УДК 517.5

О. Э. Яремко

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ И БИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

O. E. Yaremko. *Integral representations for harmonic and biharmonic functions in the unit ball*, Mat. Stud. **39** (2013), 67–73.

In the paper an analytical solution of the analytic continuation problem in the unit N-dimensional ball by its values on the inner sphere is found. A generalization of the classical Poisson formula is obtained. A solution of the similar analytic continuation problem for certain known operator expressions of a given potential on the inner sphere is obtained. A new result of the moment problem making a connection between the moment problem on a segment and on the half-axis is found.

О. Э. Яремко. *Интегральные представления гармонических и бигармонических функций в единичном шаре* // Мат. Студії. – 2013. – Т.39, №1. – C.67–73.

В статье найдено аналитическое решение задачи продолжения потенциала в единичном N-мерном шаре по его значениям на внутренней сфере. Найденная формула является обобщением классической формулы Пуассона. Получено решение аналогичной задачи продолжения в случае известных на внутренней сфере некоторых операторных выражений от заданного потенциала. Аналогичные вопросы исследованы для бигармонических функций. Получен новый результат о проблеме моментов — найдена связь решений проблемы моментов на отрезке и на полуоси.

1. Введение. В 70-х годах для функций аналитических, а также гармонических в круге были найдены формулы, восстанавливающие значения таких функций в круге, по их значениям на внутренней окружности. Указанные формулы ([1], [2]) обобщают классические формулы Коши и Пуассона. Бурное развитие теории некорректных задач, в частности теории обратных граничных краевых задач ([3], [4]), позволило по-новому оценить значение найденных интегральных представлений. Обобщенные интегральные е формулы Коши и Пуассона дают аналитическое решение задачи продолжения потенциала в единичном N-мерном шаре по его значениям на внутренней сфере. В настоящей статье результаты работ [1], [2] переносятся на случай функции, гармонической в единичном шаре из $E^N, N \geq 3$.

Формула Пуассона N-мерного шара $B_R = \{x \in R^N : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2 < R^2\}$ из E^N имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_N R} \int_{S_R} \frac{R^2 - r^2}{\left(R^2 - 2Rr\cos\psi + r^2\right)^{\frac{N}{2}}} u(y)\, dS_R(y), \tag{1}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 31A10.
Keywords: extension problem, Poisson formula, moment problems, biharmonic function, harmonic function, unit ball.
doi:10.30970/ms.39.1.67-73

где

$$x = (x_1, \ldots, x_N) \in B_R,\ r = |x|\,,\ |x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_N^2,$$
$$\cos\psi = \frac{(x,y)}{|x|\,|y|},\ (x,y) = x_1 y_1 + \ldots + x_N y_N, \quad \sigma_N = \frac{N\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)},$$

σ_N — площадь единичной сферы в E^N, а $dS_R\,(y)$ — элемент площади сферы S_R, $S_R\,(y) = \{y\colon\ |y| = R\}$, $\Gamma = \Gamma\,(x)$ — гамма функция. Указанная формула не дает возможность вычислить значения $u(x)$ для точек x, лежащих вне шара B_R. Цель настоящей работы получить обобщение формулы Пуассона, позволяющее вычислять значения $u(x)$ для точек x, лежащих как внутри шара B_R, так и вне этого шара.

2. Вспомогательные утверждения и леммы. Производящая функция для полиномов Гегенбауэра $C_n^{\frac{N-2}{2}}(t)$ имеет вид ([5])

$$\frac{1}{\left(1-2r\cos\psi+r^2\right)^{\frac{N-2}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n C_n^{\frac{N-2}{2}}\,(\cos\psi)\,.$$

Применив к обеим частям приведенного равенства оператор $L_{\frac{N-2}{2}} = \frac{N-2}{2} + r\frac{d}{dr}$, получим выражение для ядра Пуассона в единичном шаре из $E^N, N \geq 3$

$$\frac{1-r^2}{\left(1-2r\cos\psi+r^2\right)^{\frac{N}{2}}} = \frac{2}{N-2}\sum_{n=0}^{\infty} L_{\frac{N-2}{2}}\Big[r^n C_n^{\frac{N-2}{2}}\,(\cos\psi)\Big]. \tag{2}$$

Приведем формулу Пуассона для бесселевой функции I рода ([6])

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \cos(x\cos t)\sin^{2\nu}(t)dt, \tag{3}$$

а также интегральную формулу для полиномов Гегенбауэра ([3], с. 1044)

$$C_n^\lambda(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!\Gamma(2\lambda)}\cdot\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\pi (\cos\theta + i\sin\theta\cdot\cos\varphi)\sin^{2\lambda-1}\varphi d\varphi. \tag{4}$$

Лемма 1. *Для всех значений* $0 < r < 1, \quad \varepsilon > 0$ *справедливо тождество*

$$e^{r\varepsilon\cos\psi}\varepsilon^{\frac{N-3}{2}}\frac{J_{\frac{N-3}{2}}\,(r\varepsilon\sin\psi)}{(r\sin\psi)^{\frac{N-3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{\frac{N-3}{2}}\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^{N-3+n}}{(N-3+n)!}r^n C_n^{\frac{N-2}{2}}\,(\cos\psi)\,. \tag{5}$$

Доказательство. Воспользуемся формулами (3) и (4). Имеем

$$e^{r\varepsilon\cos\psi}\varepsilon^{\frac{N-3}{2}}\frac{J_{\frac{N-3}{2}}\,(r\varepsilon\sin\psi)}{(r\sin\psi)^{\frac{N-3}{2}}} = e^{r\varepsilon\cos\psi}\frac{\varepsilon^{N-3}}{2^{\frac{N-3}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{N-2}{2})}\int_0^\pi \cos\left(r\varepsilon\sin\psi\cdot\cos t\right)\sin^{N-3}(t)dt =$$
$$= \frac{\varepsilon^{N-3}}{2^{\frac{N-3}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{N-2}{2})}\mathrm{Re}\int_0^\pi e^{r\varepsilon(\cos\psi+i\sin\psi\cdot\cos t)}\sin^{N-3}(t)dt =$$
$$= \frac{\varepsilon^{N-3}}{2^{\frac{N-3}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{N-2}{2})}\mathrm{Re}\sum_{j=0}^{\infty}\int_0^\pi \frac{r^j\varepsilon^j}{j!}(\cos\psi + i\sin\psi\cdot\cos t)^j\sin^{N-3}(t)dt =$$
$$= \frac{\varepsilon^{N-3}}{2^{\frac{N-3}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{N-2}{2})}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{r^j\varepsilon^j}{j!}C_j^{\frac{N-2}{2}}(\cos t)\sqrt{\pi}\frac{j!\Gamma(N-2)}{\Gamma(N-2+j)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{N-2}{2})}{\Gamma(\frac{N-1}{2})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{N-3}{2}} \Gamma\Big(\frac{N-2}{2}\Big) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j \varepsilon^{N-3+j}}{(N-3+j)!} C_j^{\frac{N-2}{2}} (\cos t).$$

В ходе доказательства применена формула удвоения для Г-функции. □

Лемма 2. *Пусть функция* $\omega = \omega(t)$ *определена на отрезке* $[0,1]$, *неотрицательна и непрерывна на* $[0,1]$. *Если*

$$\int_0^1 \varepsilon^n \omega(\varepsilon)\, d\varepsilon = c_n,\ \Omega(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{e^{-\varepsilon/\tau}}{\tau} \omega(\tau)\, d\tau,$$

то $\int_0^\infty \varepsilon^n \Omega(\varepsilon)\, d\varepsilon = n! c_n$.

Доказательство. Из условий леммы следует, что в повторном интеграле

$$\int_0^\infty \varepsilon^n \left(\int_0^1 \frac{e^{-\varepsilon/\tau}}{\tau} \omega(\tau)\, d\tau \right) d\varepsilon$$

можно изменить порядок интегралов. В результате получим

$$\int_0^\infty \varepsilon^n \Omega(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau} \left(\int_0^\infty \varepsilon^n e^{-\varepsilon/\tau} d\varepsilon \right) d\tau = \int_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau} n! \tau^{n+1} d\tau = n! c_n. \qquad \square$$

Обобщением леммы 1 служит следующий результат

Лемма 3. *Если* $\{f_n\}$ *— последовательность моментов некоторой функции* f *на промежутке* $[0,\infty)$ *(см. [8]), т.е.* $f_n = \int_0^\infty \sigma^n f(\sigma) d\sigma$, *а* $\{c_n\}$ *— последовательность моментов некоторой функции* $\omega(\varepsilon)$ *на отрезке* $[0,1]$ $c_n = \int_0^1 \varepsilon^n \omega(\varepsilon)\, d\varepsilon$ *то, последовательность* $\{c_n f_n\}$ *— последовательность моментов функции* $\Omega(\varepsilon)$ *на промежутке* $[0,\infty)$

$$\int_0^\infty \varepsilon^n \Omega(\varepsilon)\, d\varepsilon = f_n c_n,\ \text{где}\ \Omega(\varepsilon) = \int_0^1 f(\varepsilon/\tau) \omega(\tau) \frac{d\tau}{\tau}.$$

3. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть функция* $u = u(x)$ *гармонична в единичном шаре* $B_1, B_1 \subset E^N$ *и непрерывна на* $\overline{B}_1$, *тогда для каждого* $0 < R \leq 1$ *справедлива формула*

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^\infty e^{-\varepsilon} \big(\varepsilon - \frac{N-2}{2}\big) \times$$

$$\times \Big(\int_{S_R} e^{\frac{r}{R}\varepsilon \cos\psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}} \left(\frac{r}{R}\varepsilon \sin\psi\right)}{\left(\frac{r}{R}\sin\psi\right)^{\frac{N-3}{2}}} u(y)\, dS_R(y) \Big) d\varepsilon,\ r = |x| < R. \qquad (6)$$

Доказательство. Примем обозначение

$$u_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^k e^{-\varepsilon} L_{\frac{N-2}{2}} \Big[\int_{S_R} e^{\frac{r}{R}\varepsilon\cos\psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}} \left(\frac{r}{R}\varepsilon\sin\psi\right)}{\left(\frac{r}{R}\sin\psi\right)^{\frac{N-3}{2}}} u(y)\, dS_R(y) \Big] d\varepsilon.$$

В правой части последней формулы изменим порядок интегрирования и применим лемму 1. В результате, для функции $u_k(x)$ получим выражение

$$u_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{\frac{N-3}{2}}\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\int_0^k e^{-\varepsilon}\varepsilon^{N-3+n}d\varepsilon}{(N-3+n)!}\right)L_{\frac{N-2}{2}}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma_N}\frac{2}{N-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{N-2}{2}+n\right)\frac{\int_0^k e^{-\varepsilon}\varepsilon^{N-3+n}d\varepsilon}{(N-3+n)!}\left(\frac{r}{R}\right)^n\int_{S_R}C_n^{\frac{N-2}{2}}(\cos\psi)\,u(y)\,dS_R(y) \quad (7)$$

для $x \in B_R$. Учитывая единственность разложения гармонической в единичном шаре B_1 функции $u(x)$ в ряд однородных гармонических полиномов замечаем, что каждый из интегралов

$$\frac{1}{R^n}\int_{S_R}C_n^{\frac{N-2}{2}}(\cos\psi)\,u(y)\,dS_R(y)$$

не зависит от R. В частности, в формуле (7) можно принять $R=1$. Тогда

$$u_k(x) = \frac{1}{\sigma_N}\frac{2}{N-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{N-2}{2}\right)\left(\frac{\int_0^k e^{-\varepsilon}\varepsilon^{N-3+n}d\varepsilon}{(N-3+n)!}\right)r^n\int_{S_1}C_n^{\frac{N-2}{2}}(\cos\psi)\,u(y)\,dS_1(y).$$

Неравенство $\int_0^k e^{-\varepsilon}\varepsilon^{N-3+n}d\varepsilon \le (N-3+n)!,\ k \in (0,\infty)$ позволяет выполнить предельный переход при $k \to \infty$ в ряде, изображающем функцию $u_k(x)$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty}u_k(x) = \frac{1}{\sigma_N}\frac{2}{N-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{N-2}{2}\right)r^n\int_{S_1}C_n^{\frac{N-2}{2}}(\cos\psi)\,u(y)\,dS_1(y).$$

На основании соотношения (2) правую часть в последней формуле можно переписать в виде

$$\lim_{k\to\infty}u_k(x) = \frac{1}{\sigma_N}\int_{S_1}\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\psi+r^2)^{\frac{N}{2}}}u(y)\,dS_1(y).$$

Формула Пуассона (1) приводит к равенству

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}}\int_0^{\infty}L_{\frac{N-2}{2}}\left[e^{-\varepsilon}\int_{S_R}e^{\frac{r}{R}\varepsilon\cos\psi}\varepsilon^{\frac{N-3}{2}}\frac{J_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{r}{R}\varepsilon\sin\psi\right)}{\left(\frac{r}{R}\sin\psi\right)^{\frac{N-3}{2}}}u(y)\,dS_R(y)\right]d\varepsilon.$$

Выполним замену переменной $\varepsilon = \frac{\delta}{r}$. Получим

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}}\int_0^{\infty}L_{\frac{N-2}{2}}\left[e^{-\frac{\delta}{r}}\cdot r^{-\frac{N-1}{2}}\right]\times$$

$$\times\left[e^{-\delta}\int_{S_R}e^{\frac{1}{R}\varepsilon\cos\psi}\delta^{\frac{N-3}{2}}\frac{J_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{1}{R}\delta\sin\psi\right)}{\left(\frac{1}{R}\sin\psi\right)^{\frac{N-3}{2}}}u(y)\,dS_R(y)\right]d\delta.$$

Вычисления дают равенство

$$L_{\frac{N-2}{2}}\left[e^{-\frac{\delta}{r}}\cdot r^{-\frac{N-1}{2}}\right] = \left(\frac{\delta}{r}-\frac{N-2}{2}\right)e^{-\frac{\delta}{r}}\cdot r^{-\frac{N-1}{2}}.$$

Таким образом,

$$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}}\int_0^\infty\left(\frac{\delta}{r}-\frac{N-2}{2}\right)e^{-\frac{\delta}{r}}\cdot r^{-\frac{N-1}{2}}\times$$

$$\times\Big[e^{-\delta}\int_{S_R}e^{\frac{1}{R}\varepsilon\cos\psi}\delta^{\frac{N-3}{2}}\frac{J_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{1}{R}\delta\sin\psi\right)}{\left(\frac{1}{R}\sin\psi\right)^{\frac{N-3}{2}}}u\left(y\right)dS_R\left(y\right)\Big]d\delta.$$

Замена в интеграле вида $\delta=\varepsilon r$ приводит к формуле (6). □

Замечание. В случае гармонических функций $N=2$ результат установлен И. И. Бавриным в работе [2].

4. Распространение результатов. Пусть $l-$натуральное число и $\beta_1,\ldots,\beta_l$ — любые действительные числа с условием $\beta_j\geq 1,\ j\in\{1,\ldots,l\}$. В работе И. И. Баврина [2] введены операторы, действующие на функции, гармонические в единичном шаре B_1

$$L_{\beta_j}\left[u\right]=\beta_j u+\sum_{i=1}^{N}x_i u'_{x_i},\ j\in\{1,\ldots,l\};\ L_a^{(l)}\left[u\right]=L_{\beta_l}\ldots L_{\beta_1}\left[u\right].$$

Оператор, обратный к оператору L_{β_j}, определяется формулой

$$L_{\beta_j}^{(-1)}\left[u\right]=\int_0^1\varepsilon^{\beta_j-1}u\left(\varepsilon x\right)d\varepsilon,\quad \varepsilon x=\left(\varepsilon x_1,\ldots,\varepsilon x_N\right).$$

Следовательно, оператор обратный к $L_a^{(l)}$, обозначаемый в дальнейшем $L_a^{(-l)}$, имеет вид $L_a^{(-l)}\left[f\right]=L_{\beta_1}^{(-1)}\ldots L_{\beta_l}^{(-1)}\left[f\right]$. Рассмотрим также оператор $L_{\widetilde{a}a}^{(-\widetilde{l},l)}\left[u\right]=L_{\widetilde{a}}^{(-\widetilde{l})}L_a^{(l)}\left[u\right]$ (см.[2]), обратный для которого имеет вид $L_{a\widetilde{a}}^{(-l,\widetilde{l})}\left[u\right]=L_a^{(-l)}L_{\widetilde{a}}^{(\widetilde{l})}\left[u\right]$. Определим серию операторов, определенных на множестве функций $\Phi\left(\varepsilon\right)$ непрерывно-дифференцируемых на положительной полуоси $\Lambda_{\beta_j}\left[\Phi\right]=\left(\beta_j-1\right)\Phi-\varepsilon\Phi'_\varepsilon,\ \beta_j>1,\ j\in\{1,\ldots,l\}$. Обратный оператор однозначно определен в классе функций, ограниченных на действительной положительной полуоси и действует по правилу

$$\Lambda_{\beta_j}^{-1}\left[F\right]=\int_0^1\tau^{\beta_j-2}F\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right)d\tau,\ j\in\{1,\ldots,l\}.$$

Для доказательства проведем следующие вычисления

$$\Lambda_\beta^{-1}\Lambda_\beta\left[\Phi\right]=\int_0^1\tau^{\beta_j-2}\left[\ (\beta-1)\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right)-\frac{\varepsilon}{\tau}\Phi'\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right)\right]d\tau=$$

$$=\int_0^1\tau^{\beta_j-2}\ (\beta-1)\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right)d\tau+\int_0^1\tau^{\beta-1}d\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right)=$$

$$=\int_0^1\tau^{\beta_j-2}\ (\beta-1)\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right)d\tau+\Phi\left(\varepsilon\right)-\lim_{\tau\to 0}\tau^{\beta-1}\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right)-\int_0^1(\beta-1)\tau^{\beta-2}\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right)d\tau=\Phi\left(\varepsilon\right).$$

Определим также оператор $\Lambda_a^{(l)}\left[\Phi\right]=\Lambda_{\beta_l}\ldots\Lambda_{\beta_1}\left[\Phi\right]$. Тогда, оператор обратный к $\Lambda_a^{(l)}$, обозначаемый в дальнейшем $\Lambda_a^{(-l)}$, имеет вид $\Lambda_a^{(-l)}\left[\Phi\right]=\Lambda_{\beta_1}^{(-1)}\ldots\Lambda_{\beta_l}^{(-1)}\left[\Phi\right]$. Рассмотрим также оператор $\Lambda_{\widetilde{a}a}^{(-\widetilde{l},l)}\left[\Phi\right]=\Lambda_{\widetilde{a}}^{(-\widetilde{l})}\Lambda_a^{(l)}\left[\Phi\right]$, обратный для которого имеет вид

$$\Lambda_{a\widetilde{a}}^{(-l,\widetilde{l})}\left[\Phi\right]=\Lambda_a^{(-l)}\Lambda_{\widetilde{a}}^{(\widetilde{l})}\left[\Phi\right].$$

Теорема 2. *Пусть функция $u = u(x)$ гармонична в единичном шаре B_1 из E^N и непрерывна на $\overline{B}_1$, тогда для $x \in B$, $|x| = r < R \leq 1$, справедливо интегральное представление*

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^\infty \Lambda_{a\tilde{a}}^{(-l,\tilde{l})} [\Phi(\varepsilon)] \Big(\int_{S_R} e^{\frac{r}{R}\cdot\varepsilon\cos\psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{r}{R}\varepsilon\sin\psi\right)}{\left(\frac{r}{R}\sin\psi\right)^{\frac{N-3}{2}}} L_{a\tilde{a}}^{(l,-\tilde{l})} [u(y)] dS_R(y) \Big) d\varepsilon, \tag{8}$$

где $\Phi(\varepsilon) = e^{-\varepsilon}\left(\varepsilon - \frac{N-2}{2}\right)$.

Доказательство. Так как любые два оператора L_{β_i} и $L_{\beta_j}^{-1}$ коммутируют, то достаточно изучить два основных случая (а) и (б).

а) $L_{a\tilde{a}}^{(l,-\tilde{l})} = L_\beta^{-1}$. По основному свойству оператора L_β^{-1} для любого однородного гармонического многочлена степени n выполнено

$$L_\beta^{-1}[P_n(x)] = \frac{1}{\beta + n} P_n(x).$$

Получим равенство

$$\int_{S_1} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos\psi) L_\beta^{-1}[u(y)] dS_1(y) = \frac{1}{\beta+n} \int_{S_1} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos\psi) u(y) dS_1(y).$$

Интегрирование по частям приводит к равенству

$$\int_0^\infty \Lambda_\beta [\Phi(\varepsilon)] \varepsilon^n d\varepsilon = (\beta + n) \int_0^\infty \Phi(\varepsilon) \varepsilon^n d\varepsilon.$$

б) $L_{a\tilde{a}}^{(l,-\tilde{l})} = L_\beta$. По основному свойству оператора L_β для любого однородного гармонического многочлена степени n выполнено $L_\beta[P_n(x)] = (\beta + n) P_n(x)$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{S_1} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos\psi) L_\beta[u(y)] dS_1(y) = (\beta+n) \int_{S_1} T_n^{\frac{N-3}{2}}(\cos\psi) u(y) dS_1(y).$$

Осталось применить лемму 3, в которой положено $\omega(\varepsilon) = \varepsilon^{\beta-1}$, тогда

$$\int_0^\infty \Lambda_\beta^{-1}[\Phi(\varepsilon)] \varepsilon^n d\varepsilon = \int_0^1 \varepsilon^{\beta-1}\varepsilon^n d\varepsilon \cdot \int_0^\infty \Phi(\varepsilon)\varepsilon^n d\varepsilon = \frac{1}{\beta+n} \int_0^\infty \Phi(\varepsilon)\varepsilon^n d\varepsilon. \qquad \square$$

5. Интегральные формулы для бигармонических функций.

Теорема 3. *Пусть функция $u = u(x)$ гармонична в единичном шаре $B_1, B_1 \subset E^N$, функции $\Delta u(x), u = u(x)$, непрерывны на $\overline{B}_1$, тогда справедлива формула*

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^\infty \Phi(\varepsilon) \Big(\int_{S_R} e^{\frac{r}{R}\varepsilon\cos\psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{r}{R}\cdot\varepsilon\sin\psi\right)}{\left(\frac{r}{R}\sin\psi\right)^{\frac{N-3}{2}}} u(y) dS_R(y) \Big) d\varepsilon +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \frac{r^2 - R^2}{4} \int_0^\infty \Lambda_1^{-1}[\Phi(\varepsilon)] \Big(\int_{S_R} e^{\frac{r}{R}\cdot\varepsilon\cos\psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{r}{R}\varepsilon\sin\psi\right)}{\left(\frac{r}{R}\sin\psi\right)^{\frac{N-3}{2}}} \Delta[u(y)] dS_R(y) \Big) d\varepsilon, \tag{9}$$

Формула (9) восстанавливает функцию бигармоническую в шаре по значениям на внутренней сфере $\Delta u(x)$, $u(x)$, $x \in S_R$.

Доказательство. Как известно ([10]), для функции $u = u(x)$ справедлива структурная формула $u = u_0 + r^2 u_1$, где $u_0 = u_0(x)$, $u_1 = u_1(x)$ — функции гармонические в единичном шаре. На внутренней сфере S_R будут выполняться условия $u_0 + R^2 u_1 = u,\ 4L_1[u_1] = \Delta u$, где

$$L_1\left[u\right] = u + \sum_{i=1}^{N} x_i u'_{x_i}.$$

Из теорем 1, 2 следуют формулы

$$u_0 + R^2 u_1 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^\infty \Phi(\varepsilon) \left(\int_{S_R} e^{\frac{r}{R}\varepsilon\cos\psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{r}{R}\varepsilon\sin\psi\right)}{\left(\frac{r}{R}\sin\psi\right)^{\frac{N-3}{2}}} u\left(y\right) dS_R\left(y\right) \right) d\varepsilon,\ x \in B,$$

$$4u_1\left(x\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^\infty \Lambda_1^{-1}\left[\Phi\left(\varepsilon\right)\right] \left(\int_{S_R} e^{\frac{r}{R}\cdot\varepsilon\cos\psi} \varepsilon^{\frac{N-3}{2}} \frac{J_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{r}{R}\varepsilon\sin\psi\right)}{\left(\frac{r}{R}\sin\psi\right)^{\frac{N-3}{2}}} \Delta\left[u\left(y\right)\right] dS_R\left(y\right) \right) d\varepsilon.$$

Выражая из полученных равенств функции u_0 и u_1, получим доказываемую формулу. □

6. Заключение. Результаты содержащиеся в теоремах 1, 2, 3 могут быть применены для решения задачи Адамара ([3]) в сферическом слое, для решения обратных граничных задач ([3], [9]): например, по известному потоку через границу вычислить с точностью до постоянной величину поля на границе, обратно по известной величине поля на границе вычислить поток через границу. При этом остается вопрос обоснования предельного перехода при $r \to 1$ в формулах (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bavrin I.I. *Cauchy integral formula in the ring inverse problem*// Dokl. RAN. – 2009. – V.428, №2. – P. 151–152. (in Russian)
2. Bavrin I.I. Operational methods in complex analysis. – M.:Prometey, 1991. (in Russian)
3. Lavrent'ev M.A. Variational Methods for Boundary Value Problems: for Systems of Elliptic Equations. – Reprint. – USA: Dover Publications, 2006.
4. Belov Yu.Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations. – Utrecht: VSP, 2002.
5. Gradstein I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, series of products, 4th eds. – M.Fizmatgiz, 1963. (in Russian)
6. Abramowitz M., Stegun I.A., Orthogonal Polynomials Ch. 22 in Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. – New York: Dover, 1972. – P. 771–802.
7. Ditkin V.A., Prudnikov A.P., Integral transforms and operational calculus. – M: Nauka, 1974. (in Russian)
8. Bavrin I.I., Yaremko O.E., *Fourier integral on compact and their application to moments problem*// Dokl. RAN. – 2000. – V.374, №2. – P. 177–179. (in Russsian)
9. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskiy S.P. Ill Posed problems of mathematical physics and analysis. – M. Nauka, 1980. (in Russsian)
10. Weisstein, Eric W., *Biharmonic Equation*// Wolfram MathWorld.

Пензенский государственный университет
yaremki@mail.ru

Поступило 10.04.2012
После переработки 12.01.2013