

УДК 511.3

Я. М. Холявка

СПІЛЬНЕ НАБЛИЖЕННЯ ЕЛІПТИЧНИХ МОДУЛІВ ТА ЗНАЧЕНЬ
ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЯКОБІ

Ya. M. Kholiyavka. *Simultaneous approximation of modulus and values of Jacobi elliptic functions*, Mat. Stud. **39** (2013), 10–15.

Let $\operatorname{sn}_i z$ be algebraically independent Jacobi elliptic functions, $(4K_i, 2iK'_i)$ be main periods and κ_1, κ_2 be their moduli $\operatorname{sn}_i z$ ($i \in \{1, 2\}$). We estimate from below the simultaneous approximation $\kappa_1, \kappa_2, \operatorname{sn}_1 K_2, \operatorname{sn}_2 iK'_1$.

Я. М. Холявка. *Совместное приближение модулей и значений эллиптических функций Якоби* // Мат. Студії. – 2013. – Т.39, №1. – С.10–15.

Пусть $\operatorname{sn}_i z$ — алгебраически независимые эллиптические функции Якоби, $(4K_i, 2iK'_i)$ — пара основных периодов $\operatorname{sn}_i z$, κ_i — их эллиптические модули ($i \in \{1, 2\}$). В работе получено оценку совместного приближения $\kappa_1, \kappa_2, \operatorname{sn}_1 K_2, \operatorname{sn}_2 iK'_1$.

1. Вступ. Еліптична функція Якобі $\operatorname{sn} z$ задовольняє рівняння $(\operatorname{sn}' z)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 z)(1 - \kappa^2 \operatorname{sn}^2 z)$ ([1], с. 46), де через $\operatorname{sn}' z$, $\operatorname{sn}^2 z$ позначено відповідно $(\operatorname{sn} z)'$, $(\operatorname{sn} z)^2$. Число κ називають модулем $\operatorname{sn} z$, $0 < \kappa < 1$, число $\kappa' = (1 - \kappa^2)^{1/2}$ називають її додатковим модулем. Парою основних періодів $\operatorname{sn} z \in (4K, 2iK')$, де K, K' — повні еліптичні інтеграли першого роду, що відповідають κ, κ' ([1], с. 23, 44; [2]).

Позначимо через $\operatorname{sn}_1 z, \operatorname{sn}_2 z$ дві алгебраїчно незалежні еліптичні функції Якобі, які визначаються модулями κ_1, κ_2 відповідно, $0 < \kappa_1 < 1, 0 < \kappa_2 < 1$; $(4K_1, 2iK'_1), (4K_2, 2iK'_2)$ — пари їх основних періодів. Такі κ_1, κ_2 та відповідні їм функції існують згідно з [3], теорема 13.A ([1], с. 43).

Через $d(P), L(P)$ позначимо степінь та довжину многочлена P з цілими коефіцієнтами, через $d(\alpha), L(\alpha)$ — степінь та довжину алгебраїчного числа α ([3], с. 267); ξ_i — алгебраїчні числа, $n_i = d(\xi_i)$ та $L_i = L(\xi_i)$ — їх степені та довжини відповідно, $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_4)$.

Теорема 1. Якщо хоча б одне з чисел $\kappa_1, \kappa_2, \operatorname{sn}_1 K_2, \operatorname{sn}_2 iK'_1$ трансцендентне, то для довільних алгебраїчних чисел $\xi_1, \dots, \xi_4$ справджується

$$\max\{|\kappa_1 - \xi_1|, |\kappa_2 - \xi_2|, |\operatorname{sn}_1 K_2 - \xi_3|, |\operatorname{sn}_2 iK'_1 - \xi_4|\} > \exp(-\Lambda T^2 \ln T), \quad (1)$$

де

$$T = n \left[\frac{\ln L_1}{n_1} + \dots + \frac{\ln L_4}{n_4} + \ln n \right], \quad (2)$$

$\Lambda > 0$ — стала, залежна лише від κ_1, κ_2 .

2010 *Mathematics Subject Classification*: 11J82, 11J89.

Keywords: simultaneous approximation, Jacobi elliptic function.

doi:10.30970/ms.39.1.10-15

Оцінку наближення, сформульовану в теоремі 1, можна використати, наприклад, для дослідження властивостей еліптичних кривих Якобі (квадрик Якобі). Подібні оцінки для інших чисел можна знайти в [4]–[6].

2. Допоміжні твердження. Сформулюємо основні леми, необхідні для доведення теореми 1.

Лема 1. Нехай $m \in \mathbb{N}$. Тоді існують такі многочлени $P_m, Q_m \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$, що

$$\operatorname{sn} mz = \frac{P_m(\operatorname{sn} z, \operatorname{sn}' z)}{Q_m(\kappa^2, \operatorname{sn} z)},$$

$$L(P_m), L(Q_m) \leq \exp(c_1 m^2), \deg_{x_1} Q_m, \deg_{x_2} Q_m \leq 2m^2, \deg_{x_1} P_m \leq 2m^2, \deg_{x_2} P_m \leq 1.$$

Лема 2. Нехай $s, l \in \mathbb{N}_0$. Тоді існують такі многочлени $P_{s,l} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$, що

$$(\operatorname{sn}^l z)^{(s)} = \frac{d^s}{d w^s} ((\operatorname{sn} z)^l) = P_{s,l}(\kappa^2, \operatorname{sn} z, \operatorname{sn}' z),$$

$$\deg_{x_1} P_{s,l} \leq s + l, \deg_{x_2} P_{s,l} \leq s + 2l, \deg_{x_3} P_{s,l} \leq 1, L(P_{s,l}) \leq \exp(c_2 s \log(s + l)).$$

Доведення лем 1, 2 подібне доведенню подібних властивостей функцій $\wp(z)$ ([9]).

Лема 3 ([2]). Якщо $z, w, z + w$ відмінні від полюсів $\operatorname{sn} z$, то

$$\operatorname{sn}(z + w) = \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{sn}' w + \operatorname{sn} w \operatorname{sn}' z}{1 - \kappa^2 \operatorname{sn} z^2 \operatorname{sn} w^2}.$$

Лема 4 ([7]). Нехай α, β — довільні алгебраїчні числа, $\gamma^2 = (1 - \alpha^2)(1 - \alpha^2 \beta^2)$. Тоді

$$L(\gamma) < \exp \left(6 \deg \mathbb{Q}(\alpha, \beta) \left(\frac{\ln L(\alpha)}{d(\alpha)} + \frac{\ln L(\beta)}{d(\beta)} + 1 \right) \right), \quad d(\gamma) \geq \frac{\deg \mathbb{Q}(\alpha, \beta)}{\min(2d(\alpha), 4d(\beta))}.$$

Лема 5 ([5]). Нехай $B, P \in \mathbb{N}$, $Q_{p,b} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, $0 \leq b < B$, $0 \leq p < P$, $L(Q_{p,b}) \leq L$, $\deg_{x_i} Q_{p,b} \leq \mathcal{N}_i$; $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — алгебраїчні числа, $m = \deg \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Якщо $P > mB$, то система лінійних рівнянь

$$\sum_{p=0}^{P-1} x_p Q_{p,b}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \quad 0 \leq b < B,$$

має цілі раціональні розв'язки $A_0, \dots, A_{P-1}$ такі, що

$$0 < \max |A_i| < 1 + (LP)^{\frac{mB}{P-mB}} \left(\prod_{i=1}^n (1 + \mathcal{N}_i) (L(\alpha_i)(1 + d(\alpha_i)))^{\frac{\mathcal{N}_i}{d(\alpha_i)}} \right)^{\frac{mB}{P-mB}}.$$

Лема 6 ([3]). Нехай $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — алгебраїчні числа, $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, $\deg_{x_i} P \leq \mathcal{N}_i$, $m = \deg \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Якщо $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$, то

$$|P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| \geq L(P)^{1-m} \prod_{i=1}^n L(\alpha_i)^{\frac{-\mathcal{N}_i m}{d(\alpha_i)}}.$$

Позначимо $|f(z)|_D = \sup\{|f(z)| : |z| \leq D\}$.

Лема 7 ([6]). Функції $\sigma(z)$ та $\sigma(z - \omega) \operatorname{sn} z$ цілі і для $M > 1$ виконуються оцінки

$$|\sigma(z - \omega) \operatorname{sn} z|_M, |\sigma(z)|_M \leq C_1^{M^2},$$

ω — відповідний півперіод функції Вейєрштрасса і $\sigma(z)$ — σ -функція Вейєрштрасса, що відповідають $\operatorname{sn} z$. Якщо ε — віддаль від найближчого полюса $\operatorname{sn} z$ до z_0 і $|z_0| \leq M$, то $|\sigma(z_0)| \geq \varepsilon C_2^{-M^2}$, де C_1, C_2 — сталі, залежні тільки від $\mathfrak{K}$.

Лема 8 (формула Ерміта, [3]). Нехай $f(\zeta)$ — регулярна функція у крузі Γ радіуса R , $a_1, \dots, a_m \in \Gamma$, $a_i \neq a_j$ якщо $i \neq j$, $s \in \mathbb{N}_0$. Тоді для довільної внутрішньої точки $z \in \Gamma$, відмінної від $a_1, \dots, a_m$, виконується рівність

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Gamma} \prod_{k=1}^m \left(\frac{z - a_k}{\zeta - a_k} \right)^{s+1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \\ - \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^m \sum_{\tau=1}^s \frac{f^{(\tau)}(a_i)}{\tau!} \oint_{|\zeta - a_i| = \rho_i} \prod_{k=1}^m \left(\frac{z - a_k}{\zeta - a_k} \right)^{s+1} \frac{(\zeta - a_i)^\tau}{\zeta - z} d\zeta,$$

ρ_i — достатньо малі, $\{\zeta : |\zeta - a_i| \leq \rho_i\} \subset \Gamma$ і не містять точок z і a_k , $k \neq i$.

Лема 9 ([2], [8]). Нехай $P \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, $P(x_1, x_2) \not\equiv 0$, — многочлен степеня не більшого за $\mathcal{D}_1$ по x_1 і $\mathcal{D}_2$ по x_2 , $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \geq 1$, а $\operatorname{sn}_1 z, \operatorname{sn}_2 z$ — алгебраїчно незалежні еліптичні функції Якобі. Тоді кількість нулів $P(\operatorname{sn}_1 z, \operatorname{sn}_2 z)$ з врахуванням їх кратності при $|z| < K$ не перевищує $C_3 K^2 (\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)$, де C_3 — деяка стала, яка не залежить від многочлена.

3. Доведення теореми 1. Доведення теореми будемо проводити другим методом Гельфонда, викладеним у [3], [4]. Припустимо, що (1) не виконується, тобто для достатньо великого $\lambda \in \mathbb{N}$

$$\max\{|\varkappa_1 - \xi_1|, |\varkappa_2 - \xi_2|, |\operatorname{sn}_1 K_2 - \xi_3|, |\operatorname{sn}_2 iK'_1 - \xi_4|\} < \exp(-\lambda^7 T^2 \ln T). \quad (3)$$

Числа ξ_1, ξ_2 визначають еліптичні функції Якобі, які позначимо через $\tilde{\operatorname{sn}}_1 z, \tilde{\operatorname{sn}}_2 z$. Так як $0 < \varkappa_1 < 1$, $0 < \varkappa_2 < 1$, то, не зменшуючи загальності, можна вибрати ξ_1, ξ_2 такими, щоб виконувались нерівності $0 < \tilde{\xi}_1 < 1$, $0 < \tilde{\xi}_2 < 1$ і функції $\tilde{\operatorname{sn}}_1 z, \tilde{\operatorname{sn}}_2 z$ були алгебраїчно незалежні. Позначимо через $\tilde{K}_i, \tilde{K}'_i$ — повні еліптичні інтеграли першого роду, що відповідають ξ_i, ξ'_i , $i \in \{1, 2\}$. Тоді $(4\tilde{K}_1, 2i\tilde{K}'_1), (4\tilde{K}_2, 2i\tilde{K}'_2)$ — основні періоди $\tilde{\operatorname{sn}}_1 z, \tilde{\operatorname{sn}}_2 z$. З (3) для $i \in \{1, 2\}$ отримаємо

$$\max\{|\tilde{K}_i - \tilde{K}_i|, |\tilde{K}'_i - \tilde{K}'_i|\} < \exp\left(-\frac{\lambda^7}{2} T^2 \ln T\right). \quad (4)$$

З (3) та (4) для достатньо великого λ отримаємо

$$\max\{|\tilde{\operatorname{sn}}_1 \tilde{K}_2 - \xi_3|, |\tilde{\operatorname{sn}}_2 i\tilde{K}_1 - \xi_4|\} < \exp\left(-\frac{\lambda^7}{3} T^2 \ln T\right). \quad (5)$$

Покладемо

$$S = L = \lambda^3 \ln \lambda T, \quad N = \lambda \sqrt{\lambda T}, \quad (6)$$

$$F(z) = \sum_{l_1=0}^L \sum_{l_2=0}^L C_{l_1, l_2} \tilde{\text{sn}}_1^{l_1} z \tilde{\text{sn}}_2^{l_2} z, \quad C_{l_1, l_2} = \sum_{\tau=1}^n C_{l_1, l_2, \tau} \zeta_\tau, \quad C_{l_1, l_2, \tau} \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

де ζ_τ — твірні елементи $\mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_4)$.

Позначимо

$$\varphi_{i,1}(z) = \tilde{\text{sn}}_i \left(z + \frac{\tilde{K}_i}{2} \right), \quad \varphi_{i,2}(w) = \tilde{\text{sn}}_i \left(w + \frac{3\tilde{K}_i}{2} \right), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Тоді

$$\tilde{\text{sn}}_i(z+w) = \frac{\varphi_{i,1}(z)\varphi'_{i,2}(w) + \varphi_{i,2}(w)\varphi'_{i,1}(z)}{1 - \xi_i^2 \varphi_{i,1}^2(z)\varphi_{i,2}^2(w)} = \frac{\Lambda_{i,1}(z, w)}{\Lambda_{i,2}(z, w)}.$$

Нехай $G_{i,s,k,l}(\varkappa_i, z) = \frac{d^s}{dw^s} (\Lambda_{i,1}^k(z, w) \Lambda_{i,2}^l(z, w))|_{w=0}$. Так визначені многочлени задовольняють оцінкам

$$\deg G_{i,s,k,l} \leq 4(k+l), \quad \ln L(G_{i,s,k,l}) \leq s \ln(s(k+l) + c_3(s+k+l)).$$

З (7) подібно, як в [8], [9], отримаємо

$$\begin{aligned} F^{(s)}(z) &= \frac{d^s}{dw^s} ((\Lambda_{1,2}^{-L}(z, w) \Lambda_{2,2}^{-L}(z, w))(F(z+w) \Lambda_{1,2}^L(z, w) \Lambda_{2,2}^L(z, w)))|_{w=0} = \\ &= \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} \frac{d^{s-t}}{dw^{s-t}} (\Lambda_{1,2}^{-L}(z, w) \Lambda_{2,2}^{-L}(z, w))|_{w=0} F_{s,t}(z), \end{aligned}$$

де

$$F_{s,t}(z) = \sum_{l_1=0}^L \sum_{l_2=0}^L C_{l_1, l_2} \sum_{i=0}^t \binom{t}{i} G_{1,t-i, l_1, L-l_1}(\varkappa_1, z) G_{2,i, l_2, L-l_2}(\varkappa_2, z). \quad (8)$$

Застосувавши лему 4 у випадку $\alpha = \xi_3$, $\beta = \xi_1$, $\gamma = \xi_5$, отримаємо оцінку $d(\xi_5)$ та $L(\xi_5)$ числа ξ_5 , яке наближає $\text{sn}'_1 K_2$, а у випадку $\alpha = \xi_4$, $\beta = \xi_2$, $\gamma = \xi_6$ — оцінку $d(\xi_6)$ та $L(\xi_6)$ числа ξ_6 , яке наближає $\text{sn}'_2 iK'_1$. Позначимо через $F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \dots, \xi_6)$ та $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \dots, \xi_6)$ вирази, отримані з $F^{(s)}(2n_1 i\tilde{K}'_1 + 4n_2 \tilde{K}_2)$ та $F_{s,t}(2n_1 i\tilde{K}'_1 + 4n_2 \tilde{K}_2)$ заміною $\tilde{\text{sn}}_1 \tilde{K}_2$, $\tilde{\text{sn}}_2 i\tilde{K}'_1$, $\tilde{\text{sn}}'_1 \tilde{K}_2$, $\tilde{\text{sn}}'_2 i\tilde{K}'_1$ на $\xi_3, \dots, \xi_6$ і застосуємо до $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \dots, \xi_6)$ лему 5. Будемо розглядати $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \dots, \xi_6)$ при $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq t \leq s \leq S$ як $N^2 S$ лінійних форм від nL^2 змінних $C_{l_1, l_2, \tau}$. Використавши леми 2–6 та (6)–(8), виберемо не всі рівні нулю $C_{l_1, l_2, \tau}$ такими, що для $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq t \leq s \leq S$

$$F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \dots, \xi_6) = 0, \quad (9)$$

$$|C_{l_1, l_2, \tau}| < \exp(c_4 \lambda^6 \ln \lambda T^2 \ln T). \quad (10)$$

З (3), (5), (6), (10) і лем 2–5 отримаємо для $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq s \leq S$

$$|F^{(s)}(2n_1 i\tilde{K}'_1 + 4n_2 \tilde{K}_2) - F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \dots, \xi_6)| < \exp\left(-\frac{1}{4} \lambda^7 T^2 \ln T\right). \quad (11)$$

З (9), (11) при $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq s \leq S$ отримаємо

$$|F^{(s)}(2n_1 i \tilde{K}'_1 + 4n_2 \tilde{K}_2)| < \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda^7 T^2 \ln T\right). \quad (12)$$

Покажемо, що (12) виконується і для $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq s \leq \lambda S$.

Нехай $\wp_i(u)$ та $\sigma_i(z)$ відповідають функціям $\tilde{\wp}_i z$, що визначаються числами ξ_i , $i \in \{1, 2\}$ ([1], с. 35, 43), $G(z) = F(z)\sigma_1^L(z - \omega_1)\sigma_2^L(z - \omega_2)$, де ω_i — півперіод $\wp_i(u)$. Виберемо найменше можливе ціле r таким, що

$$r > 32(N+1)(|\tilde{K}_1| + |\tilde{K}_2| + |\tilde{K}'_1| + |\tilde{K}'_2|). \quad (13)$$

Позначимо $R = 12r$. Тоді з лем 2–5, леми 8 та (2), (6), (7), (10), (13) випливає

$$|G(z)|_R < \exp(-\lambda^6 \ln \lambda T^2 \ln T). \quad (14)$$

З (14) отримаємо для $0 \leq s \leq \lambda S$

$$|G^{(s)}(z)|_r < \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^6 \ln \lambda T^2 \ln T\right). \quad (15)$$

Для досить малого ε в ε -околах точок $2n_1 i \tilde{K}'_1$ функція $\sigma_2(z - \omega_2)$ та в ε -околах точок $4n_2 \tilde{K}_2$ функція $\sigma_1(z - \omega_1)$ не мають нулів, тому з леми 7 для $n_1, n_2 \leq 32N$ випливає

$$|\sigma_i(z - \omega_i)|_{z \in V(\varepsilon, 2n_1 i \tilde{K}'_1 + 4n_2 \tilde{K}_2)} > \exp(-c_5 \lambda^5 \ln \lambda T^2). \quad (16)$$

З (14)–(16) для $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq s \leq \lambda S$ отримаємо

$$|F^{(s)}(2n_1 i \tilde{K}'_1 + 4n_2 \tilde{K}_2)| < \exp\left(-\frac{\lambda^6}{3} \ln \lambda T^2 \ln T\right). \quad (17)$$

Враховуючи (11), для $1 \leq n_1, n_2 \leq N$ та $0 \leq s \leq \lambda S$ з (17) випливає

$$|F_{s, n_1, n_2}(\xi_1, \dots, \xi_6)| < \exp\left(-\frac{\lambda^6}{4} \ln \lambda T^2 \ln T\right). \quad (18)$$

Розглядаючи $F_{s, t, n_1, n_2}(\xi_1, \dots, \xi_6)$ як значення відповідного многочлена в алгебраїчних точках, з леми 6, (2), (6) отримаємо для $0 \leq t \leq s \leq \lambda S$, $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $F_{s, t, n_1, n_2}(\xi_1, \dots, \xi_6) \neq 0$, оцінку

$$|F_{s, t, n_1, n_2}(\xi_1, \dots, \xi_6)| > \exp(-\lambda^5 \ln \lambda T^2 \ln T). \quad (19)$$

З (6), (19) отримаємо для $0 \leq s \leq \lambda S$, $1 \leq n_1, n_2 \leq N$

$$|F_{s, n_1, n_2}(\xi_1, \dots, \xi_6)| > \exp(-2\lambda^5 \ln \lambda T^2 \ln T). \quad (20)$$

Оцінки (18) та (20) суперечливі, тому отримаємо для $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq s \leq \lambda S$

$$F_{s, n_1, n_2}(\xi_1, \dots, \xi_6) = 0. \quad (21)$$

З (21) випливає, що многочлен $F(z)$ має не менше $c_6 \lambda^7 \ln \lambda T^2$ нулів (з врахуванням кратності). З леми 9 отримаємо, що нулів може бути не більше $c_7 \lambda^6 \ln \lambda T^2$, тому для достатньо великого $\lambda \in \mathbb{N}$ припущення (3) приводить до протиріччя, яке й доводить теорему.

ЛІТЕРАТУРА

1. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. – M.: Nauka, V.3, 1967. (in Russian)
2. Lawden D.F. Elliptic functions and applications. – Springer-Verlag, Berlin, 1989.
3. Fel'dman N.I. Hilbert's seventh problem. – M.: Moscov. Gos. Univ., 1982. (in Russian)
4. Fel'dman N.I., Nesterenko Yu.V. Transcendental Numbers. – Springer-Verlag, Berlin, 1998.
5. Reyssat E. *Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp*// Bull. Soc. Math. France. – 1980. – V.108. – P. 47–79.
6. Masser D. Elliptic functions and transcendence. – Springer-Verlag, Berlin, 1975.
7. Kholyavka Ya.M. *On the simultaneous approximation of invariants of the elliptic function by algebraic numbers*// Diophantine Analysis, Izd. Mosk. Gos. Univ., Moscow. – 1986. – Part 2. – P. 114–121. (in Russian)
8. Nesterenko Yu.V. *On a measure of algebraic independence of values of an elliptic function*// Izvestiya RAN: Ser. Mat. – 1995. – V.59, №4. – P. 155–178. (in Russian)
9. Chudnovsky G.V. *Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann–Weierschtrass theorem*// Inventiones Math. – 1980. – V.61. – P. 267–290.

Львівський національний університет ім. І. Франка
ya_khol@franko.lviv.ua

Надійшло 13.10.2012
Після переробки 20.01.2013