УДК 515.126

Т. В. Рибалкіна

# ТОПОЛОГІЧНА КЛАСИФІКАЦІЯ ПАР ЗУСТРІЧНИХ ЛІНІЙНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

T. V. Rybalkina. *Topological classification of pairs of counter linear maps*, Mat. Stud. **39** (2013), 21–28.

We consider pairs of linear mappings $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ of the form

$$V \underset{\mathcal{B}}{\overset{\mathcal{A}}{\rightleftarrows}} W$$

in which $V$ and $W$ are finite dimensional unitary or Euclidean spaces over $\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$, respectively. Let $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ be transformed to

$$V' \underset{\mathcal{B}'}{\overset{\mathcal{A}'}{\rightleftarrows}} W'$$

by bijections $\varphi_1\colon V\to V'$ and $\varphi_2\colon W\to W'$. We say that $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ and $(\mathcal{A}',\mathcal{B}')$ are linearly equivalent if $\varphi_1$ and $\varphi_2$ are linear bijections and topologically equivalent if $\varphi_1$ and $\varphi_2$ are homeomorphisms. We prove that $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ and $(\mathcal{A}',\mathcal{B}')$ are topologically equivalent if and only if their regular parts are topologically equivalent and their singular parts are linearly equivalent.

Т. В. Рыбалкина. *Топологическая классификация пар встречных линейных отображений* // Мат. Студії. – 2013. – Т.39, №1. – C.21–28.

Рассматриваются пары линейных отображений $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ вида

$$V \underset{\mathcal{B}}{\overset{\mathcal{A}}{\rightleftarrows}} W,$$

где $V$ и $W$ — конечномерные унитарные или евклидовы пространства над полем $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, соответственно. Пусть $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ преобразуется в

$$V' \underset{\mathcal{B}'}{\overset{\mathcal{A}'}{\rightleftarrows}} W'$$

биекциями $\varphi_1\colon V\to V'$ и $\varphi_2\colon W\to W'$. Пары $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ и $(\mathcal{A}',\mathcal{B}')$ называются линейно эквивалентными, если $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — линейные биекции и топологически эквивалентными, если $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — гомеоморфизмы. Доказывается, что $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ и $(\mathcal{A}',\mathcal{B}')$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их регулярные части топологически эквивалентны и их сингулярные части линейно эквивалентны.

**1. Вступ.** Розглядаємо задачу класифікації з точністю до топологічної еквівалентності пар $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ лінійних відображень

$$V \underset{\mathcal{B}}{\overset{\mathcal{A}}{\rightleftarrows}} W, \tag{1}$$

де $V$ та $W$ є скінченновимірними унітарними просторами над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ (або скінченновимірними евклідовими просторами над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$).

2010 *Mathematics Subject Classification:* 15A21, 37C15.
*Keywords:* pairs of counter maps; topological equivalence.

Скажемо, що бієкції $\varphi_1\colon V\to V'$, $\varphi_2\colon W\to W'$ *перетворюють пару* (1) *в пару*

$$V' \underset{\mathcal{B}'}{\overset{\mathcal{A}'}{\rightleftarrows}} W'$$

та пишемо $\varphi\colon(\mathcal{A},\mathcal{B})\xrightarrow{\sim}(\mathcal{A}',\mathcal{B}')$, якщо діаграми

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{A}} & W \\ {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} \\ V' & \xrightarrow{\mathcal{A}'} & W' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\mathcal{B}} & V \\ {\scriptstyle\varphi_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} \\ W' & \xrightarrow{\mathcal{B}'} & V' \end{array} \tag{2}$$

комутативні, тобто,

$$\mathcal{A}'\varphi_1=\varphi_2\mathcal{A} \quad \text{та} \quad \mathcal{B}'\varphi_2=\varphi_1\mathcal{B}. \tag{3}$$

**Означення 1.** Перетворення $\varphi\colon(\mathcal{A},\mathcal{B})\xrightarrow{\sim}(\mathcal{A}',\mathcal{B}')$ називають:

(i) *лінійною еквівалентністю*, якщо $\varphi_1\colon V\to V'$ та $\varphi_2\colon W\to W'$ — ізоморфізми відповідних лінійних просторів;

(ii) *топологічною еквівалентністю*, якщо $\varphi_1\colon V\to V'$ та $\varphi_2\colon W\to W'$ — гомеоморфізми відповідних просторів у їхній природній топології.

За теоремою про інваріантність розмірності ([14, розділ 11, с. 15]) гомеоморфні скінченновимірні евклідові простори мають однакову розмірність. Оскільки комплексний простір розмірності $n$ можна розглядати як дійсний простір розмірності $2n$, то гомеоморфні скінченновимірні унітарні простори також мають однакові розмірності. Тому в (ii) $\dim V=\dim V'$ та $\dim W=\dim W'$.

Очевидно, що кожна лінійна бієкція скінченновимірних унітарних (або евклідових) просторів є гомеоморфізмом, тому

$$\text{перетворення } \varphi\colon(\mathcal{A},\mathcal{B})\xrightarrow{\sim}(\mathcal{A}',\mathcal{B}') \text{ — лінійна еквівалентність}$$
$$\Longrightarrow \varphi \text{ — топологічна еквівалентність.}$$

**2. Попередні відомості.** Пара лінійних відображень $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ з (1) в деякому базисі буде задаватись парою матриць $(A,B)$. Очевидно, що дві пари лінійних відображень $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ та $(\mathcal{A}',\mathcal{B}')$ лінійно еквівалентні, тоді і тільки тоді, коли їхні відповідні матриці зв'язані таким співвідношенням

$$(R^{-1}AS,\ S^{-1}BR)=(A',B'), \tag{4}$$

де $R$ та $S$ — деякі невироджені матриці.

Згідно з [1] (див. також [12, 18]), довільна пара $(A,B)$ матриць розміру $m\times n$ та $n\times m$ над полем $\mathbb{C}$ перетвореннями (4) зводиться до прямої суми пар, визначеної однозначно з точністю до перестановки доданків, наступного вигляду

$$(I_k,J_k(\lambda)),\ (J_k(0),I_k),\ (F_k,G_k^T),\ (F_k^T,G_k), \tag{5}$$

де

$$F_k=\begin{bmatrix}1&0&&0\\&\ddots&\ddots&\\0&&1&0\end{bmatrix},\quad G_k=\begin{bmatrix}0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\0&&0&1\end{bmatrix}\quad (k\geq 1) \tag{6}$$

є $(k-1)\times k$ матрицями, а $J_k(\lambda)$ — верхньотрикутний жордановий блок. Пряма сума пар матриць визначена наступним чином

$$(A,B)\oplus(C,D)=(A\oplus C,\, B\oplus D)=\left(\begin{bmatrix}A&0\\0&C\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B&0\\0&D\end{bmatrix}\right).$$

Зауважимо, що матриці $F_1$ та $G_1$ в (6) мають розмір $0\times 1$. Вважається, що існує тільки одна матриця, яку позначають $0_{k0}$, що має розмір $k\times 0$ та тільки одна матриця, яку позначають $0_{0k}$, що має розмір $0\times k$, для кожного невід'ємного цілого $k$; їм відповідають лінійні відображення $0\to\mathbb{C}^k$ та $\mathbb{C}^k\to 0$. Тоді

$$M_{pq}\oplus 0_{m0}=\begin{bmatrix}M_{pq}&0\\0&0_{m0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{pq}&0_{p0}\\0_{mq}&0_{m0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{pq}\\0_{mq}\end{bmatrix}$$

та

$$M_{pq}\oplus 0_{0n}=\begin{bmatrix}M_{pq}&0\\0&0_{0n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{pq}&0_{pn}\\0_{0q}&0_{0n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{pq}&0_{pn}\end{bmatrix}$$

для довільної $p\times q$ матриці $M_{pq}$.

Пара дійсних матриць $(A,B)$ дійсними перетвореннями (4) зводиться до прямої суми, визначеної однозначно з точністю до перестановки доданків, пар вигляду (5) з $\lambda\in\mathbb{R}$ та

$$J_k(a+bi)^{\mathbb{R}}:=\begin{bmatrix}\Lambda&I_2&&0\\&\Lambda&\ddots&\\&&\ddots&I_2\\0&&&\Lambda\end{bmatrix},\quad \Lambda:=\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix},\quad a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0, \tag{7}$$

де $I_2$ — одинична матриця розміру $2\times 2$.

Пряму суму доданків вигляду

$$(I_k,J_k(\lambda)),\quad \lambda\neq 0 \tag{8}$$

з канонічного розкладу (5) пари матриць $(A,B)$ називають *регулярною частиною* $(A,B)$ та позначають $(A_r,B_r)$ (зауважимо, що для пари комплексних матриць $J_k(\lambda)$ — жордановий блок з $\lambda\in\mathbb{C}$, а для пари дійсних матриць $J_k(\lambda)$ — жордановий блок з $\lambda\in\mathbb{R}$ та має вигляд (7) (тобто складається з $2\times 2$ матриць $\Lambda$ та $I_2$) для $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$); пряму суму решти доданків в (5) вигляду

$$(I_k,J_k(0)),\ (J_k(0),I_k),\ (F_k,G_k^T),\ (F_k^T,G_k) \tag{9}$$

називають *сингулярною частиною* $(A,B)$ та позначають $(A_S,B_S)$.

Тобто пара матриць $(A,B)$ перетвореннями (4) зводиться до вигляду $(A_r,B_r)\oplus(A_S,B_S)$. Позначимо через $\mathcal{A}_r,\mathcal{B}_r,\mathcal{A}_S,\mathcal{B}_S$ лінійні відображення, які задаються матрицями $A_r,B_r,A_S,B_S$, тоді

$$\text{пара } (\mathcal{A},\mathcal{B}) \quad \text{лінійно еквівалентна до} \quad (\mathcal{A}_r,\mathcal{B}_r)\oplus(\mathcal{A}_S,\mathcal{B}_S). \tag{10}$$

**3. Основний результат.** Основним результатом цієї статті є така теорема.

**Теорема 1.** (а) *Дві пари лінійних відображень* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *та* $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ *на унітарних (або евклідових) просторах топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їхні регулярні частини* $(\mathcal{A}_{\mathcal{r}}, \mathcal{B}_{\mathcal{r}})$ *та* $(\mathcal{A}'_{\mathcal{r}}, B'_{\mathcal{r}})$ *(див. (10)) топологічно еквівалентні, а сингулярні частини* $(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}, \mathcal{B}_{\mathcal{S}})$ *та* $(\mathcal{A}'_{\mathcal{S}}, \mathcal{B}'_{\mathcal{S}})$ *лінійно еквівалентні.*

(б) *Пара лінійних біекцій* $(\mathcal{A}_{\mathcal{r}}, \mathcal{B}_{\mathcal{r}})$ *лінійно еквівалентна з парою* $(id, \mathcal{B}_{\mathcal{r}}\mathcal{A}_{\mathcal{r}})$

$$V_{\mathcal{r}} \underset{\mathcal{B}_{\mathcal{r}}\mathcal{A}_{\mathcal{r}}}{\overset{id}{\rightleftarrows}} V_{\mathcal{r}}$$

*де* $id$ *— тотожне відображення,* $V_{\mathcal{r}}$ *— унітарний (або евклідовий) векторний простір. Тобто пари лінійних відображень* $(\mathcal{A}_{\mathcal{r}}, \mathcal{B}_{\mathcal{r}})$ *та* $(\mathcal{A}'_{\mathcal{r}}, B'_{\mathcal{r}})$ *топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли лінійні відображення* $\mathcal{B}_{\mathcal{r}}\mathcal{A}_{\mathcal{r}}$ *та* $\mathcal{B}'_{\mathcal{r}}\mathcal{A}'_{\mathcal{r}}$ *топологічно спряжені (нагадаємо, що відображення* $f\colon V \to V$ *та* $g\colon V' \to V'$ *називають топологічно спряженими, якщо існує гомеоморфізм* $\varphi\colon V \to V'$ *такий, що* $f = \varphi^{-1}g\varphi$*).*

*Доведення.* (а) ($\Longleftarrow$) Очевидно, що з лінійної еквівалентності відображень випливає їхня топологічна еквівалентність.

Надалі, у випадку, коли дві пари лінійних відображень $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ та $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ топологічно еквівалентні, вживатимемо позначення

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{A}', \mathcal{B}').$$

Очевидно, що з $(\mathcal{A}_{\mathcal{r}}, \mathcal{B}_{\mathcal{r}}) \sim (\mathcal{A}'_{\mathcal{r}}, \mathcal{B}'_{\mathcal{r}})$ та $(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}, \mathcal{B}_{\mathcal{S}}) \sim (\mathcal{A}'_{\mathcal{S}}, \mathcal{B}'_{\mathcal{S}})$ випливає

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{r}}, \mathcal{B}_{\mathcal{r}}) \oplus (\mathcal{A}_{\mathcal{S}}, \mathcal{B}_{\mathcal{S}}) \sim (\mathcal{A}'_{\mathcal{r}}, \mathcal{B}'_{\mathcal{r}}) \oplus (\mathcal{A}'_{\mathcal{S}}, \mathcal{B}'_{\mathcal{S}}).$$

($\Longrightarrow$) Нехай $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ та $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ — пари лінійних відображень. Зафіксуємо базиси, в яких їхні матриці мають вигляд (5). З (10) маємо, що існують розклади $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathcal{A}_{\mathcal{r}}, \mathcal{B}_{\mathcal{r}}) \oplus (\mathcal{A}_{\mathcal{S}}, \mathcal{B}_{\mathcal{S}})$ і $(\mathcal{A}', \mathcal{B}') = (\mathcal{A}'_{\mathcal{r}}, \mathcal{B}'_{\mathcal{r}}) \oplus (\mathcal{A}'_{\mathcal{S}}, \mathcal{B}'_{\mathcal{S}})$. Їм відповідають розклади просторів $V, V', W, W'$ в пряму суму відповідних інваріантних підпросторів

$$V = V_{\mathcal{r}} \oplus V_{\mathcal{S}}, \quad V' = V'_{\mathcal{r}} \oplus V'_{\mathcal{S}}, \quad W = W_{\mathcal{r}} \oplus W_{\mathcal{S}}, \quad W' = W'_{\mathcal{r}} \oplus W'_{\mathcal{S}},$$

такі, що

$$V_r \underset{\mathcal{B}_r}{\overset{\mathcal{A}_r}{\rightleftarrows}} W_r\,, \quad V_s \underset{\mathcal{B}_s}{\overset{\mathcal{A}_s}{\rightleftarrows}} W_s\,, \quad V'_r \underset{\mathcal{B}'_r}{\overset{\mathcal{A}'_r}{\rightleftarrows}} W'_r\,, \quad V'_s \underset{\mathcal{B}'_s}{\overset{\mathcal{A}'_s}{\rightleftarrows}} W'_s\,.$$

Позначимо

$$n := \dim V, \quad m := \dim W, \quad p := \dim V_{\mathcal{r}}, \quad q := \dim V'_{\mathcal{r}}.$$

Пара $(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}, \mathcal{B}_{\mathcal{S}})$ задається парою матриць $(A_{\mathcal{S}}, B_{\mathcal{S}})$, яка є прямою сумою канонічних доданків вигляду (9). Відповідно, лінійне відображення $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}\mathcal{A}_{\mathcal{S}}\colon V_{\mathcal{S}} \to V_{\mathcal{S}}$ задається матрицею $B_{\mathcal{S}}A_{\mathcal{S}}$, яка є прямою сумою матриць вигляду

$$J_k(0)I_k = J_k(0), \quad I_kJ_k(0) = J_k(0), \quad G_k^TF_k = J_k^T(0), \quad G_kF_k^T = J_{k-1}(0). \tag{11}$$

Аналогічно, лінійне відображення $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}\mathcal{B}_{\mathcal{S}}\colon W_{\mathcal{S}} \to W_{\mathcal{S}}$ задається матрицею $A_{\mathcal{S}}B_{\mathcal{S}}$, яка є прямою сумою матриць вигляду

$$I_kJ_k(0) = J_k(0), \quad J_k(0)I_k = J_k(0), \quad F_kG_k^T = J_{k-1}^T(0), \quad F_k^TG_k = J_k(0). \tag{12}$$

Нехай пари лінійних відображень $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ та $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ топологічно еквівалентні. Для кожного $i \in \{1, 2, \dots\}$, розглянемо образи відображень $(\mathcal{B}\mathcal{A})^i$, $(\mathcal{B}'\mathcal{A}')^i$ та $(\mathcal{A}\mathcal{B})^i$, $(\mathcal{A}'\mathcal{B}')^i$

$$V_i := (\mathcal{B}\mathcal{A})^iV = V_{\mathcal{r}} \oplus \mathcal{J}_{n-p}^{\,i}V_{\mathcal{S}}, \quad V'_i := (\mathcal{B}'\mathcal{A}')^iV' = V'_{\mathcal{r}} \oplus \mathcal{J}'^{\,i}_{n-q}V'_{\mathcal{S}}\,, \tag{13}$$

$$W_i := (\mathcal{AB})^i W = W_{\mathcal{R}} \oplus \mathcal{J}^i_{m-p} W_{\mathcal{S}}, \qquad W'_i := (\mathcal{A}'\mathcal{B}')^i W' = W'_{\mathcal{R}} \oplus \mathcal{J}'^i_{m-q} W'_{\mathcal{S}} \tag{14}$$

відповідно, де $\mathcal{J}_k(x) := J_k x$ та $\mathcal{J}'_k(x) := J'_k x$ — лінійні відображення з жордановими нільпотентними $k \times k$ матрицями $J_k$ та $J'_k$, які є прямими сумами матриць з (11) та (12), відповідно. Множини (13) та (14) є векторними підпросторами в $V$ та $W$, відповідно, причому їхні розмірності такі

$$\begin{aligned} \dim V_i = p + \operatorname{rank} J^i_{n-p}, \qquad & \dim V'_i = q + \operatorname{rank} J'^i_{n-q}, \\ \dim W_i = p + \operatorname{rank} J^i_{m-p}, \qquad & \dim W'_i = q + \operatorname{rank} J'^i_{m-q}. \end{aligned} \tag{15}$$

Оскільки, пари лінійних відображень $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ та $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ за припущенням — топологічно еквівалентні, то існують гомеоморфізми $\varphi_1 \colon V \to V'$ та $\varphi_2 \colon W \to W'$ такі, що виконуються рівності (3), звідки

$$\varphi_1 \mathcal{BA} = \mathcal{B}'\mathcal{A}'\varphi_1, \quad \varphi_2 \mathcal{AB} = \mathcal{A}'\mathcal{B}'\varphi_2. \tag{16}$$

З першої рівності в (16), для лінійних відображень $(\mathcal{BA})^i$ та $(\mathcal{B}'\mathcal{A}')^i$ маємо

$$\varphi_1 (\mathcal{BA})^i = (\mathcal{B}'\mathcal{A}')^i \varphi_1, \; \varphi_1 (\mathcal{BA})^i V = (\mathcal{B}'\mathcal{A}')^i \varphi_1 V = (\mathcal{B}'\mathcal{A}')^i V', \; \varphi_1 V_i = V'_i, \tag{17}$$

а з другої рівності в (16), для $(\mathcal{AB})^i$ та $(\mathcal{A}'\mathcal{B}')^i$ отримуємо

$$\varphi_2 (\mathcal{AB})^i = (\mathcal{A}'\mathcal{B}')^i \varphi_2, \; \varphi_2 (\mathcal{AB})^i W = (\mathcal{A}'\mathcal{B}')^i \varphi_2 W = (\mathcal{A}'\mathcal{B}')^i W', \; \varphi_2 W_i = W'_i. \tag{18}$$

Оскільки $\varphi_1 V_i = V'_i$ та $\varphi_2 W_i = W'_i$, то за теоремою про інваріантність розмірності (див. [14, розділ 11, с. 15]),

$$\dim V_i = \dim V'_i \quad \text{та} \quad \dim W_i = \dim W'_i, \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Нехай $\alpha := \max(n - p, n - q, m - p, m - q)$. Тоді для нільпотентних жорданових матриць, що відповідають лінійним відображенням, з умов (13) та (14) маємо

$$J^\alpha_{n-p} = J^\alpha_{n-q} = J^\alpha_{m-p} = J^\alpha_{m-q} = 0$$

і з (15) та (19)

$$p = \dim V_\alpha = \dim V'_\alpha = \dim W'_\alpha = \dim W_\alpha = q.$$

Отже, $(\mathcal{A}_{\mathcal{R}}, \mathcal{B}_{\mathcal{R}})$ та $(\mathcal{A}'_{\mathcal{R}}, \mathcal{B}'_{\mathcal{R}})$ — пари лінійних біекцій на просторах, що мають однакову розмірність.

З останніх рівностей в (17) та (18) випливає, що обмеження гомеоморфізмів $\varphi_1$ на $V_{\mathcal{R}}$ та $\varphi_2$ на $W_{\mathcal{R}}$ є деякими гомеоморфізмами $\varphi_{1\mathcal{R}} \colon V_{\mathcal{R}} \to V'_{\mathcal{R}}$ та $\varphi_{2\mathcal{R}} \colon W_{\mathcal{R}} \to W'_{\mathcal{R}}$. Обмежуючи рівності в (3) на $V_{\mathcal{R}}$ та $W_{\mathcal{R}}$ відповідно, ми отримаємо, що пари бієктивних відображень $(\mathcal{A}_{\mathcal{R}}, \mathcal{B}_{\mathcal{R}})$ та $(\mathcal{A}'_{\mathcal{R}}, \mathcal{B}'_{\mathcal{R}})$ топологічно еквівалентні.

За теоремою 2 з [1], існують базиси $\{e_i\}$ та $\{f_i\}$ просторів $V$ та $W$, відповідно, такі, що пара лінійних відображень $(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}, \mathcal{B}_{\mathcal{S}})$ є прямою сумою скінченної кількості ланцюгів, що мають вигляд одного з наступних чотирьох типів

(i)
$$\begin{tikzcd} e_s \arrow[r] & f_{s-1} \arrow[dl] \\ e_{s-1} \arrow[r] & f_{s-2} \arrow[dl] \\ \vdots & \vdots \\ e_2 \arrow[r] & f_1 \arrow[dl] \\ e_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(ii)
$$\begin{tikzcd} & f_l \arrow[dl] \\ e_l \arrow[r] & f_{l-1} \arrow[dl] \\ \vdots & \vdots \\ e_2 \arrow[r] & f_1 \arrow[dl] \\ e_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

тобто $\mathcal{A}e_i = f_{i-1}$, $\mathcal{B}f_i = e_i$, $\mathcal{A}e_1 = 0$ та для (i) $e_s \notin \operatorname{Im}\mathcal{B}$, а для (ii) $f_l \notin \operatorname{Im}\mathcal{A}$;

(iii)
$$\begin{tikzcd}
 & f_p \arrow[dl] \\
e_{p-1} \arrow[r] & f_{p-1} \arrow[dl] \\
\vdots & \vdots \\
e_2 \arrow[r] & f_2 \arrow[dl] \\
e_1 \arrow[r] & f_1 \arrow[dl] \\
0 &
\end{tikzcd}$$

(iv)
$$\begin{tikzcd}
e_q \arrow[r] & f_q \arrow[dl] \\
e_{q-1} \arrow[r] & f_{q-1} \arrow[dl] \\
\vdots & \vdots \\
e_1 \arrow[r] & f_1 \arrow[dl] \\
0 &
\end{tikzcd}$$

тобто $\mathcal{A}e_i = f_i$, $\mathcal{B}f_i = e_{i-1}$, $\mathcal{B}f_1 = 0$ та для (iii) $f_p \notin \operatorname{Im}\mathcal{A}$, а для (iv) $e_q \notin \operatorname{Im}\mathcal{B}$. При цьому число, яке дорівнює зменшеній на одиницю кількості стрілок у ланцюзі (тобто, за виключенням $e_1 \longrightarrow 0$ або $f_1 \longrightarrow 0$), називають його *довжиною*.

Кількість ланцюгів кожного типу та їх довжини однозначно визначаються розмірностями $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$, $\dim\operatorname{Im}\mathcal{BA}$, $\dim\operatorname{Im}\mathcal{ABA}$, $\ldots$ та розмірностями $\dim\operatorname{Im}\mathcal{B}$, $\dim\operatorname{Im}\mathcal{AB}$, $\dim\operatorname{Im}\mathcal{BAB}$, $\ldots$.

Пара $(\mathcal{A}_S, \mathcal{B}_S)$ задається парою матриць, яка є прямою сумою канонічних доданків вигляду (9). Кожному доданку відповідає ланцюг одного з типів (i)–(iv) певної довжини. Кількість ланцюгів деякої довжини визначається через $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$, $\dim\operatorname{Im}\mathcal{B}$, $\dim\operatorname{Im}\mathcal{AB}$, $\dim\operatorname{Im}\mathcal{BA}$, $\dim\operatorname{Im}\mathcal{ABA}$, $\dim\operatorname{Im}\mathcal{BAB}$, $\ldots$ у наступний спосіб:

- Кількість ланцюгів, які закінчуються в $V$ (тобто у яких останній ненульовий елемент належить до $V$), дорівнює $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = n - \dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$, а які закінчуються в $W$, дорівнює $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{B} = m - \dim\operatorname{Im}\mathcal{B}$.
- Кількість ланцюгів довжини $\geq 1$, які закінчуються в $V$, дорівнює
$$\dim\operatorname{Ker}\mathcal{AB} - \dim\operatorname{Ker}\mathcal{B} = (m - \dim\operatorname{Im}\mathcal{AB}) - (m - \dim\operatorname{Im}\mathcal{B}),$$
а які закінчуються в $W$, дорівнює
$$\dim\operatorname{Ker}\mathcal{BA} - \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = (n - \dim\operatorname{Im}\mathcal{BA}) - (n - \dim\operatorname{Im}\mathcal{A}).$$
- Кількість ланцюгів довжини $\geq 2$, які закінчуються в $V$, дорівнює
$$\dim\operatorname{Ker}\mathcal{ABA} - \dim\operatorname{Ker}\mathcal{BA} = (n - \dim\operatorname{Im}\mathcal{ABA}) - (n - \dim\operatorname{Im}\mathcal{BA}),$$
а які закінчуються в $W$, дорівнює
$$\dim\operatorname{Ker}\mathcal{BAB} - \dim\operatorname{Ker}\mathcal{AB} = (m - \dim\operatorname{Im}\mathcal{BAB}) - (m - \dim\operatorname{Im}\mathcal{AB}),$$
і т.д.

Розмірності векторних просторів
$$\operatorname{Im}\mathcal{A},\quad \operatorname{Im}\mathcal{B},\quad \operatorname{Im}\mathcal{AB},\quad \operatorname{Im}\mathcal{BA},\quad \operatorname{Im}\mathcal{ABA},\quad \operatorname{Im}\mathcal{BAB},\ \ldots$$
є інваріантами при топологічній еквівалентності, бо з (2) маємо
$$\varphi_2(\operatorname{Im}\mathcal{A}) = \operatorname{Im}\mathcal{A}',\quad \varphi_1(\operatorname{Im}\mathcal{B}) = \operatorname{Im}\mathcal{B}',\quad \varphi_2(\operatorname{Im}\mathcal{AB}) = \operatorname{Im}\mathcal{A}'\mathcal{B}',\ \ldots$$

Оскільки $\varphi_1$ та $\varphi_2$ є гомеоморфізмами, то за теоремою про інваріантність розмірності (див. [14, розділ 11, с. 15]), отримаємо

$$\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}', \quad \dim \operatorname{Im} \mathcal{B} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{B}', \quad \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}\mathcal{B} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}'\mathcal{B}', \ \dots$$

При топологічній еквівалентності кількість ланцюгів кожного з типів (i)–(iv) та їх довжини залишаться незмінними, тому пари лінійних відображень $(\mathcal{A}_S, \mathcal{B}_S)$ та $(\mathcal{A}'_S, \mathcal{B}'_S)$ топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони лінійно еквівалентні.

Отже, ми довели, що для двох топологічно еквівалентних пар лінійних відображень $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathcal{A}_r, \mathcal{B}_r) \oplus (\mathcal{A}_S, \mathcal{B}_S)$ та $(\mathcal{A}', \mathcal{B}') = (\mathcal{A}'_r, \mathcal{B}'_r) \oplus (\mathcal{A}'_S, \mathcal{B}'_S)$ випливає, що $(\mathcal{A}_r, \mathcal{B}_r)$ та $(\mathcal{A}'_r, \mathcal{B}'_r)$ топологічно еквівалентні, а $(\mathcal{A}_S, \mathcal{B}_S)$ та $(\mathcal{A}'_S, \mathcal{B}'_S)$ лінійно еквівалентні.

(б) Оскільки лінійне відображення $\mathcal{A}_r$ бієктивне, то всі квадрати в діаграмі

$$\begin{tikzcd}
V_r \arrow[r, "id"] \arrow[d, "id"'] & V_r \arrow[r, "\mathcal{B}_r\mathcal{A}_r"] \arrow[d, "\mathcal{A}_r"'] & V_r \arrow[d, "id"'] \\
V_r \arrow[r, "\mathcal{A}_r"'] & V_r \arrow[r, "\mathcal{B}_r"'] & V_r
\end{tikzcd} \tag{20}$$

комутативні. Тобто, згідно з означенням 1, пари лінійних відображень $(id, \mathcal{B}_r\mathcal{A}_r)$ та $(\mathcal{A}_r, \mathcal{B}_r)$ лінійно еквівалентні. Для лінійно еквівалентних пар лінійних відображень $(\mathcal{A}'_r, \mathcal{B}'_r)$ та $(\mathcal{B}'_r\mathcal{A}'_r, id)$ маємо подібну комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
V'_r \arrow[r, "\mathcal{A}'_r"] \arrow[d, "id"'] & W'_r \arrow[r, "\mathcal{B}'_r"] \arrow[d, "\mathcal{B}'_r"'] & V'_r \arrow[d, "id"'] \\
V'_r \arrow[r, "\mathcal{B}'_r\mathcal{A}'_r"'] & W'_r \arrow[r, "id"'] & V'_r
\end{tikzcd} \tag{21}$$

Якщо відображення $(\mathcal{A}_r, \mathcal{B}_r)$ та $(\mathcal{A}'_r, \mathcal{B}'_r)$ топологічно еквівалентні, то комутативною є така діаграма

$$\begin{tikzcd}
V_r \arrow[r, "\mathcal{A}_r"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & W_r \arrow[r, "\mathcal{B}_r"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & V_r \arrow[d, "\varphi_1"'] \\
V'_r \arrow[r, "\mathcal{A}'_r"'] & W'_r \arrow[r, "\mathcal{B}'_r"'] & V'_r
\end{tikzcd} \tag{22}$$

де $\varphi_1$ та $\varphi_2$ — деякі гомеоморфізми. З (20), (22) та (21), для лінійних відображень $\mathcal{B}_r\mathcal{A}_r$ та $\mathcal{B}'_r\mathcal{A}'_r$ маємо таку комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
V_r \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & V_r \arrow[r, "\mathcal{B}_r\mathcal{A}_r"] \arrow[d, "\psi"'] & V_r \arrow[d, "\varphi_1"'] \\
V'_r \arrow[r, "\mathcal{B}'_r\mathcal{A}'_r"'] & V'_r \arrow[r, "id"'] & V'_r
\end{tikzcd}$$

де $\psi := \mathcal{B}'_r\varphi_2\mathcal{A}_r$. Тобто виконується умова $\varphi_1\mathcal{B}_r\mathcal{A}_r = \mathcal{B}'_r\mathcal{A}'_r\varphi_1$, а тому лінійні відображення $\mathcal{B}_r\mathcal{A}_r$ та $\mathcal{B}'_r\mathcal{A}'_r$ топологічно спряжені. Для доведення достатності слід провести міркування в зворотньому порядку. $\square$

**Зауваження 1.** N. Kuiper та J. Robbin ([15, 16]) встановили критерій топологічної спряженості лінійних відображень над $\mathbb{R}$, які не мають власних чисел, що є коренями з 1. У статті [4, теорема 2.2] їхній критерій розширено до лінійних відображень над $\mathbb{C}$ та встановлено канонічну форму, з точністю до топологічної спряженості, для лінійних відображень над $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$, які не мають власних чисел, що є коренями з 1. Задачу про топологічну класифікацію лінійних відображень, які мають власні числа, що є коренями з 1 частково розв'язали N. Kuiper та J. Robbin [15, 16], S. Cappell та J. Shaneson ([6]–[10]), W. Hsiang та W. Pardon ([13]). Задача топологічної класифікації афінних відображень досліджувалася в [2]–[5] і [11], а ланцюгів лінійних відображень — в [17].

## ЛІТЕРАТУРА


1. Dobrovol'skaya N.M., Ponomarev V.A. *A pair of counter-operators*// Uspekhi Mat. Nauk. – 1965. – V.20, №6. – P. 80–86. (in Russian)
2. Blanc J. *Conjugacy classes of affine automorphisms of* $\mathbb{K}^n$ *and linear automorphisms of* $\mathbb{P}^n$ *in the Cremona groups*// Manuscripta Math. – 2006. – V.119, №2. – P. 225–241.
3. Budnitska T.V. *Classification of topological conjugate affine mappings*// Ukrainian Math. J. – 2009. – V.61. – P. 164–170.
4. Budnitska T. *Topological classification of affine operators on unitary and Euclidean spaces*// Linear Algebra Appl. – 2011. – V.434. – P. 582–592.
5. Budnitska T., Budnitska N. *Classification of affine operators up to biregular conjugacy*// Linear Algebra Appl. – 2011. – V.434. – P. 1195–1199.
6. Cappell S.E., Shaneson J.L. *Linear algebra and topology*// Bull. Amer. Math. Soc., New Series. – 1979. – V.1, №4. – P. 685–687.
7. Cappell S.E., Shaneson J.L. *Nonlinear similarity of matrices*// Bull. Amer. Math. Soc., New Series. – 1979. – V.1, №6.– P. 899–902.
8. Cappell S.E., Shaneson J.L. *Non-linear similarity*// Ann. of Math. – 1981. – V.113, №2. – P. 315–355.
9. Cappell S.E., Shaneson J.L. *Non-linear similarity and linear similarity are equivariant below dimension 6*// Contemp. Math. – 1999. – V.231. – P. 59–66.
10. Cappell S.E., Shaneson J.L., Steinberger M., West J.E. *Nonlinear similarity begins in dimension six*// Amer. J. Math. – 1989. – V.111. – P. 717–752.
11. Ephrämowitsch W. *Topologische Klassifikation affiner Abbildungen der Ebene*// Mat. Sb. – 1935. – V.42, №1. – P. 23–36.
12. Horn R.A., Merino D.I. *Contragredient equivalence: a canonical form and some applications*// Linear Algebra Appl. – 1995. – V.214. – P. 43–92.
13. Hsiang W.C., Pardon W. *When are topologically equivalent orthogonal transformations linearly equivalent*// Invent. Math. – 1982. – V.68, №2. – P. 275–316.
14. McCleary J. A First Course in Topology: Continuity and Dimension, American Mathematical Society, 2006.
15. Kuiper N.H., Robbin J.W. *Topological classification of linear endomorphisms*// Invent. Math. – 1973. – V.19, №2. – P. 83–106.
16. Robbin J.W. *Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems*// Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – V.78, №6. – P. 923–952.
17. Rybalkina T., Sergeichuk V.V. *Topological classification of chains of linear mappings*// Linear Algebra Appl. – 2012. – V.437. – P. 860–869.
18. Sergeichuk V.V. *Computation of canonical matrices for chains and cycles of linear mappings*// Linear Algebra Appl. – 2004. – V.376. – P. 235–263.


Інститут математики НАН України
rybalkina_t@ukr.net

*Надійшло 29.11.2012*