, тому областю визначення розв'язку є відрізок $\big[\chi_i^-[u^-,s](x_0,t_0),t_0\big]$, де $\chi_i^-[u^-,s](x_0,t_0)=\min\{t\in[0,t_0]\colon \big(\varphi_i^-[u^-,s](t;x_0,t_0),t\big)\in\overline{V}_T^{s-}\}$.

Переписавши i-те рівняння системи (1) у вигляді $\frac{d}{dt}u_i^-(\varphi_i^-[u^-,s](t;x_0,t_0),t)=f_i^-(\varphi_i^-[u^-,s](t;x_0,t_0),t,u^-(\varphi_i^-[u^-,s](t;x_0,t_0),t))$, та проінтегрувавши отримане співвідношення у відповідних межах, виводимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i^-(x,t)=u_i^-\Big(\varphi_i^-[u^-,s](\chi_i^-[u^-,s](x,t);x,t),\chi_i^-[u^-,s](x,t)\Big)+$$
$$+\int_{\chi_i^-[u^-,s](x,t)}^{t} f_i^-\Big(\varphi_i^-[u^-,s](\tau;x,t),\tau,u^-(\varphi_i^-[u^-,s](\tau;x,t),\tau)\Big)d\tau,\ (x,t)\in\overline{V}_T^{s-},\qquad (7)$$

для $i\in\{1,\dots,n\}$. Зазначимо, що системи (1) та (7) є еквівалентні в класі гладких функцій (u^-,s), проте розв'язок останньої системи може бути, взагалі кажучи, не диференційовним.

Міркуючи подібно, одержимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i^+(x,t)=u_i^+\Big(\varphi_i^+[u^+,s](\chi_i^+[u^+,s](x,t);x,t),\chi_i^+[u^+,s](x,t)\Big)+$$
$$+\int_{\chi_i^+[u^+,s](x,t)}^{t} f_i^+\Big(\varphi_i^+[u^+,s](\tau;x,t),\tau,u^+(\varphi_i^+[u^+,s](\tau;x,t),\tau)\Big)d\tau,\ (x,t)\in\overline{V}_T^{s+},\qquad (8)$$

для $i\in\{1,\dots,n\}$, що еквівалентна системі (2) в класі гладких функцій (u^+,s).

Означення 1. *Локальним узагальненим ров'язком задачі* (1)–(6) будемо називати набір функцій $(u^-,u^+,s)\in\Big[\mathrm{Lip}(\overline{V}_{T_0}^{s-})\Big]^n\times\Big[\mathrm{Lip}(\overline{V}_{T_0}^{s+})\Big]^n\times C^1[0,T_0]$, $0<T_0\le T$, що поточково задовольняє систему (3), (7), (8), а також умови (4)–(6).

Зауважимо, $\mathrm{Lip}(D)$ позначає простір функцій, що задовольняють умову Ліпшиця за всіма аргументами на множині D, $\mathrm{Lip}_{x_1,x_2}(D)$ — простір функцій, що задовольняють умову Ліпшиця за вказаними аргументами, а $\mathrm{Lip}_{loc}(D)$ — простір функцій, що задовольняють умову Ліпшиця локально.

4. Теорема про локальну розв'язність задачі. Позначимо $V_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < t < T,\ -kt < x < kt\}$, нехай λ_0 є максимальним серед значень $|\lambda_i^-(\mathbf{0})|$, $|\lambda_i^+(\mathbf{0})|$, $i \in \{1,\dots,n\}$, а δ є мінімальним серед значень $|\lambda_i^-(\mathbf{0})+k|$, $|\lambda_i^+(\mathbf{0})-k|$, $|\lambda_i^-(\mathbf{0})-h(\mathbf{0})|$, $|\lambda_i^+(\mathbf{0})-h(\mathbf{0})|$, $i \in \{1,\dots,n\}$, і через θ_0 позначимо спільну сталу Ліпшиця в околі точки $\mathbf{0}$ функцій β_i^1, β_i^2, γ_i^-, γ_i^+ за групою змінних $\hat{u}^-$, $\hat{u}^+$, $\tilde{u}^-$, $\tilde{u}^+$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*

1) $\lambda_i^-, \lambda_i^+ \in Lip_{loc}(\overline{V_T} \times \mathbb{R}^n),\ \ i \in \{1,\dots,n\}$;

2) $f_i^-, f_i^+ \in C(\overline{V_T} \times \mathbb{R}^n) \cap Lip_{x,u,loc}(\overline{V_T} \times \mathbb{R}^n),\ \ i \in \{1,\dots,n\}$;

3) $h \in Lip_{loc}(\overline{V_T} \times \mathbb{R}^{2n})$;

4) $\beta_i^k \in Lip_{loc}(\overline{V_T} \times \mathbb{R}^N),\ k \in \{1,2\},\ i \in I_k$ *(N — сумарна розмірність змінних* $\hat{u}^-$, $\hat{u}^+$, $\tilde{u}^-$, $\tilde{u}^+$*);*

5) $\gamma_i^- \in Lip_{loc}(\overline{V_T} \times \mathbb{R}^N),\ i \in I_-,\ \gamma_i^+ \in Lip_{loc}(\overline{V_T} \times \mathbb{R}^N),\ i \in I_+$;

6) $-k < h(\boldsymbol{0}) < k,\ \delta \neq 0,\ \theta_0 < 1,\ \dfrac{\theta_0(k+\lambda_0)}{\delta} < 1$;

7) умови погодження $\beta_i^k(\boldsymbol{0}) = 0,\ k \in \{1,2\},\ i \in I_k,\ \gamma_i^-(\boldsymbol{0}) = 0,\ i \in I_-,\ \gamma_i^+(\boldsymbol{0}) = 0,\ i \in I_+$.

Тоді існує єдиний локальний узагальнений розв'язок задачі (1)–(6).

Доведення. Розглянемо метричний простір $(\mathcal{M}, \rho)$, де множина $\mathcal{M}(T_0, L_1, L_2)$ складається з трійок $(u^-, u^+, s) \in \Big[C(\overline{V}^{s-}_{T_0})\Big]^n \times \Big[C(\overline{V}^{s+}_{T_0})\Big]^n \times C[0,T_0]$, $0 < T_0 \le T$, що задовольняють такі обмеження:

S) $\left|\dfrac{s(t_1)-s(t_2)-h(\mathbf{0})(t_1-t_2)}{t_1-t_2}\right| \le H$ для всіх $\{t_1,t_2\} \subset [0,T_0]$ та деякого фіксованого $H < k - |h(\mathbf{0})|$, та виконується умова $s(0)=0$;

U) $\left|\dfrac{u^-(x_1,t)-u^-(x_2,t)}{x_1-x_2}\right| \le L_1$, для всіх $\{(x_1,t),(x_2,t)\} \subset \overline{V}^{s-}_{T_0}$,

$\left|\dfrac{u^+(x_1,t)-u^+(x_2,t)}{x_1-x_2}\right| \le L_1$, для всіх $\{(x_1,t),(x_2,t)\} \subset \overline{V}^{s+}_{T_0}$,

$\left|\dfrac{u^-(x,t_1)-u^-(x,t_2)}{t_1-t_2}\right| \le L_2$, для всіх $\{(x,t_1),(x,t_2)\} \subset \overline{V}^{s-}_{T_0}$,

$\left|\dfrac{u^+(x,t_1)-u^+(x,t_2)}{t_1-t_2}\right| \le L_2$, для всіх $\{(x,t_1),(x,t_2)\} \subset \overline{V}^{s+}_{T_0}$,

та виконується умова (4).

Зауважимо, що умови простору дозволяють встановити оцінки

$$
\begin{gathered}
|s(t)| \le kT_0, \quad |u^-(x,t)| \le (kL_1+L_2)T_0,\ (x,t) \in \overline{V}^{s-}_{T_0}, \\
|u^+(x,t)| \le (kL_1+L_2)T_0,\ (x,t) \in \overline{V}^{s+}_{T_0},
\end{gathered} \tag{9}
$$

звідки, зокрема, виводимо обмеженість функцій s, u^- та u^+ на відповідних множинах, якщо, наприклад

$$(1 + L_1 + L_2)T_0 \le 1 \tag{10}$$

(тут і надалі позначення $|\cdot|$ означає векторну норму в сенсі максимуму модулів компонент вектора).

Для довільного елементу (u^-, u^+, s) простору $\mathcal{M}$ визначимо відображення $U^-\colon \overline{V}_{T_0} \to \mathbb{R}^n$ за правилом $U^-(x,t) = u^-(x,t)$, якщо $(x,t) \in \overline{V}^{s-}_{T_0}$, але $U^-(x,t) = u^-(s(t),t)$, якщо $(x,t) \in \overline{V}^{s+}_{T_0}$. Подібно визначимо відображення $U^+\colon \overline{V}_{T_0} \to \mathbb{R}^n$, а саме $U^+(x,t) = u^+(x,t)$, якщо $(x,t) \in \overline{V}^{s+}_{T_0}$, проте $U^+(x,t) = u^+(s(t),t)$, якщо $(x,t) \in \overline{V}^{s-}_{T_0}$. Тоді відстань між елементами простору $\mathcal{M}$ визначимо формулою

$$\rho((u^{1-}, u^{1+}, s^1), (u^{2-}, u^{2+}, s^2)) = \max\Bigg\{\max_{t\in[0,T_0]} |s^1(t) - s^2(t)|,$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{V}^{s^1-}_{T_0}\cup\overline{V}^{s^2-}_{T_0}} |U^{1-}(x,t) - U^{2-}(x,t)|, \qquad \max_{(x,t)\in\overline{V}^{s^1+}_{T_0}\cup\overline{V}^{s^2+}_{T_0}} |U^{1+}(x,t) - U^{2+}(x,t)|\Bigg\}.$$

Зауважимо, що введений метричний простір повний ([17], лема 1).

Нехай $(u^-, u^+, s) \in \mathcal{M}$ — узагальнений розв'язок задачі (1)–(6), причому криві $\varphi_i^-[u^-, s](\tau; x_0, t_0)$ не дотикаються до ліній $x = -kt$, $x = s(t)$, а криві $\varphi_i^+[u^+, s](\tau; x_0, t_0)$ — до ліній $x = kt$, $x = s(t)$ (ці криві є характеристиками систем (1) та (2), відповідно). Більш формально ці умови трансверсальності можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{d\tau}\varphi_i^-[u^-, s](\tau; -kt, t)|_{\tau=t} \ne -k, \quad &&\tfrac{d}{d\tau}\varphi_i^+[u^+, s](\tau; kt, t)|_{\tau=t} \ne k, \\ &\tfrac{d}{d\tau}\varphi_i^-[u^-, s](\tau; s(t), t)|_{\tau=t} \ne s'(t), \quad &&\tfrac{d}{d\tau}\varphi_i^+[u^+, s](\tau; s(t), t)|_{\tau=t} \ne s'(t) \end{aligned} \tag{11}$$

при всіх допустимих значеннях індексу i та змінної t. Тоді трійка функцій (u^-, u^+, s) задовольняє систему інтегро-операторних рівнянь

$$s(t) = \int_0^t h(s(\tau), \tau, u^-(s(\tau), \tau), u^+(s(\tau), \tau))\, d\tau, \quad t \in [0, T_0], \tag{12}$$

$$\begin{aligned} u_i^-(x,t) &= \mathcal{B}_i^-[u^-, u^+, s](x,t) + \mathcal{I}_i^-[u^-, u^+, s](x,t), \quad (x,t) \in \overline{V}^{s-}_{T_0}, \\ u_i^+(x,t) &= \mathcal{B}_i^+[u^-, u^+, s](x,t) + \mathcal{I}_i^+[u^-, u^+, s](x,t), \quad (x,t) \in \overline{V}^{s+}_{T_0}, \end{aligned} \tag{13}$$

де граничний оператор $\mathcal{B}_i^-$ ставить у відповідність елементу $(u^-, u^+, s) \in \mathcal{M}$ функцію $\beta_i^1(s(\tau), \tau, \widehat{u}^-(-k\tau, \tau), \widehat{u}^+(k\tau, \tau), \widetilde{u}^-(s(\tau), \tau), \widetilde{u}^+(s(\tau), \tau))$ при $\tau = \chi_i^-[u^-, s](x,t)$, за умови $\varphi_i^-[u^-, s](\chi_i^-[u^-, s](x,t); x, t) = -k\chi_i^-[u^-, s](x,t)$, або ж ставить у відповідність функцію $\gamma_i^-(s(\tau), \tau, \widehat{u}^-(-k\tau, \tau), \widehat{u}^+(k\tau, \tau), \widetilde{u}^-(s(\tau), \tau), \widetilde{u}^+(s(\tau), \tau))$ при $\tau = \chi_i^-[u^-, s](x,t)$, якщо $\varphi_i^-[u^-, s](\chi_i^-[u^-, s](x,t); x, t) = s(\chi_i^-[u^-, s](x,t))$, а оператор $\mathcal{I}_i^-$ визначається рівністю

$$\mathcal{I}_i^-[u^-, u^+, s](x,t) = \int_{\chi_i^-[u^-, s](x,t)}^t f_i^-\Big(\varphi_i^-[u^-, s](\tau; x, t), \tau, u^-(\varphi_i^-[u^-, s](\tau; x, t), \tau)\Big) d\tau.$$

Оператори $\mathcal{B}_i^+$ та $\mathcal{I}_i^+$ визначаються подібно з очевидними змінами. Правильне й обернене твердження: елемент простору $\mathcal{M}$, що задовольняє рівняння (12), (13) та умову (11), є узагальненим розв'язком задачі (1)–(6). Еквівалентність задачі (1)–(6) та системи інтегро-операторних рівнянь (12), (13) дає змогу звести відшукання узагальненого розв'язку задачі до знаходження нерухомої точки визначеного нище оператора $\mathcal{A}$ на елементах простору $\mathcal{M}$

$$\mathcal{A}[u^-,u^+,s]=\big(\mathcal{V}_1^-[u^-,u^+,s],\ldots,\mathcal{V}_n^-[u^-,u^+,s],\mathcal{V}_1^+[u^-,u^+,s],\ldots,\mathcal{V}_n^+[u^-,u^+,s],\mathcal{S}[u^-,u^+,s]\big),$$

де

$$\mathcal{S}[u^-,u^+,s](t)=\int_0^t h(s(\tau),\tau,u^-(s(\tau),\tau),u^+(s(\tau),\tau))\,d\tau,\quad t\in[0,T_0],$$
$$\mathcal{V}_i^-[u^-,u^+,s](x,t)=\mathcal{B}_i^-[U^-,U^+,S](x,t)+\mathcal{I}_i^-[U^-,U^+,S](x,t),\quad (x,t)\in\overline{V_{T_0}^{S-}},$$
$$\mathcal{V}_i^+[u^-,u^+,s](x,t)=\mathcal{B}_i^+[U^-,U^+,S](x,t)+\mathcal{I}_i^+[U^-,U^+,S](x,t),\quad (x,t)\in\overline{V_{T_0}^{S+}},$$

де функції U^-,U^+ визначені при введені метрики, а функція S є образом елемента (u^-,u^+,s) при дії оператора $\mathcal{S}$. Для коректності визначення оператора доповнимо умови простору $\mathcal{M}$ додатковою умовою

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{d\tau}\varphi_i^-[U^-,S](\tau;-kt,t)|_{\tau=t}\neq -k,\quad \tfrac{d}{d\tau}\varphi_i^+[U^+,S](\tau;kt,t)|_{\tau=t}\neq k,\\ &\tfrac{d}{d\tau}\varphi_i^-[U^-,S](\tau;S(t),t)|_{\tau=t}\neq S'(t),\quad \tfrac{d}{d\tau}\varphi_i^+[U^+,S](\tau;S(t),t)|_{\tau=t}\neq S'(t),\end{aligned}\tag{14}$$

що є аналогом (11).

Наступний етап доведення є встановлення обмежень на параметри T_0, L_1, L_2 простору $\mathcal{M}$, за яких існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$ в цьому просторі, для чого, в свою чергу, використаємо теорему Банаха про стисне відображення. Дослідимо за яких умов оператор переводить простір $\mathcal{M}$ у себе та є стисним.

Нехай $(u^-,u^+,s)\in\mathcal{M}$, доведемо виконання умови

$$\left|\frac{S(t_1)-S(t_2)-h(\mathbf{0})(t_1-t_2)}{t_1-t_2}\right|\leq H\tag{15}$$

для всіх $\{t_1,t_2\}\subset[0,T_0]$ та деякого $H<k-|h(\mathbf{0})|$. Оскільки

$$|S'(t)-h(\mathbf{0})|=|h(s(t),t,u^-(s(t),t),u^+(s(t),t))-h(\mathbf{0})|\leq C_1(1+L_1+L_2)T_0,$$

що випливає з оцінок (9) та умови Ліпшиця стосовно функції h (тут і надалі C_1, $C_2,\ldots$ позначають сталі, що визначаються вихідними даними та не залежать від параметрів простору). Отже, умова (15) виконується, якщо

$$C_1(1+L_1+L_2)T_0\leq H.\tag{16}$$

Безпосередньою підстановкою перевіряємо співвідношення $S(0)=0$. Зауважимо, що за умови (16) виводимо $(U^-,U^+,S)\in\mathcal{M}(T_0,L_1,kL_1+L_2)$.

Розглянемо співвідношення (14), має місце оцінка

$$\begin{gathered}\left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i^-[U^-,S](\tau;S(t),t)|_{\tau=t}-S'(t)\right|=|\lambda_i^-(S(t),t,U^-(S(t),t))-\\ -h(s(t),t,u^-(s(t),t),u^+(s(t),t))|\geq|\lambda_i^-(\mathbf{0})-h(\mathbf{0})|-|\lambda_i^-(S(t),t,U^-(S(t),t))-\lambda_i^-(\mathbf{0})|-\\ -|h(s(t),t,u^-(s(t),t),u^+(s(t),t))-h(\mathbf{0})|\geq|\lambda_i^-(\mathbf{0})-h(\mathbf{0})|-C_2(1+L_1+L_2)T_0\geq\delta-\varepsilon,\end{gathered}$$

причому остання нерівність справедлива для довільного $\varepsilon>0$, якщо

$$C_2(1+L_1+L_2)T_0\leq\varepsilon,\tag{17}$$

що випливає з (9) та подібних оцінок для функцій S,U^-,U^+. Аналогічно оцінюючи інші вирази, встановлюємо правильність співвідношень (14), якщо задовольнити умову (27) при малому ε. □

Нехай $(u^-, u^+, s) \in \mathcal{M}$, доведемо виконання умови

$$\left|\frac{V^-(x_1,t) - V^-(x_2,t)}{x_1 - x_2}\right| \le L_1, \tag{18}$$

для всіх $\{(x_1,t),(x_2,t)\} \subset \overline{V}_{T_0}^{S-}$, де вектор-функція V^- є образом елемента (u^-, u^+, s) при дії оператора $\mathcal{V}^-$. Сформулюємо декілька оцінок у вигляді лем (більш детально подібні оцінки розглянуто в [16]). Тут і надалі позначення $\triangle_k$ означає різницю відповідних виразів при $k = 1$ та $k = 2$, наприклад, $\triangle_k x_k = x_1 - x_2$.

Лема 1. *Нехай $(u^-, u^+, s) \in \mathcal{M}$, $(x_k, t) \in \overline{V}_{T_0}^{s-}$, $k \in \{1,2\}$, та виконується умова (10), тоді правильна оцінка $|\triangle_k \varphi^-[u^-, s](\tau; x_k, t)| \le e^{C_3(1+L_1)T_0} |\triangle_k x_k|$.*

Лема 2. *Нехай $(u^-, u^+, s) \in \mathcal{M}$, $(x_k, t) \in \overline{V}_{T_0}^{s-}$, $k \in \{1,2\}$, криві $\varphi_i^-[u^-, s](\tau; x_k, t)$ при $\tau \le t$ досягають межі $x = s(t)$ (або межі $x = -kt$), та виконуються умови (10),*

$$C_4(1 + L_1 + L_2)T_0 \le \varepsilon, \tag{19}$$

тоді правильна оцінка $|\triangle_k \chi_i^-[u^-, s](x_k, t)| \le e^{C_3(1+L_1)T_0} |\triangle_k x_k|/(\delta - \varepsilon)$ при малому ε.

Нехай криві $\varphi_i^-[U^-, S](\tau; x_k, t)$ при $\tau \le t$ досягають межі $x = S(t)$ (якщо досягається межа $x = -kt$, то міркування аналогічні). Використавши леми 1, 2 для оцінки виразів $\triangle_k \varphi^-[U^-, S](\tau; x_k, t)$ і $\triangle_k \chi_i^-[U^-, S](x_k, t)$, отримаємо співвідношення (для спрощення позначимо $\tau_k = \chi_i^-[U^-, S](x_k, t)$)

$$\begin{aligned} |\triangle_k V_i^-(x_k,t)| \le & \left|\triangle_k \gamma_i^- \Big(S(\tau_k), \tau_k, \hat{U}^-(-k\tau_k, \tau_k), \hat{U}^+(k\tau_k, \tau_k), \tilde{U}^-(S(\tau_k), \tau_k), \tilde{U}^+(S(\tau_k), \tau_k)\Big)\right| + \\ & + \left|\triangle_k \int_{\tau_k}^t f_i^- \Big(\varphi_i^-[U^-, S](\tau; x_k, t), \tau, U^-(\varphi_i^-[U^-, S](\tau; x_k, t), \tau)\Big)\, d\tau\right| \le \\ & \le \left(C_4 + \frac{\theta_0(kL_1 + L_2)e^{C_2(1+L_1)T_0}}{\delta - \varepsilon}\right) |\triangle_k x_k|. \end{aligned}$$

Отже, умова (18) виконується, якщо

$$C_4 + \frac{\theta_0(kL_1 + L_2)e^{C_2(1+L_1)T_0}}{\delta - \varepsilon} \le L_1. \tag{20}$$

Доведемо виконання обмеження

$$\left|\frac{V^-(x,t_1) - V^-(x,t_2)}{t_1 - t_2}\right| \le L_2, \tag{21}$$

для всіх $\{(x,t_1),(x,t_2)\} \subset \overline{V}_{T_0}^{S-}$, для чого використаємо одну або декілька проміжних точок та оцінку (18). Нехай, наприклад, $(x_3, t_2) \in \overline{V}_{T_0}^{S-}$, причому $\varphi_i^-[U^-, S](t_2; x, t_1) = x_3$, тоді

$$\begin{aligned} |\triangle_k V_i^-(x,t_k)| &\le |V_i^-(x,t_1) - V_i^-(x_3,t_2)| + |V_i^-(x,t_2) - V_i^-(x_3,t_2)| \le \\ &\le \left|\int_{t_2}^{t_1} f_i^- \Big(\varphi_i^-[U^-, S](\tau; x, t_1), \tau, U^-(\varphi_i^-[U^-, S](\tau; x, t_1), \tau)\Big)\, d\tau\right| + L_1|x - x_3| \le \\ &\le (C_5 + (\lambda_0 + \varepsilon)L_1)|\triangle_k t_k|, \end{aligned}$$

причому остання нерівність справедлива для довільного $\varepsilon > 0$, якщо має місце (19). Отже, для виконання умови (21) достатньо зафіксувати

$$L_2 = C_5 + (\lambda_0 + \varepsilon)L_1. \tag{22}$$

Підставивши останню рівність в (20), отримаємо достатню умову на величину L_1

$$C_6 + \frac{\theta_0(k + \lambda_0 + \varepsilon)L_1 e^{\varepsilon}}{\delta - \varepsilon} \le L_1 \tag{23}$$

для довільного малого $\varepsilon > 0$, якщо параметр T_0 задовольняє нерівність

$$C_2(1 + L_1)T_0 \le \varepsilon. \tag{24}$$

Оскільки $\frac{\theta_0(k+\lambda_0)}{\delta} < 1$, то при малому значенні ε маємо

$$\frac{\theta_0(k + \lambda_0 + \varepsilon)e^{\varepsilon}}{\delta - \varepsilon} < 1, \tag{25}$$

тому оцінку (23) перепишемо у вигляді

$$\left(1 - \frac{\theta_0(k + \lambda_0 + \varepsilon)e^{\varepsilon}}{\delta - \varepsilon}\right) L_1 \ge C_6. \tag{26}$$

Отримана нерівність має місце, якщо параметр L_1 є достатньо великий. Безпосередньою підстановкою, врахувавши умови погодження, перевіряємо рівності $V^-(0,0) = V^+(0,0) = 0$.

Встановимо інваріантність умови **T**) стосовно дії оператора. Має місце оцінка

$$\begin{gathered}\left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i^-[V^-, S](\tau; S(t), t)|_{\tau=t} - S'(t)\right| = |\lambda_i^-(S(t), t, V^-(S(t), t))- \\ -h(s(t), t, u^-(s(t), t), u^+(s(t), t))| \ge |\lambda_i^-(\mathbf{0}) - h(\mathbf{0})| - |\lambda_i^-(S(t), t, V^-(S(t), t)) - \lambda_i^-(\mathbf{0})|- \\ -|h(s(t), t, u^-(s(t), t), u^+(s(t), t)) - h(\mathbf{0})| \ge |\lambda_i^-(\mathbf{0}) - h(\mathbf{0})| - C_7(1 + L_1 + L_2)T_0 \ge \delta - \varepsilon,\end{gathered}$$

причому остання нерівність справедлива для довільного $\varepsilon > 0$, якщо

$$C_7(1 + L_1 + L_2)T_0 \le \varepsilon, \tag{27}$$

що випливає з (9) та подібних оцінок для функцій S, V^-, V^+. Аналогічно оцінюючи інші вирази, встановлюємо правильність співвідношень **T**) відносно трійки (V^-, V^+, S), якщо задовольнити умову (27) при малому ε.

Таким чином, встановлено існування параметрів T_0, L_1, L_2, за яких оператор переводить простір $\mathcal{M}$ у себе.

Дослідимо тепер стисну властивість оператора $\mathcal{A}$. Нехай $(u^{k-}, u^{k+}, s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1, 2\}$. Визначимо коефіцієнт стиску κ, для якого виконується співвідношення

$$\rho\Big(\mathcal{A}[u^{1-}, u^{1+}, s^1], \mathcal{A}[u^{2-}, u^{2+}, s^2]\Big) \le \kappa\rho((u^{1-}, u^{1+}, s^1), (u^{2-}, u^{2+}, s^2)). \tag{28}$$

Нехай функція S^k є образом елемента (u^{k-}, u^{k+}, s^k) при дії оператора $\mathcal{S}$, а функції V^{k-}, V^{k+} є образами елемента (u^{k-}, u^{k+}, s^k) при дії операторів $\mathcal{V}^-$ та $\mathcal{V}^+$ відповідно. Тоді співвідношення (28) рівносильне сукупності нерівностей

$$|\triangle_k S^k(t)| \le \kappa\rho((u^{1-}, u^{1+}, s^1), (u^{2-}, u^{2+}, s^2)), \quad t \in [0, T_0], \tag{29}$$

$$\begin{gathered}|\triangle_k \tilde{V}^{k-}(x,t)| \le \kappa\rho((u^{1-}, u^{1+}, s^1), (u^{2-}, u^{2+}, s^2)), \quad (x,t) \in \overline{V_{T_0}^{S^1-}} \cup \overline{V}_{T_0}^{S^2-}, \\ |\triangle_k \tilde{V}^{k+}(x,t)| \le \kappa\rho((u^{1-}, u^{1+}, s^1), (u^{2-}, u^{2+}, s^2)), \quad (x,t) \in \overline{V_{T_0}^{S^1+}} \cup \overline{V}_{T_0}^{S^2+},\end{gathered} \tag{30}$$

де відображення $\tilde{V}^-\colon \overline{V}_{T_0} \to \mathbb{R}^n$ визначимо за правилом $\tilde{V}^-(x,t) = V^-(x,t)$, якщо $(x,t) \in \overline{V}^{S-}_{T_0}$, але $\tilde{V}^-(x,t) = V^-(S(t),t)$, якщо $(x,t) \in \overline{V}^{S+}_{T_0}$. Подібно визначимо відображення $\tilde{V}^+\colon \overline{V}_{T_0} \to \mathbb{R}^n$. Сформулюємо декілька оцінок у вигляді лем.

Лема 3. *Нехай $(u^{-k}, u^{+k}, s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1,2\}$, $(x,t) \in \overline{V}^{s^1-}_{T_0} \cap \overline{V}^{s^2-}_{T_0}$, та виконується умова (10), тоді правильна оцінка*

$$|\triangle_k \varphi^-[u^{-k}, s^k](\tau; x,t)| \le C_8 T_0 e^{C_3(1+L_1)T_0} \rho((u^{1-}, u^{1+}, s^1), (u^{2-}, u^{2+}, s^2)).$$

Лема 4. *Нехай $(u^{-k}, u^{+k}, s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1,2\}$, $(x,t) \in \overline{V}^{s^1-}_{T_0} \cap \overline{V}^{s^2-}_{T_0}$, причому криві $\varphi_i^-[u^-, s](\tau; x_k, t)$ при $\tau \le t$ досягають межі $x = s(t)$, та виконуються умови (10), (19), тоді при малому ε правильна оцінка*

$$|\triangle_k \chi_i^-[u^{-k}, b^k](x,t)| \le$$
$$\le \frac{1}{\delta - \varepsilon}\Big(C_8 T_0 e^{C_3(1+L_1)T_0} \rho((u^{1-}, u^{1+}, s^1), (u^{2-}, u^{2+}, s^2)) + \max_{t\in[0,T_0]} |s^1(t) - s^2(t)|\Big).$$

Знайдемо коефіцієнт κ, для якого виконується співвідношення (29)

$$|\triangle_k S^k(t)| \le \int_0^t \Big|\triangle_k h(s^k(\tau), \tau, u^{k-}(s^k(\tau),\tau), u^{k+}(s^k(\tau),\tau))\Big| d\tau \le$$
$$\le C_9 T_0 \rho((u^{1-}, u^{1+}, s^1), (u^{2-}, u^{2+}, s^2)).$$

Використаємо леми 3, 4 для встановлення оцінки (30). Нехай $(x,t) \in \overline{V}^{S^1-}_{T_0} \cap \overline{V}^{S^2-}_{T_0}$, та криві $\varphi_i^-[U^{k-}, S^k](\tau; x,t)$ при $\tau \le t$ досягають межі $x = S(t)$ (якщо досягається межа $x = -kt$, то міркування аналогічні). Для спрощення позначимо $\tau_k = \chi_i^-[U^{k-}, S^k](x,t)$, тоді маємо оцінку

$$|\triangle_k V_i^{k-}(x,t)| \le$$
$$\le \left|\triangle_k \gamma_i^- \Big(S^k(\tau_k), \tau_k, \hat{U}^{k-}(-k\tau_k, \tau_k), \hat{U}^{k+}(k\tau_k,\tau_k), \tilde{U}^{k-}(S^k(\tau_k),\tau_k), \tilde{U}^{k+}(S^k(\tau_k),\tau_k)\Big)\right| +$$
$$+ \left|\triangle_k \int_{\tau_k}^t f_i^- \Big(\varphi_i^-[U^{k-}, S^k](\tau; x,t), \tau, U^{k-}(\varphi_i^-[U^{k-}, S^k](\tau; x,t), \tau)\Big) d\tau\right| \le$$
$$\le C_{10}(1 + L_1 + L_2)\left(T_0 \rho((u^{1-}, u^{1+}, s^1), (u^{2-}, u^{2+}, s^2)) + \max_{t\in[0,T_0]} |\triangle_k S^k(t)|\right) +$$
$$+\theta_0 \rho((u^{1-}, u^{1+}, s^1), (u^{2-}, u^{2+}, s^2)) \le (C_{11}(1 + L_1 + L_2)T_0 + \theta_0)\rho((u^{1-}, u^{1+}, s^1), (u^{2-}, u^{2+}, s^2)).$$

Якщо $(x,t) \in \overline{V}^{S^1-}_{T_0} \setminus \overline{V}^{S^2-}_{T_0}$, встановлюємо оцінку

$$|\triangle_k \tilde{V}^{k-}(x,t)| \le |V^{1-}(x,t) - V^{2-}(S^2(t),t)| \le |\triangle_k V^{k-}(S^2(t),t)| + |V^{1-}(x,t) -$$
$$- V^{1-}(S^2(t),t)| \le \Big(C_{11}(1 + L_1 + L_2)T_0 + \theta_0\Big)\rho((u^{1-}, u^{1+}, s^1), (u^{2-}, u^{2+}, s^2)) +$$
$$+ L_1 |\triangle_k S^k(t)| \le \Big(C_{12}(1 + L_1 + L_2)T_0 + \theta_0\Big)\rho((u^{1-}, u^{1+}, s^1), (u^{2-}, u^{2+}, s^2)).$$

Таким чином, виводимо загальну оцінку

$$\rho(\mathcal{A}[u^{1-}, u^{1+}, s^1], \mathcal{A}[u^{2-}, u^{2+}, s^2]) \le (C_{13}(1 + L_1 + L_2)T_0 + \theta_0)\rho((u^{1-}, u^{1+}, s^1), (u^{2-}, u^{2+}, s^2)).$$

Отже, оператор $\mathcal{A}$ є стисним в просторі $\mathcal{M}$, якщо

$$C_{13}(1 + L_1 + L_2)T_0 < 1 - \theta_0. \qquad (31)$$

Зафіксуємо мале ε, щоб виконувалася нерівність (25), після чого L_1 — достатньо велике відповідно до умови (26), а L_2 — згідно з (22), насамкінець вибираємо параметр T_0 достатньо малим, щоб задовольнити умови (10), (16), (19), (24), (27), (31). Отже, при вибраних значеннях параметрів оператор $\mathcal{A}$ переводить метричний простір $\mathcal{M}$ у себе і є стисним на елементах цього простору. Тому, за теоремою Банаха, існує єдина нерухома точка оператора. Отриманий набір функцій є узагальненим розв'язком задачі (1)–(6), причому він єдиний у метричному просторі $\mathcal{M}$. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Rozhdestvenskyy B.L., Yanenko N.N. The systems of the guasi-linear equations and their application to gas dynamics. – M.: Nauka, 1978. – 592 p. (in Russian)
2. Li Ta-tsien. Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems. – New York: Masson, 1994. – 315 p.
3. Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. Mathematical questions of the calculation solution of the hyperbolic systems. – M.: Fizmatlit, 2001. – 608 p. (in Russian)
4. Arguchintsev A.V. Optimization of the hyperbolic systems. – M.:FIZMATLIT, 2007. – 168 p. (in Russian)
5. Lax P.D. Hyperbolic differentiation partial equations. – M.-Izhevsk: NIZ "Regular and chaotic dynamics", 2010. – 296 p. (in Russian)
6. Kuznetsov N.N. *About hyperbolic systems of linear equations with disconected coefficients*// ZHVM & MF. – 1963. – V.3, №2. – P. 299–313. (in Russian)
7. Mel'nyk Z.O., Myshkis A.D. *The mixed problem for a two-dimensional first-order hyperbolic system with disconected coefficients*// Mat. Sborn. – 1965. – V.68, №4. – P. 632–638. (in Russian)
8. Mel'nyk Z.O. *An example of the nonclassical boundary problem for the fluctuation string equation*// Ukr. Mat. Zhurn. – 1980. – V.32, №5. – P. 671–674. (in Russian)
9. Mel'nyk Z.O. *Problems with integral limitations for general two-dimensional hyperbolic systems and equations*// Diff. uravn. – 1985. – V.21, №2. – P. 246–253. (in Russian)
10. Sydorenko A.D. *The problem with contact discontinuity for a system of three quasi-linear equations*// Diff. uravn. – 1978. – V.14, №4. – P. 774–777. (in Russian)
11. Andrusyak R.V., Kyrylych V.M. *The problem for a quasi-linear system of the hyperbolic type in the curvilinear sector with free boundaries*// Nauk. Visn. Cherniv. Univ. Mathematics. – 2008. – V.421. – P. 5–12. (in Ukrainian)
12. Mel'nyk T.E. *The conjugation of solutions of the second-order hyperbolic equation along unknown boundary*// Doklady AN USSR. – 1980. – Ser. A, №12. – P. 10–12. (in Russian)
13. Kazakov K.Yu., Morozov S.F. *About the detection of the unknown line of the solution discontinuity of mixed problem for a quasi-linear hyperbolic system*// Ukr. Mat. Zhurn. – 1985. – V.37, №4. – P. 443–450. (in Russian)
14. Bassanini P., Turo J. *Generalized solutions to free boundary problems for hyperbolic systems of functional partial differential equations*// Ann. Math. Pura Appl. – 1990. – V.156, №4. – P. 211–230.
15. Kyrylych V.M. *Some nonlinear problems with free boundaries for hyperbolic systems of quasi-linear equations*// Visn. Lviv. Univ. Ser. Mech.-Mat. – 2009. – V.71. – P. 125–134. (in Ukrainian)
16. Andrusyak R.V., Burdeyna N.O., Kyrylych V.M. *Classical solvability of the moving boundary problem for hyperbolic systems of quasi-linear equations*// Ukr. Mat. Zhurn. – 2009. – V.61, №7. – P. 867–891. (in Ukrainian)
17. Andrusyak R.V., Burdeyna N.O., Kyrylych V.M. *Quasi-linear hyperbolic Stefan problem with nonlocal boundary conditions*// Ukr. Mat. Zhurn. – 2010. – V.62, №9. – P. 1173–1199. (in Ukrainian)

Львівський національний університет імені Івана Франка
vkyrylych@ukr.net

Надійшло 9.07.2012