УДК 517.51

О. О. Карлова, В. К. Маслюченко, О. Д. Мироник

ПЛОЩИНА БІНҐА І НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

O. O. Karlova, V. K. Maslyuchenko, O. D. Myronyk. *The Bing plane and separately continuous mappings*, Mat. Stud. **38** (2012), 188–193.

We prove that the Bing plane $\mathbb{B}$ is a σ-metrizable but not strongly σ-metrizable. Also we show that for c-connected topological spaces X and Y each separately continuous function $f\colon X \times Y \to \mathbb{B}$ is constant.

О. О. Карлова, В. К. Маслюченко, О. Д. Мироник. *Плоскость Бинга и раздельно непрерывные отображения* // Мат. Студії. – 2012. – Т.38, №2. – С.188–193.

Доказано, что плоскость Бинга $\mathbb{B}$ — σ-метризуемое, но не сильно σ-метризуемое пространство. Показано, что для c-связных топологических пространств X и Y каждое раздельно непрерывное отображение $f\colon X \times Y \to \mathbb{B}$ постоянно.

1. Вступ. Дослідження розривів нарізно неперервних відображень $f\colon X \times Y \to Z$ та їх аналогів зі значеннями в конкретних неметризовних просторах Z часто приносить несподіванки. Так, беручи за Z простір $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}$ всіх функцій $z\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ з топологією поточкової збіжності, можна отримати приклад нарізно неперервного і скрізь розривного відображення $f\colon \mathbb{R}^2 \to Z$. Для цього слід розглянути функцію Шварца $\mathrm{sp}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathrm{sp}(u,v) = \frac{2uv}{u^2+v^2}$ при $(u,v) \neq (0,0)$ і $\mathrm{sp}(0,0) = 0$, яка служить хрестоматійним прикладом нарізно неперервної функції, що не є сукупно неперервною (вона розривна в точці $(0,0)$ і тільки в ній), і покласти $f(x,y)(u,v) = \mathrm{sp}(u-x, v-y)$ для довільних точок (x,y) і (u,v) з арифметичної площини $\mathbb{R}^2$. Цю конструкцію у тому випадку, коли $X = Y = [-1,1]$, а $Z = [-1,1]^{[-1,1]^2}$ наведено в [1] під назвою приклад Гоффманна-Йорґенсена.

У праці [2] досліджувалися нарізно неперервні відображення $f\colon X \times Y \to \mathbb{P}$ зі значеннями в площині Немицького $\mathbb{P}$. Там був побудований приклад нарізно неперервного відображення $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}$, що визначається простою формулою $f(x,y) = (x+y, |x-y|)$, у якого множина $D(f)$ точок розриву збігається з діагоналлю $\Delta = \{(x,x)\colon x \in \mathbb{R}\}$, отже, проекція множини точок розриву на обидві осі $X = \mathbb{R}$ і $Y = \mathbb{R}$, збігається з усією прямою $\mathbb{R}$, але разом з тим там же було з'ясовано, що у кожного нарізно неперервного відображення $f\colon X \times Y \to \mathbb{P}$, де X — топологічний простір, а Y — топологічний простір з першою аксіомою зліченності, для кожного $y \in Y$ множина $D_y(f) = \{x \in X\colon (x,y) \in D(f)\}$ є першої категорії в X, зокрема, це буде виконуватись для кожного нарізно неперервного відображення $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}$. Площина Немицького є σ-метризовним, але не сильно σ-метризовним простором, крім того, вона є простором Мура.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C08.
Keywords: separately continuous function, Bing plane, σ-metrizable spaces, continuum.

Результати статті [2] були значно розвинуті в праці [3], зокрема, там було з'ясовано, що тотожне відображення $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}\times[0,+\infty)\to\mathbb{P}$ — це K_hC-функція, у якої на горизонталі $\mathbb{R}\times\{0\}$ немає точок неперервності, в той час як для KC-функцій таке явище неможливе.

Ще раніше в [4], було вказано на те, що кожне нарізно неперервне відображення $f\colon X\times Y\to\mathbb{L}$, що задане на добутку зв'язних просторів X і Y і набуває значень у прямій Зорґенфрея $\mathbb{L}$, обов'язково стале, отже, не має розривів, але KC-функція $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{L}$, $g(x,y)=x$, розривна в кожній точці. Зауважимо, що пряма Зорґенфрея $\mathbb{L}$ — це не σ-метризовний простір і не простір Мура, вона ж не є і напіввичерпним простором (див. з цього приводу [5]).

Ще одне цікаве явище було виявлено, коли Z — це простір $C_p[0,1]$ всіх неперервних функцій $z\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ з топологією поточкової збіжності. В [5] було з'ясовано, що коли X і Y — топологічні простори і Y задовольняє першу аксіому зліченності, то у кожного нарізно неперервного відображення $f\colon X\times Y\to C_p[0,1]$ множина $D(f)$ є першої категорії в $X\times Y$, звідки, зокрема, випливає, що кожна нарізно неперервна функція $f\colon[0,1]^2\to C_p[0,1]$ точково розривна. Разом з тим в [6] був наведений приклад нарізно неперервного відображення $f\colon[0,1]^2\to C_p[0,1]$, що визначається формулою $f(x,y)(t)=\mathrm{sp}(x-t,y)+\mathrm{sp}(x,y-t)$, де $0\le x,y,t\le 1$, яке розривне у кожній точці множини $E=([0,1]\times\{0\})\cup\{0\}\times[0,1]$. Зауважимо, що в [5] було доведено, що $C_p[0,1]$ — напіввичерпний, але не вичерпний і не σ-метризовний простір.

Ці приклади свідчать про важливість вивчення множини точок розриву нарізно неперервних відображень зі значеннями в неметризовних просторах і дають упевненість, що на цьому шляху буде відкрито багато нових цікавих явищ.

2. Перші властивості площини Бінґа. У 1953 році автор відомого метризаційного критерію Р. Г. Бінґ навів приклад зліченного зв'язного гаусдорфового і не регулярного простору ([7], див. також [8, с.518, приклад 6.1.6]). Його ми будемо називати *площиною Бінґа* і позначати символом $\mathbb{B}$. Зрозуміло, що $\mathbb{B}$ — це неметризовний простір, отже, виникає природне бажання з'ясувати чи належить $\mathbb{B}$ до відомих класів просторів, близьких до метризовних, та дослідити розриви нарізно неперервних відображень $f\colon X\times Y\to\mathbb{B}$. Ці задачі вивчаються у даній праці і будуть продовжені в наступній.

Нагадаємо означення площини Бінґа. Нехай $\mathbb{Q}$ — раціональна пряма, тобто множина всіх раціональних чисел з топологією, індукованою з дійсної прямої $\mathbb{R}$. Базу околів точки a в $\mathbb{Q}$ утворюють ε-околи $U_\varepsilon(a)=\{x\in\mathbb{Q}\colon |x-a|<\varepsilon\}=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\cap\mathbb{Q}$. Це ж позначення ми будемо зберігати і для ірраціональних точок a. Розглянемо додатну піввісь $\mathbb{Q}^+=\{y\in\mathbb{Q}\colon y\ge 0\}$ раціональної прямої $\mathbb{Q}$ і декартів добуток

$$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^+=\{p=(x,y)\colon x\in\mathbb{Q}\ \text{і}\ y\in\mathbb{Q}^+\}.$$

Введемо топологічну структуру на добутку $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^+$, вважаючи, що базу околів точки $p=(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^+$ утворюють ε-околи $W_\varepsilon(p)$, де $W_\varepsilon(p)=U_\varepsilon(x)\times\{0\}$ при $y=0$ і $W_\varepsilon(p)=W_\varepsilon(p_1)\cup W_\varepsilon(p_2)\cup\{p\}$ при $y>0$, де $p_1=(x_1,0)$ і $p_2=(x_2,0)$ — такі точки осі абсцис, що трикутник p_1pp_2 рівносторонній. Легко підрахувати, що $x_1=x-y\sqrt{3}$, а $x_2=x+y\sqrt{3}$, отже, числа x_1 і x_2 ірраціональні. Добуток $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^+$ з уведеною топологічною структурою — це і є площина Бінґа $\mathbb{B}$. Зауважимо, що з означення топологічної структури на $\mathbb{B}$ легко випливає, що $\mathbb{B}$ задовольняє першу аксіому зліченності.

Доведемо вказані вище властивості площини Бінґа $\mathbb{B}$, оскільки в [7] щодо цього дано лише скупі вказівки.

Зліченність $\mathbb{B}$ негайно випливає зі зліченності раціональної прямої $\mathbb{Q}$ і зліченності добутку двох зліченних множин.

Аксіома Гаусдорфа легко перевіряється для різних точок $p = (x, y)$ і $q = (u, v)$, де $y = 0$ або $v = 0$, і випливає з того, що числова пряма $\mathbb{R}$ — це гаусдорфовий простір. Перевіримо її у тому випадку, коли $y > 0$ і $v > 0$. Розглянемо точки $x_1 = x - y\sqrt{3}$, $x_2 = x + y\sqrt{3}$, $u_1 = u - v\sqrt{3}$ і $u_2 = u + v\sqrt{3}$. Зауважимо, що рівності $x_i = u_j$ не може бути. Справді, якщо $x_1 = u_1$ або $x_2 = u_2$, то $x - u = \pm(y - v)\sqrt{3}$, отже, обов'язково $y = v$ і $x = u$, адже числа x, y, u, v — раціональні, а число $\sqrt{3}$ ірраціональне. Тому $p = q$, що суперечить тому, що точки p і q різні. Якщо ж $x_1 = u_2$ або $x_2 = u_1$, то $x - u = \pm(y + v)\sqrt{3}$. Але $y + v > 0$, отже, виходить, що $\sqrt{3} = \pm\frac{x-u}{y+v}$ — це раціональне число, а це не так. Тому $x_i \neq u_j$ при $i, j = 1, 2$. Звідси легко вивести, що існує таке $\varepsilon > 0$, що $(U_\varepsilon(x_1) \cup U_\varepsilon(x_2)) \cap (U_\varepsilon(u_1) \cup U_\varepsilon(u_2)) = \varnothing$. А тоді і $W_\varepsilon(p) \cap W_\varepsilon(q) = \varnothing$, що і треба було перевірити. Таким чином $\mathbb{B}$ — це гаусдорфовий простір.

Нехай $E = ((a_1, a_2) \cap \mathbb{Q}) \times \{0\}$, де a_i — дійсні числа і $a_1 < a_2$. Розглянемо при $i \in \{1, 2\}$ прямі L_i^+ та L_i^-, що задаються відповідно рівняннями $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(x - a_i)$. Вони проходять через точки $p_i = (a_i, 0)$ площини і нахилені до вісі абсцис під кутами 60^0 і 120^0. Нехай $W(E)$ — множина всіх тих точок $p = (x, y) \in \mathbb{B}$, що лежать між прямими L_1^+ і L_2^+ чи між прямими L_1^- і L_2^-. Якщо точка $p = (x, y) \in \mathbb{B}$ лежить між прямими L_1^+ і L_2^+, то для неї виконується нерівність $\frac{1}{\sqrt{3}}(x - a_2) < y < \frac{1}{\sqrt{3}}(x - a_1)$, звідки легко отримуємо, що $a_1 < x_1 = x - y\sqrt{3} < a_2$. Якщо ж вона лежить між прямими L_1^- і L_2^+, то уже $a_1 < x_2 = x + y\sqrt{3} < a_2$. Зрозуміло, що тоді для довільного $\varepsilon > 0$ перетин $W_\varepsilon(p) \cap E \neq \varnothing$. Таким чином, всі точки множини $W(E)$ є точками дотику множини E, отже, замикання $\overline{E}$ множини E у просторі $\mathbb{B}$ містить множину $W(E)$.

З цього негайно випливає, що будь-який ε-окіл $W_\varepsilon(p)$ у площині Бінґа $\mathbb{B}$ не містить жодного замкненого околу точки p. Справді, якби існував такий замкнений окіл W точки p, що $W \subseteq W_\varepsilon(p)$, то знайшлося би таке $\delta > 0$, що $W_\delta(p) \subseteq W \subseteq W_\varepsilon(p)$. Але δ-окіл $W_\delta(p)$ містить деяку множину $E = (a_1, a_2) \cap \mathbb{Q} \times \{0\} = W_\delta(q)$ з деяким $q = (u, 0)$. Тому

$$W(E) \subseteq \overline{E} \subseteq W \subseteq W_\varepsilon(p),$$

отже, $W(E) \subseteq W_\varepsilon(p)$, що, очевидно, неможливо. Це показує, що простір $\mathbb{B}$ не регулярний, причому настільки, що жодна його точка p не має бази замкнених околів.

Нарешті, доведемо, що $\mathbb{B}$ — зв'язний простір. Розглянемо довільні дві непорожні відкрито-замкнені множини A і B у просторі $\mathbb{B}$. Оскільки множини A і B відкриті в $\mathbb{B}$ і непорожні, то існують такі точки $p \in A$ і $q \in B$ і число $\varepsilon > 0$, що $W_\varepsilon(p) \subseteq A$ і $W_\varepsilon(q) \subseteq B$. Як зазначалося вище, існують такі множини $E = (a_1, a_2) \cap \mathbb{Q} \times \{0\}$ і $F = (b_1, b_2) \cap \mathbb{Q} \times \{0\}$, що $E \subseteq W_\varepsilon(p)$ і $F \subseteq W_\varepsilon(q)$, а значить, $E \subseteq A$ і $F \subseteq B$. Але множини A і B замкнені, отже, $\overline{E} \subseteq A$ і $\overline{F} \subseteq B$. За доведеним вище $W(E) \subseteq \overline{E}$ і $W(F) \subseteq \overline{F}$, тому $W(E) \cap W(F) \subseteq A \cap B$. З геометричних міркувань очевидно, що $W(E) \cap W(F) \neq \varnothing$, отже, і $A \cap B \neq \varnothing$. Отже, будь-які непорожні відкрито-замкнені множини в просторі $\mathbb{B}$ мають непорожній перетин. Це показує, що площина Бінґа $\mathbb{B}$ не може бути розбита на дві непорожні відкрито-замкнені множини, тобто є зв'язним простором.

3. Площина Бінґа і σ-метризовні простори. Нагадаємо, що топологічний простір X називається *σ-метризовним*, якщо існує така зростаюча послідовність його замкнених метризовних підпросторів X_n, що $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Така послідовність $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ називається *вичерпуванням σ-метризовного простору* X. Якщо σ-метризовний простір X має таке вичерпування $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, що для кожної збіжної в X послідовності точок x_k існує такий індекс n, що $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq X_n$, то його називають *сильно σ-метризовним.*

Множина точок неперервності нарізно неперервних відображень та їх аналогів зі значеннями в сильно σ-метризовних просторах досить добре вивчена (див. [3, 6] і вказану там літературу), є часткові результати і для σ-метризовного простору значень. Ці питання досліджувались у дисертаціях [10, 11]. Відома площина Немицького $\mathbb{P}$ [8, с.47, приклад 1.2.4] дає нам приклад σ-метризовного, але не сильно σ-метризовного простору. Тут ми покажемо, що і площина Бінґа теж така.

Для цього нам буде потрібний такий результат.

Теорема 1. *Нехай X — секвенціальний сильно σ-метризовний простір, $(X_n)_{n=1}^\infty$ — його вичерпування, Y — топологічний простір і $f\colon X \to Y$ — відображення. Тоді f буде неперервним у тому і тільки в тому випадку, коли всі звуження $f_n = f|_{X_n}\colon X_n \to Y$ неперервні.*

Доведення. Оскільки простір X секвенціальний, то неперервність відображення $f\colon X \to Y$ рівносильна його секвенціальній неперервності. Нехай всі звуження f_n неперервні і послідовність точок x_k збігається в X до точки x. Існує такий номер n, що $\{x_k\colon k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subseteq X_n$. З неперервності звуження f_n випливає, що $f(x_k) = f_n(x_k) \to f_n(x) = f(x)$ у просторі Y. Отже, f — секвенціально неперервне, а значить, і неперервне відображення. □

Крім того, ми використаємо, ще один цікавий результат.

Теорема 2. *Кожна неперервна функція $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ стала.*

Доведення. Образ $f(\mathbb{B})$ — це зв'язна підмножина числової прямої $\mathbb{R}$ (як образ зв'язної множини при неперервному відображенні). Оскільки зв'язні підмножини в $\mathbb{R}$ — це проміжки $\langle a, b\rangle$, які при $a < b$ незліченні, а множина $f(\mathbb{B})$ не більш ніж зліченна, то проміжок $f(\mathbb{B})$ вироджується в точку, отже, функція f стала. □

Теорема 3. *Площина Бінґа $\mathbb{B}$ є σ-метризовним, але не сильно σ-метризовним простором.*

Доведення. Оскільки простір $\mathbb{B}$ зліченний, то його елементи можна перенумерувати, отримавши таку послідовність точок p_n, що $\mathbb{B} = \{p_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. З гаусдорфовості $\mathbb{B}$ випливає, що скінченні підпростори $B_n = \{p_1, ..., p_n\}$ простору $\mathbb{B}$ замкнені в $\mathbb{B}$ і дискретні, а значить, метризовні. Оскільки $\mathbb{B} = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ і $B_n \subseteq B_{n+1}$ для кожного n, то послідовність підпросторів B_n — це і є вичерпування σ-метризовного простору $\mathbb{B}$.

Припустимо, що $\mathbb{B}$ сильно σ-метризовний простір і $(X_n)_{n=1}^\infty$ — його вичерпування з $X_1 \neq \varnothing$. Візьмемо якусь точку $p_0 \in X_1$. Оскільки простір X_1 метризовний, то існує метрика d_1 на X_1, що породжує його топологію. Поклавши $f_1(p) = \frac{d_1(p,p_0)}{1+d_1(p,p_0)}$ для $p \in X_1$, ми отримаємо неперервну функцію $f_1\colon X_1 \to [0,1]$ у якої $f_1^{-1}(0) = \{p_0\}$. Оскільки підпростір X_1 замкнений в X_2 і простір X_2 метризовний, а значить нормальний, то за теоремою Тітце-Урисона ([9, с.116]) існує така неперервна функція $g_1\colon X_2 \to [0,1]$, що $g_1|_{X_1} = f_1$. Крім того, з досконалої нормальності метризовного простору X_2 за теоремою Веденісова [9, с.82] випливає, що замкнена в X_2 множина X_1 буде функціонально замкненою, тобто існує така неперервна функція $h_1\colon X_2 \to [0,1]$, що $h_1^{-1}(0) = X_1$. Функція $f_2 = g_1 + h_1\colon X_2 \to [0,2]$ неперервна і $f_2|_{X_1} = f_1$, адже для $p \in X_1$ будемо мати: $f_2(p) = g_1(p) + h_1(p) = f_1(p) + 0 = f_1(p)$. Крім того, $f_2(p_0) = f_1(p_0) = 0$, а при $p \in X_2 \setminus \{p_0\}$ обов'язково $f_2(p) > 0$, адже $f_2(p) = g_1(p) + h_1(p)$, обидва доданки $g_1(p)$ і $h_1(p)$ невід'ємні, причому $g_1(p) > 0$ на $X_1 \setminus \{p_0\}$, а $h_1(p) > 0$ на $X_2 \setminus X_1$. Таким чином, $f_2^{-1}(0) = \{p_0\}$.

Далі за теоремою Тітце-Урисона будуємо неперервну функцію $g_2\colon X_3 \to [0,2]$, для якої $g_2|_{X_2} = f_2$, а за теоремою Веденісова — неперервну функцію $h_2\colon X_3 \to [0,1]$, у якої $h_2^{-1}(0) = X_2$. Покладаючи $f_3 = g_2 + h_2$, отримаємо неперервну функцію $f_3\colon X_3 \to [0,1]$, для якої $f_3|_{X_2} = f_2$ і $f_3^{-1}(0) = \{p_0\}$.

Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми одержимо послідовність неперервних функцій $f_n\colon X_n \to [0,n]$ таких, що $f_{n+1}|_{X_n} = f_n$ і $f_n^{-1}(0) = \{p_0\}$ для кожного n.

Визначимо функцію $f\colon \mathbb{B} \to [0,+\infty)$, покладаючи $f(p) = f_n(p)$, якщо $p \in X_n$. Зрозуміло, що це таке визначення коректне і за теоремою 1 функція f неперервна, адже всі її звуження $f|_{X_n} = f_n$ неперервні. Для цієї функції $f^{-1}(0) = \{p_0\}$.

За теоремою 2 функція f стала, тому $f(p) = f(p_0) = 0$ для кожного $p \in \mathbb{B}$. Але це суперечить рівності $f^{-1}(0) = \{p_0\}$, з якої випливає, що $f(p) \neq 0$ при $p \neq p_0$. Отримана суперечність показує, що площина Бінґа не є сильно σ-метризовним простором. □

4. Континууми і нарізно неперервні відображення зі значеннями в площині Бінґа. Нагадаємо, що зв'язний і компактний топологічний простір називається *континуумом.* Якщо простір можна подати у вигляді об'єднання зростаючої послідовності континуумів, то його ми називатимемо *σ-континуумом.* Топологічний простір називається *точкоподібним* або *пунктиформним* [8, с.542], якщо в ньому кожний непорожній континуум складається з однієї точки.

Теорема 4. *Площина Бінґа $\mathbb{B}$ — це точкоподібний простір.*

Доведення. Нехай K — континнум в $\mathbb{B}$. Оскільки $\mathbb{B}$ — гаусдорфовий простір, то таким буде і його підпростір K. Таким чином K — це гаусдорфовий компактний простір, чи, коротше, компакт. Добре відомо [8, с.199, теорема 3.1.9], що кожний компакт — це нормальний, а значить, і цілком регулярний простір. Таким чином, наш континуум K — це зв'язний цілком регулярний простір. Якби K містив би хоча б дві різні точки, то за теоремою про проміжне значення його потужність $|K|$ була б не меншою від континуальної потужності $\mathfrak{c}$ [8, с.518, наслідок 6.1.3], тобто $|K| \geq \mathfrak{c}$. Але ж $K \subseteq \mathbb{B}$, тому $|K| \leq |\mathbb{B}| = \aleph_0$, тобто множина K не більш ніж зліченна. Це суперечить тому, що $\aleph_0 < \mathfrak{c}$, що і доводить теорему. □

Теорема 5. *Нехай X — континуум і $f\colon X \to \mathbb{B}$ — неперервне відображення. Тоді відображення f стале.*

Доведення. Множина $K = f(X)$ — це континуум в $\mathbb{B}$, бо компактність і зв'язність зберігаються при переході до образу для неперервних відображень. Тоді за теоремою 4, якщо $X \neq \varnothing$, то $|K| = 1$. Це і означає, що f стале. □

Топологічний простір X називається *континуум-зв'язним* (коротко *c-зв'язним*), якщо для будь-яких двох точок x_1 і x_2 з X існує такий континум C в X, що $\{x_1, x_2\} \subseteq C$. Кожний лінійно зв'язний простір є c-зв'язним, а кожний c-зв'язний простір є зв'язним. Площина Бінґа — це приклад зв'язного, але не c-зв'язного простору. Кожний σ-континуум також, очевидно, c-зв'язний. Кожний нескінченновимірний банаховий простір, очевидно, лінійно зв'язний, а значить, c-зв'язний, але він не є σ-континуумом, бо він не є навіть σ-компактним, що легко випливає з теореми Бера про категорію і леми Рісса про ε-перпендикуляр, згідно з якою замкнені кулі ненульового радіуса в нескінченновимірному нормованому просторі не можуть бути компактними множинами. Таким чином, є багато c-зв'язних просторів, які не є σ-континуумами.

Теорему 5 легко розповсюдити на c-зв'язні простори.

Теорема 6. *Нехай X — c-зв'язний топологічний простір і відображення $f\colon X \to \mathbb{B}$ неперервне. Тоді f стале.*

Доведення. Нехай x_0 — фіксована точка з простору X, а x — довільна точка з X. Оскільки простір X є c-зв'язним, то існує такий континуум C в X, що $\{x_0, x\} \subseteq C$. Звуження $f|_C$ буде неперервним, а отже, сталим за теоремою 5. Тому $f(x) = f(x_0)$. Це доводить сталість f на X. □

Теорема 7. *Нехай X і Y — c-зв'язні простори і $f\colon X \times Y \to \mathbb{B}$ — нарізно неперервне відображення. Тоді f стале.*

Доведення. Покладемо, як звичайно, $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$ для довільних $x \in X$ і $y \in Y$. Відображення $f^x\colon Y \to \mathbb{B}$ і $f_y\colon X \to \mathbb{B}$ за умовою неперервні для довільних $x \in X$ і $y \in Y$, а значить, сталі за теоремою 6. Тому f — нарізно стале відображення. Та такі відображеня обов'язково сталі, адже для довільних точок $p_0 = (x_0, y_0)$ і $p = (x, y)$ з $X \times Y$ будемо мати $f(p) = f(x, y) = f^x(y) = f^x(y_0) = f_{y_0}(x) = f_{y_0}(x_0) = f(x_0, y_0) = f(p_0)$. Тут ми використали сталість відображень f^x і f_{y_0}. □

Як показують наведені вище приклади, цей результат сильніший ніж відповідна теорема з [11].

ЛІТЕРАТУРА

1. Christensen J.P.R. *Joint continuity of separately continuous functions*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – V.82, №3. – P. 455–461.
2. Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Filipchuk O.I. *Points of joint continuity of separately continuous mappings with values in the Niemytski plane*// Mat. Stud. – 2006. – V.26, №2. – P. 217–221. (in Ukrainian)
3. Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Filipchuk O.I. *Joint continuity of K_hC-functions with values in Moore spaces*// Ukr. Math. J. – 2008. – V.60, №11. – P. 1539–1547. (in Ukrainian)
4. Maslyuchenko V.K., Filipchuk O.I. *The essentiality of σ-metrizability in results on joint continuity of KC-functions*// Int. Conf. dedicated to the 125th anniversary of Hans Hahn. Book of Abstracts. – Chernivtsi: Ruta, 2004. – P. 65–66. (in Ukrainian)
5. Maslyuchenko V.K., Myronyk O.D. *Separately continuous mappings and stratifiable spaces*// Mat. Visn. NTSH. – 2010. – V.7. – P. 111–121. (in Ukrainian)
6. Maslyuchenko V.K., Myronyk O.D. *Joint continuity of mappings with values in various generalizations of metrizable spaces*// Modern problems of Probability Theory and Mathematical Analysis. Book of Abstracts. – Ivano-Frankivsk, 2012. – P. 5–6. (in Ukrainian)
7. Bing R.H. A connected countable Hausdorff space. – Proc. Amer. Math. Soc., V.4, 1953. – 474 p.
8. Engelking R., General topology, revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
9. Maslyuchenko V.K. Separately continuous mappings and Kothe spaces, Doctoral thesis. – Chernivtsi, 1999. – 345 p.
10. Filipchuk O.I. Separately continuous mappings and their analogs with values in non-metrizable spaces, PhD thesis. – Chernivtsi, 2010. – 124 p.
11. Karlova O.O., Myronyk O.D. *Separately continuous mappings with values in the Bing plane*// Int. Conf. "Approximation Theory and its Applications" dedicated to the 70th anniversary of O.I.Stepanets. – Kyiv, 2012. – P. 51–52. (in Ukrainian)

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича
math.analysis.chnu@gmail.com

Надійшло 2.07.2012
Після переробки 16.11.2012