

УДК 517.5

О. Э. ЯРЕМКО

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ И БИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

О. Е. Yaremko. *Integral representations for harmonic and biharmonic functions in the unit ball*, Mat. Stud. **39** (2013), 67–73.

In the paper an analytical solution of the analytic continuation problem in the unit  $N$ -dimensional ball by its values on the inner sphere is found. A generalization of the classical Poisson formula is obtained. A solution of the similar analytic continuation problem for certain known operator expressions of a given potential on the inner sphere is obtained. A new result of the moment problem making a connection between the moment problem on a segment and on the half-axis is found.

О. Э. Яремко. *Интегральные представления гармонических и бигармонических функций в единичном шаре* // Мат. Студії. – 2013. – Т.39, №1. – С.67–73.

В статье найдено аналитическое решение задачи продолжения потенциала в единичном  $N$ -мерном шаре по его значениям на внутренней сфере. Найденная формула является обобщением классической формулы Пуассона. Получено решение аналогичной задачи продолжения в случае известных на внутренней сфере некоторых операторных выражений от заданного потенциала. Аналогичные вопросы исследованы для бигармонических функций. Получен новый результат о проблеме моментов — найдена связь решений проблемы моментов на отрезке и на полуоси.

**1. Введение.** В 70-х годах для функций аналитических, а также гармонических в круге были найдены формулы, восстанавливающие значения таких функций в круге, по их значениям на внутренней окружности. Указанные формулы ([1], [2]) обобщают классические формулы Коши и Пуассона. Бурное развитие теории некорректных задач, в частности теории обратных граничных краевых задач ([3], [4]), позволило по-новому оценить значение найденных интегральных представлений. Обобщенные интегральные формулы Коши и Пуассона дают аналитическое решение задачи продолжения потенциала в единичном  $N$ -мерном шаре по его значениям на внутренней сфере. В настоящей статье результаты работ [1], [2] переносятся на случай функции, гармонической в единичном шаре из  $E^N$ ,  $N \geq 3$ .

Формула Пуассона  $N$ -мерного шара  $B_R = \{x \in R^N : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 < R^2\}$  из  $E^N$  имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_N R} \int_{S_R} \frac{R^2 - r^2}{(R^2 - 2Rr \cos \psi + r^2)^{\frac{N}{2}}} u(y) dS_R(y), \quad (1)$$

2010 *Mathematics Subject Classification*: 31A10.

*Keywords*: extension problem, Poisson formula, moment problems, biharmonic function, harmonic function, unit ball.

где

$$x = (x_1, \dots, x_N) \in B_R, \quad r = |x|, \quad |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_N^2,$$

$$\cos \psi = \frac{(x, y)}{|x||y|}, \quad (x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N, \quad \sigma_N = \frac{N\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)},$$

$\sigma_N$  — площадь единичной сферы в  $E^N$ , а  $dS_R(y)$  — элемент площади сферы  $S_R$ ,  $S_R(y) = \{y: |y| = R\}$ ,  $\Gamma = \Gamma(x)$  — гамма функция. Указанная формула не дает возможность вычислить значения  $u(x)$  для точек  $x$ , лежащих вне шара  $B_R$ . Цель настоящей работы получить обобщение формулы Пуассона, позволяющее вычислять значения  $u(x)$  для точек  $x$ , лежащих как внутри шара  $B_R$ , так и вне этого шара.

**2. Вспомогательные утверждения и леммы.** Производящая функция для полиномов Гегенбауэра  $C_n^{\frac{N-2}{2}}(t)$  имеет вид ([5])

$$\frac{1}{(1 - 2r \cos \psi + r^2)^{\frac{N-2}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n C_n^{\frac{N-2}{2}}(\cos \psi).$$

Применив к обеим частям приведенного равенства оператор  $L_{\frac{N-2}{2}} = \frac{N-2}{2} + r \frac{d}{dr}$ , получим выражение для ядра Пуассона в единичном шаре из  $E^N$ ,  $N \geq 3$

$$\frac{1 - r^2}{(1 - 2r \cos \psi + r^2)^{\frac{N}{2}}} = \frac{2}{N-2} \sum_{n=0}^{\infty} L_{\frac{N-2}{2}} \left[ r^n C_n^{\frac{N-2}{2}}(\cos \psi) \right]. \quad (2)$$

Приведем формулу Пуассона для бесселевой функции I рода ([6])

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\pi \cos(x \cos t) \sin^{2\nu}(t) dt, \quad (3)$$

а также интегральную формулу для полиномов Гегенбауэра ([3], с. 1044)

$$C_n^\lambda(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(2\lambda + n)}{n! \Gamma(2\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cdot \cos \varphi) \sin^{2\lambda-1} \varphi d\varphi. \quad (4)$$

**Лемма 1.** Для всех значений  $0 < r < 1$ ,  $\varepsilon > 0$  справедливо тождество

$$e^{r\varepsilon \cos \psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}(r\varepsilon \sin \psi)}{(r \sin \psi)^{\frac{N-3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{N-3}{2}} \Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{N-3+n}}{(N-3+n)!} r^n C_n^{\frac{N-2}{2}}(\cos \psi). \quad (5)$$

*Доказательство.* Воспользуемся формулами (3) и (4). Имеем

$$\begin{aligned} e^{r\varepsilon \cos \psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}(r\varepsilon \sin \psi)}{(r \sin \psi)^{\frac{N-3}{2}}} &= e^{r\varepsilon \cos \psi} \frac{\varepsilon^{N-3}}{2^{\frac{N-3}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(r\varepsilon \sin \psi \cdot \cos t) \sin^{N-3}(t) dt = \\ &= \frac{\varepsilon^{N-3}}{2^{\frac{N-3}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)} \operatorname{Re} \int_0^\pi e^{r\varepsilon(\cos \psi + i \sin \psi \cdot \cos t)} \sin^{N-3}(t) dt = \\ &= \frac{\varepsilon^{N-3}}{2^{\frac{N-3}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)} \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{r^j \varepsilon^j}{j!} (\cos \psi + i \sin \psi \cdot \cos t)^j \sin^{N-3}(t) dt = \\ &= \frac{\varepsilon^{N-3}}{2^{\frac{N-3}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j \varepsilon^j}{j!} C_j^{\frac{N-2}{2}}(\cos t) \sqrt{\pi} \frac{j! \Gamma(N-2)}{\Gamma(N-2+j)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{N-3}{2}} \Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j \varepsilon^{N-3+j}}{(N-3+j)!} C_j^{\frac{N-2}{2}}(\cos t).$$

В ходе доказательства применена формула удвоения для  $\Gamma$ -функции. □

**Лемма 2.** Пусть функция  $\omega = \omega(t)$  определена на отрезке  $[0, 1]$ , неотрицательна и непрерывна на  $[0, 1]$ . Если

$$\int_0^1 \varepsilon^n \omega(\varepsilon) d\varepsilon = c_n, \quad \Omega(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{e^{-\varepsilon/\tau}}{\tau} \omega(\tau) d\tau,$$

то  $\int_0^\infty \varepsilon^n \Omega(\varepsilon) d\varepsilon = n! c_n$ .

*Доказательство.* Из условий леммы следует, что в повторном интеграле

$$\int_0^\infty \varepsilon^n \left( \int_0^1 \frac{e^{-\varepsilon/\tau}}{\tau} \omega(\tau) d\tau \right) d\varepsilon$$

можно изменить порядок интегралов. В результате получим

$$\int_0^\infty \varepsilon^n \Omega(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau} \left( \int_0^\infty \varepsilon^n e^{-\varepsilon/\tau} d\varepsilon \right) d\tau = \int_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau} n! \tau^{n+1} d\tau = n! c_n. \quad \square$$

Обобщением леммы 1 служит следующий результат

**Лемма 3.** Если  $\{f_n\}$  — последовательность моментов некоторой функции  $f$  на промежутке  $[0, \infty)$  (см. [8]), т.е.  $f_n = \int_0^\infty \sigma^n f(\sigma) d\sigma$ , а  $\{c_n\}$  — последовательность моментов некоторой функции  $\omega(\varepsilon)$  на отрезке  $[0, 1]$   $c_n = \int_0^1 \varepsilon^n \omega(\varepsilon) d\varepsilon$  то, последовательность  $\{c_n f_n\}$  — последовательность моментов функции  $\Omega(\varepsilon)$  на промежутке  $[0, \infty)$

$$\int_0^\infty \varepsilon^n \Omega(\varepsilon) d\varepsilon = f_n c_n, \quad \text{где } \Omega(\varepsilon) = \int_0^1 f(\varepsilon/\tau) \omega(\tau) \frac{d\tau}{\tau}.$$

### 3. Основной результат.

**Теорема 1.** Пусть функция  $u = u(x)$  гармонична в единичном шаре  $B_1, B_1 \subset E^N$  и непрерывна на  $\bar{B}_1$ , тогда для каждого  $0 < R \leq 1$  справедлива формула

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^\infty e^{-\varepsilon} \left( \varepsilon - \frac{N-2}{2} \right) \times \\ \times \left( \int_{S_R} e^{\frac{r}{R} \varepsilon \cos \psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{r}{R} \varepsilon \sin \psi\right)}{\left(\frac{r}{R} \sin \psi\right)^{\frac{N-3}{2}}} u(y) dS_R(y) \right) d\varepsilon, \quad r = |x| < R. \quad (6)$$

*Доказательство.* Примем обозначение

$$u_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^k e^{-\varepsilon} L_{\frac{N-2}{2}} \left[ \int_{S_R} e^{\frac{r}{R} \varepsilon \cos \psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{r}{R} \varepsilon \sin \psi\right)}{\left(\frac{r}{R} \sin \psi\right)^{\frac{N-3}{2}}} u(y) dS_R(y) \right] d\varepsilon.$$

В правой части последней формулы изменим порядок интегрирования и применим лемму 1. В результате, для функции  $u_k(x)$  получим выражение

$$\begin{aligned} u_k(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{N-3}{2}} \Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\int_0^k e^{-\varepsilon} \varepsilon^{N-3+n} d\varepsilon}{(N-3+n)!} \right) L_{\frac{N-2}{2}} \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^n \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma_N} \frac{2}{N-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{N-2}{2} + n \right) \frac{\int_0^k e^{-\varepsilon} \varepsilon^{N-3+n} d\varepsilon}{(N-3+n)!} \left( \frac{r}{R} \right)^n \int_{S_R} C_n^{\frac{N-2}{2}}(\cos \psi) u(y) dS_R(y) \quad (7) \end{aligned}$$

для  $x \in B_R$ . Учитывая единственность разложения гармонической в единичном шаре  $B_1$  функции  $u(x)$  в ряд однородных гармонических полиномов замечаем, что каждый из интегралов

$$\frac{1}{R^n} \int_{S_R} C_n^{\frac{N-2}{2}}(\cos \psi) u(y) dS_R(y)$$

не зависит от  $R$ . В частности, в формуле (7) можно принять  $R = 1$ . Тогда

$$u_k(x) = \frac{1}{\sigma_N} \frac{2}{N-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( n + \frac{N-2}{2} \right) \left( \frac{\int_0^k e^{-\varepsilon} \varepsilon^{N-3+n} d\varepsilon}{(N-3+n)!} \right) r^n \int_{S_1} C_n^{\frac{N-2}{2}}(\cos \psi) u(y) dS_1(y).$$

Неравенство  $\int_0^k e^{-\varepsilon} \varepsilon^{N-3+n} d\varepsilon \leq (N-3+n)!$ ,  $k \in (0, \infty)$  позволяет выполнить предельный переход при  $k \rightarrow \infty$  в ряде, изображающем функцию  $u_k(x)$ , т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = \frac{1}{\sigma_N} \frac{2}{N-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( n + \frac{N-2}{2} \right) r^n \int_{S_1} C_n^{\frac{N-2}{2}}(\cos \psi) u(y) dS_1(y).$$

На основании соотношения (2) правую часть в последней формуле можно переписать в виде

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = \frac{1}{\sigma_N} \int_{S_1} \frac{1-r^2}{(1-2r \cos \psi + r^2)^{\frac{N}{2}}} u(y) dS_1(y).$$

Формула Пуассона (1) приводит к равенству

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^{\infty} L_{\frac{N-2}{2}} \left[ e^{-\varepsilon} \int_{S_R} e^{\frac{r}{R} \varepsilon \cos \psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{r}{R} \varepsilon \sin \psi\right)}{\left(\frac{r}{R} \sin \psi\right)^{\frac{N-3}{2}}} u(y) dS_R(y) \right] d\varepsilon.$$

Выполним замену переменной  $\varepsilon = \frac{\delta}{r}$ . Получим

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^{\infty} L_{\frac{N-2}{2}} \left[ e^{-\frac{\delta}{r}} \cdot r^{-\frac{N-1}{2}} \right] \times \\ &\times \left[ e^{-\delta} \int_{S_R} e^{\frac{1}{R} \delta \cos \psi} \delta^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{1}{R} \delta \sin \psi\right)}{\left(\frac{1}{R} \sin \psi\right)^{\frac{N-3}{2}}} u(y) dS_R(y) \right] d\delta. \end{aligned}$$

Вычисления дают равенство

$$L_{\frac{N-2}{2}} \left[ e^{-\frac{\delta}{r}} \cdot r^{-\frac{N-1}{2}} \right] = \left( \frac{\delta}{r} - \frac{N-2}{2} \right) e^{-\frac{\delta}{r}} \cdot r^{-\frac{N-1}{2}}.$$

Таким образом,

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^\infty \left( \frac{\delta}{r} - \frac{N-2}{2} \right) e^{-\frac{\delta}{r}} \cdot r^{-\frac{N-1}{2}} \times \\ \times \left[ e^{-\delta} \int_{S_R} e^{\frac{1}{R}\varepsilon \cos \psi} \delta^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}} \left( \frac{1}{R} \delta \sin \psi \right)}{\left( \frac{1}{R} \sin \psi \right)^{\frac{N-3}{2}}} u(y) dS_R(y) \right] d\delta.$$

Замена в интеграле вида  $\delta = \varepsilon r$  приводит к формуле (6). □

**Замечание.** В случае гармонических функций  $N = 2$  результат установлен И. И. Бавриным в работе [2].

**4. Распространение результатов.** Пусть  $l$ —натуральное число и  $\beta_1, \dots, \beta_l$  — любые действительные числа с условием  $\beta_j \geq 1, j \in \{1, \dots, l\}$ . В работе И. И. Баврина [2] введены операторы, действующие на функции, гармонические в единичном шаре  $B_1$

$$L_{\beta_j} [u] = \beta_j u + \sum_{i=1}^N x_i u'_{x_i}, \quad j \in \{1, \dots, l\}; \quad L_a^{(l)} [u] = L_{\beta_l} \dots L_{\beta_1} [u].$$

Оператор, обратный к оператору  $L_{\beta_j}$ , определяется формулой

$$L_{\beta_j}^{(-1)} [u] = \int_0^1 \varepsilon^{\beta_j-1} u(\varepsilon x) d\varepsilon, \quad \varepsilon x = (\varepsilon x_1, \dots, \varepsilon x_N).$$

Следовательно, оператор обратный к  $L_a^{(l)}$ , обозначаемый в дальнейшем  $L_a^{(-l)}$ , имеет вид  $L_a^{(-l)} [f] = L_{\beta_1}^{(-1)} \dots L_{\beta_l}^{(-1)} [f]$ . Рассмотрим также оператор  $L_{\tilde{a}\tilde{a}}^{(-l,l)} [u] = L_{\tilde{a}}^{(-\tilde{l})} L_a^{(l)} [u]$  (см.[2]), обратный для которого имеет вид  $L_{\tilde{a}\tilde{a}}^{(-l,\tilde{l})} [u] = L_a^{(-l)} L_{\tilde{a}}^{(\tilde{l})} [u]$ . Определим серию операторов, определенных на множестве функций  $\Phi(\varepsilon)$  непрерывно-дифференцируемых на положительной полуоси  $\Lambda_{\beta_j} [\Phi] = (\beta_j - 1) \Phi - \varepsilon \Phi'_\varepsilon, \beta_j > 1, j \in \{1, \dots, l\}$ . Обратный оператор однозначно определен в классе функций, ограниченных на действительной положительной полуоси и действует по правилу

$$\Lambda_{\beta_j}^{-1} [F] = \int_0^1 \tau^{\beta_j-2} F \left( \frac{\varepsilon}{\tau} \right) d\tau, \quad j \in \{1, \dots, l\}.$$

Для доказательства проведем следующие вычисления

$$\Lambda_{\beta}^{-1} \Lambda_{\beta} [\Phi] = \int_0^1 \tau^{\beta-2} \left[ (\beta - 1) \Phi \left( \frac{\varepsilon}{\tau} \right) - \frac{\varepsilon}{\tau} \Phi' \left( \frac{\varepsilon}{\tau} \right) \right] d\tau = \\ = \int_0^1 \tau^{\beta-2} (\beta - 1) \Phi \left( \frac{\varepsilon}{\tau} \right) d\tau + \int_0^1 \tau^{\beta-1} d\Phi \left( \frac{\varepsilon}{\tau} \right) = \\ = \int_0^1 \tau^{\beta-2} (\beta - 1) \Phi \left( \frac{\varepsilon}{\tau} \right) d\tau + \Phi(\varepsilon) - \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{\beta-1} \Phi \left( \frac{\varepsilon}{\tau} \right) - \int_0^1 (\beta - 1) \tau^{\beta-2} \Phi \left( \frac{\varepsilon}{\tau} \right) d\tau = \Phi(\varepsilon).$$

Определим также оператор  $\Lambda_a^{(l)} [\Phi] = \Lambda_{\beta_l} \dots \Lambda_{\beta_1} [\Phi]$ . Тогда, оператор обратный к  $\Lambda_a^{(l)}$ , обозначаемый в дальнейшем  $\Lambda_a^{(-l)}$ , имеет вид  $\Lambda_a^{(-l)} [\Phi] = \Lambda_{\beta_1}^{(-1)} \dots \Lambda_{\beta_l}^{(-1)} [\Phi]$ . Рассмотрим также оператор  $\Lambda_{\tilde{a}\tilde{a}}^{(-l,l)} [\Phi] = \Lambda_{\tilde{a}}^{(-\tilde{l})} \Lambda_a^{(l)} [\Phi]$ , обратный для которого имеет вид

$$\Lambda_{\tilde{a}\tilde{a}}^{(-l,\tilde{l})} [\Phi] = \Lambda_a^{(-l)} \Lambda_{\tilde{a}}^{(\tilde{l})} [\Phi].$$

**Теорема 2.** Пусть функция  $u = u(x)$  гармонична в единичном шаре  $B_1$  из  $E^N$  и непрерывна на  $\bar{B}_1$ , тогда для  $x \in B$ ,  $|x| = r < R \leq 1$ , справедливо интегральное представление

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^\infty \Lambda_{a\tilde{a}}^{(-l, \tilde{l})} [\Phi(\varepsilon)] \left( \int_{S_R} e^{\frac{r}{R} \varepsilon \cos \psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}} \left( \frac{r}{R} \varepsilon \sin \psi \right)}{\left( \frac{r}{R} \sin \psi \right)^{\frac{N-3}{2}}} L_{a\tilde{a}}^{(l, -\tilde{l})} [u(y)] dS_R(y) \right) d\varepsilon, \quad (8)$$

где  $\Phi(\varepsilon) = e^{-\varepsilon} \left( \varepsilon - \frac{N-2}{2} \right)$ .

*Доказательство.* Так как любые два оператора  $L_{\beta_i}$  и  $L_{\beta_j}^{-1}$  коммутируют, то достаточно изучить два основных случая (а) и (б).

а)  $L_{a\tilde{a}}^{(l, -\tilde{l})} = L_\beta^{-1}$ . По основному свойству оператора  $L_\beta^{-1}$  для любого однородного гармонического многочлена степени  $n$  выполнено

$$L_\beta^{-1} [P_n(x)] = \frac{1}{\beta + n} P_n(x).$$

Получим равенство

$$\int_{S_1} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi) L_\beta^{-1} [u(y)] dS_1(y) = \frac{1}{\beta + n} \int_{S_1} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi) u(y) dS_1(y).$$

Интегрирование по частям приводит к равенству

$$\int_0^\infty \Lambda_\beta [\Phi(\varepsilon)] \varepsilon^n d\varepsilon = (\beta + n) \int_0^\infty \Phi(\varepsilon) \varepsilon^n d\varepsilon.$$

б)  $L_{a\tilde{a}}^{(l, -\tilde{l})} = L_\beta$ . По основному свойству оператора  $L_\beta$  для любого однородного гармонического многочлена степени  $n$  выполнено  $L_\beta [P_n(x)] = (\beta + n) P_n(x)$ . Тогда справедливо равенство

$$\int_{S_1} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi) L_\beta [u(y)] dS_1(y) = (\beta + n) \int_{S_1} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos \psi) u(y) dS_1(y).$$

Осталось применить лемму 3, в которой положено  $\omega(\varepsilon) = \varepsilon^{\beta-1}$ , тогда

$$\int_0^\infty \Lambda_\beta^{-1} [\Phi(\varepsilon)] \varepsilon^n d\varepsilon = \int_0^1 \varepsilon^{\beta-1} \varepsilon^n d\varepsilon \cdot \int_0^\infty \Phi(\varepsilon) \varepsilon^n d\varepsilon = \frac{1}{\beta + n} \int_0^\infty \Phi(\varepsilon) \varepsilon^n d\varepsilon. \quad \square$$

## 5. Интегральные формулы для бигармонических функций.

**Теорема 3.** Пусть функция  $u = u(x)$  гармонична в единичном шаре  $B_1$ ,  $B_1 \subset E^N$ , функции  $\Delta u(x)$ ,  $u = u(x)$ , непрерывны на  $\bar{B}_1$ , тогда справедлива формула

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^\infty \Phi(\varepsilon) \left( \int_{S_R} e^{\frac{r}{R} \varepsilon \cos \psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}} \left( \frac{r}{R} \varepsilon \sin \psi \right)}{\left( \frac{r}{R} \sin \psi \right)^{\frac{N-3}{2}}} u(y) dS_R(y) \right) d\varepsilon + \\ + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \frac{r^2 - R^2}{4} \int_0^\infty \Lambda_1^{-1} [\Phi(\varepsilon)] \left( \int_{S_R} e^{\frac{r}{R} \varepsilon \cos \psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}} \left( \frac{r}{R} \varepsilon \sin \psi \right)}{\left( \frac{r}{R} \sin \psi \right)^{\frac{N-3}{2}}} \Delta [u(y)] dS_R(y) \right) d\varepsilon, \quad (9)$$

Формула (9) восстанавливает функцию бигармоническую в шаре по значениям на внутренней сфере  $\Delta u(x)$ ,  $u(x)$ ,  $x \in S_R$ .

*Доказательство.* Как известно ([10]), для функции  $u = u(x)$  справедлива структурная формула  $u = u_0 + r^2 u_1$ , где  $u_0 = u_0(x)$ ,  $u_1 = u_1(x)$  — функции гармонические в единичном шаре. На внутренней сфере  $S_R$  будут выполняться условия  $u_0 + R^2 u_1 = u$ ,  $4L_1[u_1] = \Delta u$ , где

$$L_1[u] = u + \sum_{i=1}^N x_i u'_{x_i}.$$

Из теорем 1, 2 следуют формулы

$$u_0 + R^2 u_1 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^\infty \Phi(\varepsilon) \left( \int_{S_R} e^{\frac{r}{R}\varepsilon \cos \psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{r}{R}\varepsilon \sin \psi\right)}{\left(\frac{r}{R}\sin \psi\right)^{\frac{N-3}{2}}} u(y) dS_R(y) \right) d\varepsilon, \quad x \in B,$$

$$4u_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^\infty \Lambda_1^{-1}[\Phi(\varepsilon)] \left( \int_{S_R} e^{\frac{r}{R}\varepsilon \cos \psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{r}{R}\varepsilon \sin \psi\right)}{\left(\frac{r}{R}\sin \psi\right)^{\frac{N-3}{2}}} \Delta[u(y)] dS_R(y) \right) d\varepsilon.$$

Выражая из полученных равенств функции  $u_0$  и  $u_1$ , получим доказываемую формулу.  $\square$

**6. Заключение.** Результаты содержащиеся в теоремах 1, 2, 3 могут быть применены для решения задачи Адамара ([3]) в сферическом слое, для решения обратных граничных задач ([3], [9]): например, по известному потоку через границу вычислить с точностью до постоянной величину поля на границе, обратно по известной величине поля на границе вычислить поток через границу. При этом остается вопрос обоснования предельного перехода при  $r \rightarrow 1$  в формулах (8).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bavrin I.I. *Cauchy integral formula in the ring inverse problem*// Dokl. RAN. – 2009. – V.428, №2. – P. 151–152. (in Russian)
2. Bavrin I.I. *Operational methods in complex analysis*. – М.:Prometey, 1991. (in Russian)
3. Lavrent'ev M.A. *Variational Methods for Boundary Value Problems: for Systems of Elliptic Equations*. – Reprint. – USA: Dover Publications, 2006.
4. Belov Yu.Ya. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. – Utrecht: VSP, 2002.
5. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tables of integrals, sums, series of products*, 4th eds. – М.Физmatgiz, 1963. (in Russian)
6. Abramowitz M., Stegun I.A., *Orthogonal Polynomials* Ch. 22 in *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th printing. – New York: Dover, 1972. – P. 771–802.
7. Ditkin V.A., Prudnikov A.P., *Integral transforms and operational calculus*. – М: Nauka, 1974. (in Russian)
8. Bavrin I.I., Yaremko O.E., *Fourier integral on compact and their application to moments problem*// Dokl. RAN. – 2000. – V.374, №2. – P. 177–179. (in Russian)
9. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskiy S.P. *Ill Posed problems of mathematical physics and analysis*. – М. Nauka, 1980. (in Russian)
10. Weisstein, Eric W., *Biharmonic Equation*// Wolfram MathWorld.

Пензенский государственный университет  
yaremki@mail.ru

Поступило 10.04.2012  
После переработки 12.01.2013