УДК 511.3

Я. М. Холявка

СПІЛЬНЕ НАБЛИЖЕННЯ ЕЛІПТИЧНИХ МОДУЛІВ ТА ЗНАЧЕНЬ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЯКОБІ

Ya. M. Kholyavka. *Simultaneous approximation of modulus and values of Jacobi elliptic functions*, Mat. Stud. **39** (2013), 10–15.

Let $\operatorname{sn}_i z$ be algebraically independent Jacobi elliptic functions, $(4K_i, 2iK_i')$ be main periods and $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ be their moduli $\operatorname{sn}_i z$ $(i \in \{1,2\})$. We estimate from below the simultaneous approximation $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\operatorname{sn}_1 K_2$, $\operatorname{sn}_2 iK_1'$.

Я. М. Холявка. *Совместное приближение модулей и значений эллиптических функций Якоби* // Мат. Студії. – 2013. – Т.39, №1. – С.10–15.

Пусть $\operatorname{sn}_i z$ — алгебраически независимые эллиптичекие функции Якоби, $(4K_i, 2iK_i')$ — пара основных периодов $\operatorname{sn}_i z$, $\varkappa_i$ — их эллиптические модули $(i \in \{1,2\})$. В роботе получено оценку совместного приближения $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\operatorname{sn}_1 K_2$, $\operatorname{sn}_2 iK_1'$.

1. Вступ. Еліптична функція Якобі $\operatorname{sn} z$ задовольняє рівняння $(\operatorname{sn}' z)^2 = (1-\operatorname{sn}^2 z)(1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2 z)$ ([1], с. 46), де через $\operatorname{sn}' z$, $\operatorname{sn}^2 z$ позначено відповідно $(\operatorname{sn} z)'$, $(\operatorname{sn} z)^2$. Число $\varkappa$ називають модулем $\operatorname{sn} z$, $0<\varkappa<1$, число $\varkappa' = (1-\varkappa^2)^{1/2}$ називають її додатковим модулем. Парою основних періодів $\operatorname{sn} z$ є $(4K,\ 2iK')$, де $K,\ K'$ — повні еліптичні інтеграли першого роду, що відповідають $\varkappa$, $\varkappa'$ ([1], с. 23, 44; [2]).

Позначимо через $\operatorname{sn}_1 z$, $\operatorname{sn}_2 z$ дві алгебраїчно незалежні еліптичні функції Якобі, які визначаються модулями $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ відповідно, $0<\varkappa_1<1$, $0<\varkappa_2<1$; $(4K_1,\ 2iK_1')$, $(4K_2,\ 2iK_2')$ — пари їх основних періодів. Такі $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ та відповідні їм функції існують згідно з [3], теорема 13.A ([1], с. 43).

Через $d(P)$, $L(P)$ позначимо степінь та довжину многочлена P з цілими коефіцієнтами, через $d(\alpha)$, $L(\alpha)$ — степінь та довжину алгебраїчного числа α ([3], с. 267); ξ_i — алгебраїчні числа, $n_i = d(\xi_i)$ та $L_i = L(\xi_i)$ — їх степені та довжини відповідно, $n = \deg\mathbb{Q}(\xi_1,\dots,\xi_4)$.

Теорема 1. *Якщо хоча б одне з чисел $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\operatorname{sn}_1 K_2$, $\operatorname{sn}_2 iK_1'$ трансцендентне, то для довільних алгебраїчних чисел $\xi_1,\dots,\xi_4$ справджується*

$$\max\{|\varkappa_1-\xi_1|, |\varkappa_2-\xi_2|, |\operatorname{sn}_1 K_2-\xi_3|, |\operatorname{sn}_2 iK_1'-\xi_4|\} > \exp\left(-\Lambda\, T^2\ln T\right), \tag{1}$$

де

$$T = n\Big[\frac{\ln L_1}{n_1}+\dots+\frac{\ln L_4}{n_4}+\ln n\Big], \tag{2}$$

$\Lambda>0$ — стала, залежна лише від $\varkappa_1, \varkappa_2$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 11J82, 11J89.
Keywords: simultaneous approximation, Jacobi elliptic function.

Оцінку наближення, сформульовану в теоремі 1, можна використати, наприклад, для дослідження властивостей еліптичних кривих Якобі (квадрик Якобі). Подібні оцінки для інших чисел можна знайти в [4]–[6].

2. Допоміжні твердження. Сформулюємо основні леми, необхідні для доведення теореми 1.

Лема 1. *Нехай* $m \in \mathbb{N}$. *Тоді існують такі многочлени* $P_m, Q_m \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$, *що*

$$\operatorname{sn} mz = \frac{P_m(\operatorname{sn} z, \operatorname{sn}' z)}{Q_m(\varkappa^2, \operatorname{sn} z)},$$

$L(P_m), L(Q_m) \leqslant \exp(c_1 m^2)$, $\deg_{x_1} Q_m, \deg_{x_2} Q_m \leqslant 2m^2$, $\deg_{x_1} P_m \leqslant 2m^2$, $\deg_{x_2} P_m \leqslant 1$.

Лема 2. *Нехай* $s, l \in \mathbb{N}_0$. *Тоді існують такі многочлени* $P_{s,l} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$, *що*

$$(\operatorname{sn}^l z)^{(s)} = \frac{d^s}{d\, w^s}((\operatorname{sn} z)^l) = P_{s,l}(\varkappa^2, \operatorname{sn} z, \operatorname{sn}' z),$$

$\deg_{x_1} P_{s,l} \leqslant s + l$, $\deg_{x_2} P_{s,l} \leqslant s + 2l$, $\deg_{x_3} P_{s,l} \leqslant 1$, $L(P_{s,l}) \leqslant \exp(c_2 s \log(s + l))$.

Доведення лем 1, 2 подібне доведенню подібних властивостей функцій $\wp(z)$ ([9]).

Лема 3 ([2])**.** *Якщо* z, w, $z + w$ *відмінні від полюсів* $\operatorname{sn} z$, *то*

$$\operatorname{sn}(z + w) = \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{sn}' w + \operatorname{sn} w \operatorname{sn}' z}{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn} z^2 \operatorname{sn} w^2}.$$

Лема 4 ([7])**.** *Нехай* α, β — *довільні алгебраїчні числа,* $\gamma^2 = (1 - \alpha^2)(1 - \alpha^2\beta^2)$. *Тоді*

$$L(\gamma) < \exp\left(6 \deg \mathbb{Q}(\alpha, \beta) \left(\frac{\ln L(\alpha)}{d(\alpha)} + \frac{\ln L(\beta)}{d(\beta)} + 1\right)\right), \quad d(\gamma) \geqslant \frac{\deg \mathbb{Q}(\alpha, \beta)}{\min(2d(\alpha), 4d(\beta))}.$$

Лема 5 ([5])**.** *Нехай* $B, P \in \mathbb{N}$, $Q_{p,b} \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, $0 \leqslant b < B$, $0 \leqslant p < P$, $L(Q_{p,b}) \leqslant L$, $\deg_{x_i} Q_{p,b} \leqslant \mathcal{N}_i$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — *алгебраїчні числа,* $m = \deg \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. *Якщо* $P > mB$, *то система лінійних рівнянь*

$$\sum_{p=0}^{P-1} x_p Q_{p,b}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0, \quad 0 \leqslant b < B,$$

має цілі раціональні розв'язки $A_0, \ldots, A_{P-1}$ *такі, що*

$$0 < \max |A_i| < 1 + (LP)^{\frac{mB}{P-mB}} \left(\prod_{i=1}^{n} (1 + \mathcal{N}_i) \left(L(\alpha_i)(1 + d(\alpha_i))\right)^{\frac{\mathcal{N}_i}{d(\alpha_i)}}\right)^{\frac{mB}{P-mB}}.$$

Лема 6 ([3])**.** *Нехай* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — *алгебраїчні числа,* $P \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, $\deg_{x_i} P \leqslant \mathcal{N}_i$, $m = \deg \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. *Якщо* $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \not\equiv 0$, *то*

$$|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \geqslant L(P)^{1-m} \prod_{i=1}^{n} L(\alpha_i)^{\frac{-\mathcal{N}_i m}{d(\alpha_i)}}.$$

Позначимо $|f(z)|_D = \sup\{|f(z)|\colon |z| \leqslant D\}$.

Лема 7 ([6]). *Функції $\sigma(z)$ та $\sigma(z-\omega)\operatorname{sn} z$ цілі і для $M>1$ виконуються оцінки*

$$|\sigma(z-\omega)\operatorname{sn} z|_M, |\sigma(z)|_M \leqslant C_1^{M^2},$$

ω — відповідний півперіод функції Вейєрштрасса і $\sigma(z)$ — σ-функція Вейєрштрасса, що відповідають $\operatorname{sn} z$. Якщо ε — віддаль від найближчого полюса $\operatorname{sn} z$ до z_0 і $|z_0| \leqslant M$, то $|\sigma(z_0)| \geqslant \varepsilon C_2^{-M^2}$, де C_1, C_2 — сталі, залежні тільки від $\varkappa$.

Лема 8 (формула Ерміта, [3]). *Нехай $f(\zeta)$ — регулярна функція у крузі Γ радіуса R, $a_1,\dots,a_m \in \Gamma$, $a_i \neq a_j$ якщо $i \neq j$, $s \in \mathbb{N}_0$. Тоді для довільної внутрішньої точки $z \in \Gamma$, відмінної від $a_1,\dots,a_m$, виконується рівність*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Gamma}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{z-a_k}{\zeta-a_k}\right)^{s+1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} -$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\frac{f^{(\tau)}(a_i)}{\tau!}\oint_{|\zeta-a_i|=\rho_i}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{z-a_k}{\zeta-a_k}\right)^{s+1}\frac{(\zeta-a_i)^\tau}{\zeta-z}d\zeta,$$

ρ_i — достатньо малі, $\{\zeta : |\zeta - a_i| \leqslant \rho_i\} \subset \Gamma$ і не містять точок z і a_k, $k \neq i$.

Лема 9 ([2], [8]). *Нехай $P \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, $P(x_1,x_2) \not\equiv 0$, — многочлен степеня не більшого за $\mathcal{D}_1$ по x_1 і $\mathcal{D}_2$ по x_2, $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \geqslant 1$, а $\operatorname{sn}_1 z$, $\operatorname{sn}_2 z$ — алгебраїчно незалежні еліптичні функції Якобі. Тоді кількість нулів $P(\operatorname{sn}_1 z, \operatorname{sn}_2 z)$ з врахуванням їх кратності при $|z| < K$ не перевищує $C_3K^2(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)$, де C_3 — деяка стала, яка не залежить від многочлена.*

3. Доведення теореми 1. Доведення теореми будемо проводити другим методом Гельфонда, викладеним у [3], [4]. Припустимо, що (1) не виконується, тобто для достатньо великого $\lambda \in \mathbb{N}$

$$\max\{|\varkappa_1 - \xi_1|, |\varkappa_2 - \xi_2|, |\operatorname{sn}_1 K_2 - \xi_3|, |\operatorname{sn}_2 iK_1' - \xi_4|\} < \exp\left(-\lambda^7 T^2 \ln T\right). \tag{3}$$

Числа ξ_1, ξ_2 визначають еліптичні функції Якобі, які позначимо через $\widetilde{\operatorname{sn}}_1 z$, $\widetilde{\operatorname{sn}}_2 z$. Так як $0 < \varkappa_1 < 1$, $0 < \varkappa_2 < 1$, то, не зменшуючи загальності, можна вибрати ξ_1, ξ_2 такими, щоб виконувались нерівності $0 < \xi_1 < 1$, $0 < \xi_2 < 1$ і функції $\widetilde{\operatorname{sn}}_1 z$, $\widetilde{\operatorname{sn}}_2 z$ були алгебраїчно незалежні. Позначимо через $\widetilde{K}_i$, $\widetilde{K}_i'$ — повні еліптичні інтеграли першого роду, що відповідають ξ_i, ξ_i', $i \in \{1,2\}$. Тоді $(4\widetilde{K}_1, 2i\widetilde{K}_1')$, $(4\widetilde{K}_2, 2i\widetilde{K}_2')$ — основні періоди $\widetilde{\operatorname{sn}}_1 z$, $\widetilde{\operatorname{sn}}_2 z$. З (3) для $i \in \{1,2\}$ отримаємо

$$\max\{|K_i - \widetilde{K}_i|, |K_i' - \widetilde{K}_i'|\} < \exp\left(-\frac{\lambda^7}{2}T^2 \ln T\right). \tag{4}$$

З (3) та (4) для достатньо великого λ отримаємо

$$\max\{|\widetilde{\operatorname{sn}}_1 \widetilde{K}_2 - \xi_3|, |\widetilde{\operatorname{sn}}_2 i\widetilde{K}_1 - \xi_4|\} < \exp\left(-\frac{\lambda^7}{3}T^2 \ln T\right). \tag{5}$$

Покладемо

$$S = L = \lambda^3 \ln \lambda T,\ N = \lambda\sqrt{\lambda T}, \tag{6}$$

$$F(z) = \sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2}\widetilde{\mathrm{sn}}_1^{l_1} z\, \widetilde{\mathrm{sn}}_2^{l_2} z,\ C_{l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau,\ C_{l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

де ζ_τ — твірні елементи $\mathbb{Q}(\xi_1,\dots,\xi_4)$.

Позначимо

$$\varphi_{i,1}(z) = \widetilde{\mathrm{sn}}_i\Big(z + \frac{\widetilde{K}_i}{2}\Big),\ \varphi_{i,2}(w) = \widetilde{\mathrm{sn}}_i\Big(w + \frac{3\widetilde{K}_i}{2}\Big),\ i \in \{1,2\}.$$

Тоді

$$\widetilde{\mathrm{sn}}_i(z+w) = \frac{\varphi_{i,1}(z)\varphi'_{i,2}(w) + \varphi_{i,2}(w)\varphi'_{i,1}(z)}{1 - \xi_i^2\varphi_{i,1}^2(z)\varphi_{i,2}^2(w)} = \frac{\Lambda_{i,1}(z,w)}{\Lambda_{i,2}(z,w)}.$$

Нехай $G_{i,s,k,l}(\varkappa_i, z) = \frac{d^s}{d\,w^s}(\Lambda_{i,1}^k(z,w)\Lambda_{i,2}^l(z,w))|_{w=0}$. Так визначені многочлени задовольняють оцінкам

$$\deg G_{i,s,k,l} \leqslant 4(k+l),\ \ln L(G_{i,s,k,l}) \leqslant s\ln(s(k+l) + c_3(s+k+l)).$$

З (7) подібно, як в [8], [9], отримаємо

$$F^{(s)}(z) = \frac{d^s}{d\,w^s}((\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w))(F(z+w)\Lambda_{1,2}^{L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{L}(z,w)))|_{w=0} =$$
$$= \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\frac{d^{s-t}}{d\,w^{s-t}}(\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w))|_{w=0}F_{s,t}(z),$$

де

$$F_{s,t}(z) = \sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i} G_{1,t-i,l_1,L-l_1}(\varkappa_1, z)G_{2,i,l_2,L-l_2}(\varkappa_2, z). \tag{8}$$

Застосувавши лему 4 у випадку $\alpha = \xi_3$, $\beta = \xi_1$, $\gamma = \xi_5$, отримаємо оцінку $d(\xi_5)$ та $L(\xi_5)$ числа ξ_5, яке наближає $\mathrm{sn}'_1 K_2$, а у випадку $\alpha = \xi_4$, $\beta = \xi_2$, $\gamma = \xi_6$ — оцінку $d(\xi_6)$ та $L(\xi_6)$ числа ξ_6, яке наближає $\mathrm{sn}'_2\, iK'_1$. Позначимо через $F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\dots,\xi_6)$ та $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\dots,\xi_6)$ вирази, отримані з $F^{(s)}(2n_1 i\widetilde{K}'_1 + 4n_2\widetilde{K}_2)$ та $F_{s,t}(2n_1 i\widetilde{K}'_1 + 4n_2\widetilde{K}_2)$ заміною $\widetilde{\mathrm{sn}}_1\widetilde{K}_2$, $\widetilde{\mathrm{sn}}_2 i\widetilde{K}'_1$, $\widetilde{\mathrm{sn}}'_1\widetilde{K}_2$, $\widetilde{\mathrm{sn}}'_2 i\widetilde{K}'_1$ на $\xi_3,\dots,\xi_6$ і застосуємо до $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\dots,\xi_6)$ лему 5. Будемо розглядати $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\dots,\xi_6)$ при $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$ як N^2S лінійних форм від nL^2 змінних $C_{l_1,l_2,\tau}$. Використавши леми 2–6 та (6)–(8), виберемо не всі рівні нулю $C_{l_1,l_2,\tau}$ такими, що для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$

$$F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\dots,\xi_6) = 0, \tag{9}$$
$$|C_{l_1,l_2,\tau}| < \exp(c_4\lambda^6 \ln\lambda\, T^2 \ln T). \tag{10}$$

З (3), (5), (6), (10) і лем 2–5 отримаємо для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant S$

$$|F^{(s)}(2n_1 i\widetilde{K}'_1 + 4n_2\widetilde{K}_2) - F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\dots,\xi_6)| < \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda^7 T^2 \ln T\right). \tag{11}$$

З (9), (11) при $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant S$ отримаємо

$$|F^{(s)}(2n_1 i\widetilde{K}_1' + 4n_2\widetilde{K}_2)| < \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda^7 T^2 \ln T\right). \tag{12}$$

Покажемо, що (12) виконується і для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$.

Нехай $\wp_i(u)$ та $\sigma_i(z)$ відповідають функціям $\widetilde{\mathrm{sn}}_i z$, що визначаються числами ξ_i, $i \in \{1, 2\}$ ([1], с. 35, 43), $G(z) = F(z)\sigma_1^L(z-\omega_1)\sigma_2^L(z-\omega_2)$, де ω_i — півперіод $\wp_i(u)$. Виберемо найменше можливе ціле r таким, що

$$r > 32(N+1)(|\widetilde{K}_1| + |\widetilde{K}_2| + |\widetilde{K}_1'| + |\widetilde{K}_2'|). \tag{13}$$

Позначимо $R = 12r$. Тоді з лем 2–5, леми 8 та (2), (6), (7), (10), (13) випливає

$$|G(z)|_R < \exp(-\lambda^6 \ln \lambda\, T^2 \ln T). \tag{14}$$

З (14) отримаємо для $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$

$$|G^{(s)}(z)|_r < \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^6 \ln \lambda\, T^2 \ln T\right). \tag{15}$$

Для досить малого ε в ε-околах точок $2n_1 i\widetilde{K}_1'$ функція $\sigma_2(z-\omega_2)$ та в ε-околах точок $4n_2\widetilde{K}_2$ функція $\sigma_1(z-\omega_1)$ не мають нулів, тому з леми 7 для $n_1, n_2 \leqslant 32N$ випливає

$$|\sigma_i(z-\omega_i)|_{z \in V(\varepsilon, 2n_1 i\widetilde{K}_1' + 4n_2\widetilde{K}_2)} > \exp(-c_5\lambda^5 \ln \lambda\, T^2). \tag{16}$$

З (14)–(16) для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$ отримаємо

$$|F^{(s)}(2n_1 i\widetilde{K}_1' + 4n_2\widetilde{K}_2)| < \exp\left(-\frac{\lambda^6}{3} \ln \lambda\, T^2 \ln T\right). \tag{17}$$

Враховуючи (11), для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$ та $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$ з (17) випливає

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_6)| < \exp\left(-\frac{\lambda^6}{4} \ln \lambda\, T^2 \ln T\right). \tag{18}$$

Розглядаючи $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_6)$ як значення відповідного многочлена в алгебраїчних точках, з леми 6, (2), (6) отримаємо для $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \lambda S$, $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_6) \neq 0$, оцінку

$$|F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_6)| > \exp(-\lambda^5 \ln \lambda\, T^2 \ln T). \tag{19}$$

З (6), (19) отримаємо для $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$, $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_6)| > \exp(-2\lambda^5 \ln \lambda\, T^2 \ln T). \tag{20}$$

Оцінки (18) та (20) суперечливі, тому отримаємо для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$

$$F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_6) = 0. \tag{21}$$

З (21) випливає, що многочлен $F(z)$ має не менше $c_6\lambda^7 \ln \lambda\, T^2$ нулів (з врахуванням кратності). З леми 9 отримаємо, що нулів може бути не більше $c_7\lambda^6 \ln \lambda\, T^2$, тому для достатньо великого $\lambda \in \mathbb{N}$ припущення (3) приводить до протиріччя, яке й доводить теорему.

ЛІТЕРАТУРА

1. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. – M.: Nauka, V.3, 1967. (in Russian)
2. Lawden D.F. Elliptic functions and applications. – Springer-Verlag, Berlin, 1989.
3. Fel'dman N.I. Hilbert's seventh problem. – M.: Moscov. Gos. Univ., 1982. (in Russian)
4. Fel'dman N.I., Nesterenko Yu.V. Transcendental Numbers. – Springer-Verlag, Berlin, 1998.
5. Reyssat E. *Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp*// Bull. Soc. Math. France. – 1980. – V.108. – P. 47–79.
6. Masser D. Elliptic functions and transcendence. – Springer-Verlag, Berlin, 1975.
7. Kholyavka Ya.M. *On the simultaneous approximation of invariants of the elliptic function by algebraic numbers*// Diophantine Analysis, Izd. Mosk. Gos. Univ., Moscow. – 1986. – Part 2. – P. 114–121. (in Russian)
8. Nesterenko Yu.V. *On a measure of algebraic independence of values of an elliptic function*// Izvestiya RAN: Ser. Mat. – 1995. – V.59, №4. – P. 155–178. (in Russian)
9. Chudnovsky G.V. *Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann–Weierschtrass theorem*// Inventiones Math. – 1980. – V.61. – P. 267–290.

Львівський національний університет ім. І. Франка
ya_khol@franko.lviv.ua

Надійшло 13.10.2012
Після переробки 20.01.2013