УДК 512.553.2/531/533

Ю. Т. Біляк, Г. В. Зеліско, М. Я. Комарницький

# ПРО ПЕРВИННІ ТА КОНГРУЕНЦ-ПЕРВИННІ ПОЛІГОНИ НАД МОНОЇДОМ З НУЛЕМ

Yu. T. Bilyak, H. V. Zelisko, M. Ya. Komarnitskiy. *On prime and congruence-prime acts over monoid with zero*, Mat. Stud. **39** (2013), 29–33.

The properties of the prime and the congruence-prime acts over monoid with zero are investigated.

Ю. Т. Биляк, Г. В. Зелиско, Н. Я. Комарницкий. *О первичных и конгруэнц-первичных полигонах над моноидом с нулем* // Мат. Студії. – 2013. – Т.39, №1. – С.29–33.

Исследуются свойства первичных и конгруэнц-первичных полигонов над моноидом с нулем.

Багато питань, що виникають у теорії напівгруп і полігонів, подібні до тих, які виникають в теорії кілець і модулів. У публікаціях попередніх років, які стосуються цих структур, більшість отриманих результатів носить саме такий характер. В цьому руслі знаходяться дослідження первинних ідеалів в моноїдах чи в первинних підполігонах полігона. Задачі, які тут виникають, викликані бажанням отримати твердження про первинні полігони, які би стали аналогами відомих тверджень про первинні модулі. Позаяк теорія первинних підмодулів бурхливо розвивається, а також виникають різноманітні уточнення цього поняття та їхні застосування, то перенесення результатів про модулі на деякі класи полігонів, що є важливим для подальшого дослідження будови моноїдів, видається перспективним.

Оскільки поняття первинного модуля і первинного підмодуля мають багато відтінків зробимо декілька історичних зауважень щодо їхнього виникнення і їхнє порівняння. Первинні модулі вперше розглядались у статті Р. Е. Джонсона [1]. Інший підхід до первинних модулів запропонував В. О. Андрунакієвич ([2]). Потім Е. Г. Фелер та Е. В. Своковскі ([3]) вивчали первинні підмодулі деякого модуля, а Г. І. Каракас ([4]) вивчав такі ж підмодулі над комутативним кільцем. Систематичне дослідження первинних модулів в загальній ситуації провів Й. Даунс ([5]). Всі згадані автори використовували первинні модулі для характеризації тих чи інших радикалів. Зокрема, в [6] встановлено, що будь-який спеціальний радикал в категорії кілець можна охарактеризувати за допомогою деякого підкласу первинних модулів. У роботах [3, 5, 7, 8, 9] розглянуто різні означення первинних модулів, а в [10] встановлені зв'язки між цими поняттями. Потім властивість первинності модулів привертала увагу багатьох дослідників, яких навіть важко перелічити.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 20M30, 20M50.
*Keywords:* monoid, act, congruence, prime act, congruence-prime act, prime congruence.

Важливість поняття первинного модуля в теорії кілець привело до усвідомлення необхідності введення паодібного поняття в теорії напівгруп. Поняття первинного полігона можна вводити двома шляхами: або прямим узагальненням відповідних понять з теорії модулів, що базується на заміні підмодулів підполігонами, або важчим шляхом, який базується на використанні конгруенцій. Першим ввів та вивчав первинні полігони Е. Н. Ройз ([11]). Такі полігони досліджувалися також в працях Й. Ахсана і Л. Чжункуйа ([12]) та А. А. Істейжі і С. Таджні ([13]).

Нехай $S$ — моноїд з нулем.

**Означення 1.** Непорожня множина $A$ називається *правим $S$-полігоном (або правим полігоном над моноїдом $S$)*, якщо існує таке відображення $\mu\colon A \times S \to A$, $(a, s) \mapsto as$ що для всіх $s, t \in S$ і для всіх $a \in A$ виконуються умови $a \cdot 1 = a$, $a(st) = (as)t$, і має виділений елемент $\theta \in A$, з властивістю $\theta s = \theta$ для всіх $s \in S$. Позначатимемо цей елемент з $S$, як завжди, через 0.

**Означення 2.** Підполігон $B$ полігона $A$ називається *первинним*, якщо для довільних $a \in A$ та $s \in S$, з того, що $aSs \subseteq B$ випливає, що $a \in B$ або $As \subseteq B$. Правий полігон $A$ сам називається *первинним*, якщо підполігон $\{\theta\}$ є первинним підполігоном в $A$ ([12]).

Очевидно, що $B$ є первинним підполігоном полігона $A$ тоді і тільки тоді, коли $A/B$ є первинним.

Для довільного $a \in A$ визначимо множину $\mathrm{Ann}(a) = \{(s, t) \in S \times S \mid as = at\}$. Тоді $\mathrm{Ann}(a)$ є правою конгруенцією на $S$, яка називається *правим анулятором елемента $a$*.

Правим анулятором полігона $A$ називається $\mathrm{Ann}(A) = \bigcap_{a \in A} \mathrm{Ann}(a)$. Це двостороння конгруенція на $S$.

**Означення 3.** Правий $S$-полігон $A$ називається *конгруенц-первинним* ([11]), якщо для довільного його нетривіального підполігона $B$ виконується рівність $\mathrm{Ann}(A) = \mathrm{Ann}(B)$.

**Означення 4.** Правий $S$-полігон $A$ називається *конгруенц-первинним* ([10]), якщо для довільної такої конгруенції $\rho$ на $S$, що для деякого елемента $a \in A$ з того, що для всіх $(s, t) \in \rho$ випливає, що $as = at$, виконується: $\rho \subseteq \mathrm{Ann}(A)$ або $a = 0$.

У статті [13] доведено, що у випадку комутативного моноїда означення 1 і 2 еквівалентні. В статті [1] встановлено еквівалентність означень 2 та 3.

**Означення 5.** Правий $S$-полігон $A$ називається *точним*, якщо $\mathrm{Ann}(A) = \Delta$, де $\Delta$ — одинична конгруенція на $A$.

**Означення 6.** Якщо $B$ — підполігон $S$-полігона, то конгруенція $J_B = \mathrm{Ann}(A/B)$ називається *асоційованою з $B$*.

Виявилося, що первинні полігони тісно пов'язані з слабо скоротними напівгрупами.

**Означення 7.** Напівгрупа $S$ називається *слабо скоротною зліва* або *слабо праворегулярною*, якщо для довільних $a, x, y \in S$ з того, що $asx = asy$ для всіх $s \in S$ випливає, що або $a = 0$, або $x = y$.

Конгруенц-первинні полігони тісно зв'язані з первинними конгруенціями, які вивчалися вже давно ([14]).

**Означення 8.** Права конгруенція $\rho$ на моноїді $S$ називається *первинною*, якщо $S/\rho$ є слабо скоротною зліва напівгрупою.

**Твердження 1.** *Права конгруенція $\rho$ є первинною тоді і тільки тоді, коли правий полігон $S/\rho$ є конгруенц-первинним.*

*Доведення.* Якщо $\rho$ — первинна конгруенція, то $S/\rho$ є слабо скоротною зліва напівгрупою, тобто для довільних $a, x, y \in S/\rho$ з того, що $asx = asy$ для всіх $s \in S$ випливає, що або $a = 0$, або $x = y$. Покажемо, що правий полігон $S/\rho$ є конгруенц-первинним. Для довільної конгруенції $\tau$ на $S$ такої, що для деякого елемента $a \in S/\rho$ з того, що для всіх $(sx, sy) \in \tau$ випливає, що $asx = asy$, виконується: або $a = 0$, або $x = y$, але тоді $sx = sy$, $(sx, sy) \in \operatorname{Ann}(S/\rho)$, звідси $\tau \subseteq S/\rho$. Отже, за означенням 4 правий полігон $S/\rho$ є конгруенц-первинним.

Якщо $S/\rho$ — конгруенц-первинний правий полігон, то для довільної конгруенції $\tau$ на $S$ такої, що для деякого елемента $a \in S/\rho$ з того, що для всіх $(s, t) \in \tau$ випливає, що $as = at$, виконується $a = 0$ або $\tau \subseteq S/\rho$. Тоді для довільних $a, x, y \in S/\rho$ з того, що $asx = asy$ для всіх $s \in S$ випливає, що або $a = 0$, або $(sx, sy) \in \operatorname{Ann}(S/\rho)$, тоді $sx = sy$ для всіх $s \in S$, отже, $x = y$. Тому $S/\rho$ є слабо скоротною зліва напівгрупою, отже, права конгруенція $\rho$ є первинною. □

Наведені нижче п'ять тверджень описують деякі властивості конгруенц-первинних підполігонів фіксованого $S$-полігона.

**Твердження 2.** *Кожний ненульовий $S$-підполігон $B$ конгруенц-первинного правого $S$-полігона $A$ є конгруенц-первинним.*

*Доведення.* Якщо $A$ — правий конгруенц-первинний полігон, то для довільного його нетривіального підполігона $B$ виконується умова $\operatorname{Ann}(B) = \operatorname{Ann}(A)$. Припустимо, що підполігон $B$ не є конгруенц-первинним, тоді існує такий його нетривіальний підполігон $C$, що $\operatorname{Ann}(C) \neq \operatorname{Ann}(B)$. Але тоді $\operatorname{Ann}(C) \neq \operatorname{Ann}(A)$, що суперечить конгруенц-первинності полігона $A$. □

**Твердження 3.** *Якщо $B$ конгруенц-первинний підполігон правого $S$-полігона $A$, то асоційована конгруенція $J_B = \operatorname{Ann}(A/B)$ є первинною конгруенцією на $S$.*

*Доведення.* Якщо $B$ — конгруенц-первинний підполігон правого $S$-полігона $A$, то фактор-полігон $A/B$ є конгруенц-первинним. Тоді для довільного його нетривіального підполігона $C/B$ виконується рівність $\operatorname{Ann}(A/B) = \operatorname{Ann}(C/B)$, де $C$ — деякий підполігон полігона $A$. Тому згідно з твердженням 1 $J_B = \operatorname{Ann}(A/B)$ є первинною конгруенцією на $S$. □

**Твердження 4.** *Правий $S$-полігон $A$ є конгруенц-первинним тоді і тільки тоді, коли всі його ненульові підполігони мають однакові асоційовані конгруенції.*

*Доведення.* Якщо правий $S$-полігон $A$ є конгруенц-первинним, то для довільного його нетривіального підполігона $B$ виконується рівність $\operatorname{Ann}(B) = \operatorname{Ann}(A)$. Тоді для довільних ненульових підполігонів $B \subseteq A$ і $C \subseteq A$, $\operatorname{Ann}(B) = \operatorname{Ann}(A)$ і $\operatorname{Ann}(C) = \operatorname{Ann}(A)$, отже $\operatorname{Ann}(B) = \operatorname{Ann}(C)$. Тому $\operatorname{Ann}(A/B) = \operatorname{Ann}(A/C)$, отже $J_B = J_C$.

Якщо для довільних ненульових підполігонів $B$ та $C$ правого полігона $A$ виконується $J_B = J_C$, тобто $\operatorname{Ann}(A/B) = \operatorname{Ann}(A/C)$, то $\operatorname{Ann}(B) = \operatorname{Ann}(C)$, тоді $\operatorname{Ann}(B) = \operatorname{Ann}(A)$. Отже, $A$ є конгруенц-первинним полігоном. □

**Твердження 5.** *Моноїд $S$ є конгруенц-первинним тоді і тільки тоді, коли існує точний конгруенц-первинний $S$-полігон.*

*Доведення.* Якщо моноїд $S$ є конгруенц-первинним, то для довільного нетривіального підполігона регулярного полігона $S_S$ $\mathrm{Ann}(S) = \mathrm{Ann}(B)$. Тоді $\mathrm{Ann}(S) = 0$. Отже, $S_S$ — точний конгруенц-первинний $S$-полігон.

Якщо $A$ — точний конгруенц-первинний $S$-полігон, то $\mathrm{Ann}(A) = 0$, тоді $\mathrm{Ann}(S) = 0$, отже, $S$ — конгруенц-первинний моноїд. □

**Твердження 6.** *Нехай $\rho$ — права конгруенція на $S$. Тоді такі умови еквівалентні:*

*1) $\rho$ є первинною конгруенцією;*

*2) існує такий конгруенц-первинний $S$-полігон $A$, що $\rho = J_B$.*

*Доведення.* Якщо $\rho$ — первинна конгруенція, то за твердженням 1 правий полігон $A = S/\rho$ є конгруенц-первинним і за твердженням 5 існує точний конгруенц-первинний $S$-полігон $B$, що $\rho = \mathrm{Ann}(A/B)$, тобто $\rho = J_B$.

Якщо $\rho$ — права конгруенція на $S$ і існує такий конгруенц-первинний $S$-полігон $A$, що $\rho = J_B$, то за твердженням 3 $J_B$ є первинною конгруенцією. Отже, $\rho$ — первинна конгруенція. □

Визначимо правий $S$-полігон $\mathcal{C} = \{\sigma | \sigma$ *— права конгруенція на* $S\}$, де дія $S$ на $\mathcal{C}$ задається правими трансляціями: якщо $\sigma \in \mathcal{C}$ і $s \in S$, то права трансляція $\sigma$ на $s$ це права конгруенція $\sigma^s$ на $S$, задана правилом $a\ \sigma^s\ b$ тоді і тільки тоді, коли $sa\ \sigma\ sb$.

Нагадаємо, що якщо $A$ і $B$ — праві $S$-полігони, то гомоморфізмом правих $S$-полігонів називається така функція $f\colon A \to B$, що $f(as) = f(a)s$ для всіх $s \in S$ та $a \in A$.

Якщо $A$ — довільний правий $S$-полігон і $\mathcal{C}$ — полігон визначений вище, то визначимо функцію $\varphi\colon A \to \mathcal{C}$ за правилом $\varphi(a) = \sigma_a$, де $\sigma_a = \{(s,t) \in S \times S \mid as = at\}$, тобто $\sigma_a = \mathrm{Ann}(a)$.

Покажемо, що задана функція $\varphi\colon A \to \mathcal{C}$ є гомоморфізмом правих $S$-полігонів. Справді, припустимо, що $a \in A$ і $s \in S$. Тоді $\varphi(as) = \sigma_{as}$. Але $x\ \sigma_{as}\ y$ тоді і тільки тоді, коли $(as)x = (as)y$, а це виконується тоді і тільки тоді, коли $sx\ \sigma_a\ sy$. Але тоді $\sigma_{as} = (\sigma_a)^s$, тому $\varphi(as) = (\varphi(a))^s$. Отже, $\varphi$ є гомоморфізмом.

**Означення 9.** Підполігон $B$ полігона $A$ називається *класично первинним*, якщо для довільних $a \in A$ та $s,t \in S$, з того, що $asSt \subseteq B$ випливає, що $as \in B$ або $at \in B$.

**Твердження 7.** *Якщо $B$ — класично первинний підполігон полігона $A$, то його образ $\varphi(B)$ є класично первинним $S$-підполігоном в $\mathcal{C}$.*

*Доведення.* Покажемо, що для довільних $s,t \in S$ і для довільної конгруенції $\sigma_a \in \mathcal{C}$ з того, що $\sigma_a^{sSt} \subseteq \varphi(B)$ випливає, що $\sigma_a^s \in \varphi(B)$ або $\sigma_a^t \in \varphi(B)$.

Якщо $\sigma_a^{sSt} \subseteq \varphi(B)$, то $\varphi(a)^{sSt} \subseteq \varphi(B)$, але тоді $\varphi(asSt) \subseteq \varphi(B)$, тобто $asSt \subseteq B$.

Оскільки $B$ — класично первинний підполігон полігона $A$, то для довільних $a \in A$ та $s,t \in S$, з того, що $asSt \subseteq B$ випливає, що $as \in B$ або $at \in B$.

Якщо $as \in B$, то $\varphi(as) \in \varphi(B)$, тобто $\varphi(a)^s \in \varphi(B)$, отже, $\sigma_a^s \in \varphi(B)$. Якщо ж $at \in B$, то $\varphi(at) \in \varphi(B)$, тобто $\varphi(a)^t \in \varphi(B)$, отже, $\sigma_a^t \in \varphi(B)$. □

**Твердження 8.** *Якщо $B$ — первинний підполігон полігона $A$, то його образ $\varphi(B)$ є первинним $S$-підполігоном в $\mathcal{C}$.*

*Доведення.* Покажемо, що для довільного $s \in S$ і для довільної конгруенції $\sigma_a \in \mathcal{C}$ з того, що $\sigma_a^{Ss} \subseteq \varphi(B)$ випливає, що $\sigma_a \in \varphi(B)$ або $\mathcal{C}s \subseteq \varphi(B)$.

Якщо $\sigma_a^{Ss} \subseteq \varphi(B)$, то $\varphi(a)^{Ss} \subseteq \varphi(B)$, але тоді $\varphi(aSs) \subseteq \varphi(B)$, тобто $aSs \subseteq B$.

Оскільки $B$ — первинний підполігон полігона $A$, то для довільних $a \in A$ та $s \in S$, з того, що $aSs \subseteq B$ випливає, що $a \in B$ або $As \subseteq B$.

Якщо $a \in B$, то $\varphi(a) \in \varphi(B)$, тобто $\sigma_a \in \varphi(B)$. Якщо ж $As \subseteq B$, то $\varphi(As) \subseteq \varphi(B)$, тобто $\varphi(A)^s \subseteq \varphi(B)$, отже, $\mathcal{C}s \subseteq \varphi(B)$. □

**Твердження 9.** *Якщо $A$ — конгруенц-первинний $S$-полігон, і $\varphi$ — ін'єктивний гомоморфізм, то $\varphi(A)$ є конгруенц-первинним $S$-підполігоном в $\mathcal{C}$.*

*Доведення.* Покажемо, що якщо для довільної конгруенції $\rho$ на $S$ такої, що для деякого елемента $\varphi(a)$ з того, що для всіх $(s,t) \in \rho$ випливає, що $\varphi(a)^s = \varphi(a)^t$, виконується: $\rho \subseteq \mathrm{Ann}(\varphi(A))$ або $\varphi(a) = 0$.

Якщо $\varphi(a)^s = \varphi(a)^t$, то $\varphi(as) = \varphi(at)$. Оскільки гомоморфізм $\varphi$ — ін'єктивний, то тоді $as = at$. Оскільки $A$ — конгруенц-первинний полігон, то за означенням 4 або $\rho \subseteq \mathrm{Ann}(A)$, або $a = 0$.

Якщо $\rho \subseteq \mathrm{Ann}(A)$, то існує такий елемент $b \in A$, що $\rho \subseteq \mathrm{Ann}(b)$, тобто $\rho \subseteq \{(x,y) \in S \times S |\ bx = by\}$. Якщо $bx = by$, то $\varphi(bx) = \varphi(by)$, отже, $\varphi(b)^x = \varphi(b)^y$, тобто $\rho \subseteq \mathrm{Ann}(\varphi((b))$. Тому $\rho \subseteq \mathrm{Ann}(\varphi(A))$. Якщо ж $a = 0$, то $\varphi(a) = 0$. □

## ЛІТЕРАТУРА


1. R.E. Johnson, *Representations of prime rings,* Trans. Amer. Math. Soc., **74** (1953), №2, 351–357.
2. V.A. Andrunakievich, *Prime modules and Baer radical,* Siberian Mathematical Journal, **2** (1961), №6, 801–806. (in Russian)
3. E.H. Feller, E.W. Swokowski, *Prime modules,* Can. J. Math., **17** (1965), 1041–1052.
4. H.I. Karakas, *On Noetherian modules,* Metu Journal of Pure and Applied Science, **5** (1972), 165–168.
5. J. Dauns, *Prime modules,* J. Reine Angew. Math., **298** (1978), 156–181.
6. V.A. Andrunakievich, Ju.M. Rjabuhin, *Special modules and special radicals,* Doklady Akademii Nauk, **147** (1962), №6, 1274–1277. (in Russian)
7. J. Beachy, *Some aspects of noncommutative localization,* Lect. Notes Math., **545** (1976), 2–31.
8. L. Bican, P. Jampor, T. Kepka, P. Nemec, *Prime and coprime modules,* Fund. Math., **57** (1980), 33–45.
9. D. Handelman, J. Lawrence, *Strongly prime rings,* Trans. Amer. Math. Soc., **211** (1975), 209–223.
10. R. Wisbauer, *On prime modules and rings,* Commun. Algebra, **11** (1983), 2249–2265.
11. E.N. Roiz, *The Jacobson and Baer radicals of rings, and their multiplicative semigroups,* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **10** (1975), 71–79. (in Russian)
12. J. Ahsan, L. Zhongkui, *Prime and semiprime acts over monoids with zero,* Math. J., Ibaraki Univ., **33** (2001), 9–15.
13. A.A. Estaji, S. Tajnia, *Prime subacts over commutative monoids with zero,* Lobachevskii Journal of Mathematics, **32** (2011), №4, 358–365.
14. H.J. Hoehuke, *Über das untere und obere Radikal einer Halbgruppe,* Math. Z., **89** (1965), 300–311.


Львівський національний університет імені І. Франка
jbilyak@ukr.net, zelisko_halyna@yahoo.com,
mykola_komarnytsky@yahoo.com

*Надійшло 15.10.2012*