УДК 517.95

М. М. Бокало, А. М. Цебенко

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ, ЯКІ ОПИСУЮТЬСЯ ЕВОЛЮЦІЙНИМИ РІВНЯННЯМИ З ВИРОДЖЕННЯМ В ПОЧАТКОВИЙ МОМЕНТ ЧАСУ

M. M. Bokalo, A. M. Tsebenko. *Optimal control for systems described by evolution equations degenerated at the initial moment*, Mat. Stud. **38** (2012), 177–187.

We prove the existence and uniqueness of the solutions of the optimal control problems for systems described by evolution equations degenerated at the initial moment. A characterization is given for the solutions of the considered problems. We also consider in detail the case of the final observation and obtain a set of correlations that characterize the optimal controls.

М. М. Бокало, А. М. Цебенко. *Оптимальное управление системами, которые описываются эволюционными уравнениями с вырождением в начальный момент времени* // Мат. Студії. – 2012. – Т.38, №2. – C.177–187.

Доказывается существование и единственность решений задач оптимального управления системами, которые описываются эволюционными уравнениями с вырождением в начальный момент времени. Дается характеризация решений рассматриваемых задач. Подробно рассмотрен случай финального наблюдения и получена совокупность соотношений, характеризирующие оптимальные управления.

Вступ. Основи теорії оптимального керування детермінованими системами, що описуються рівняннями з частинними похідними, вперше систематично описано в монографії [1]. Далі ця теорія розвивалася в працях багатьох математиків (див., наприклад, [2]–[7]). У всіх цих працях, за винятком [6], [7], розглядаються еволюційні рівняння, що задані на обмеженому часовому проміжку і ніде не вироджуються. Якщо ж рівняння задані на необмеженому знизу часовому проміжку (див. [10] і бібліографію там), то основи теорії оптимального керування системами, що описуються такими еволюційними рівняннями, при певних обмеженнях розглядалися в роботах [6], [7]. Тут ми розглядатимемо проблему оптимального керування еволюційними системами, стан яких визначається диференціальними рівняннями параболічного типу, що задані на скінченому часовому проміжку і вироджуються в початковий момент часу. Такого типу рівняння розглядалися в багатьох роботах (див., наприклад, [9]–[10]).

Структура статті така. У першому пункті сформульовано і обґрунтовано коректність задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь, що вироджуються в початковий момент. Розв'язок такого типу задачі описує стан керованої системи. В другому пункті ставиться задача оптимального керування та доводиться її однозначна розв'язність.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 49J20, 58D25.
Keywords: optimal control, final observation, evolution degenerated equation, problem without initial conditions.

Сукупність співвідношень, які характеризують оптимальне керування у випадку фінального спостереження, наведені в третьому пункті.

1. Коректність задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь, що сильно вироджуються в початковий момент часу. Спочатку нагадаємо означення потрібних нам далі просторів функцій і розподілів. Нехай X — довільний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і нормою $\|\cdot\|_X$, а I — будь-який числовий проміжок. Під $L^2_{\rm loc}(I;X)$ розумітимемо лінійний простір визначених на I зі значеннями в X функцій, які є вимірними і для будь-якого відрізка $[a,b]\subset I$ їх звуження на цей відрізок належать простору $L^2(a,b;X)$. Під $D'({\rm int}I;X)$ (${\rm int}I$ — множина внутрішніх точок проміжку I) розумітимемо простір визначених на $D({\rm int}I)$ зі значеннями в X розподілів, тобто простір лінійних функціоналів на $D({\rm int}I)$ зі значеннями в X ($D({\rm int}I)$ — простір нескінченно диференційовних і фінітних на ${\rm int}I$ функцій). Легко переконатися, використовуючи інтеграл Бохнера, що простір $L^2_{\rm loc}(I;X)$ можна ототожнити з підпростором простору розподілів $D'({\rm int}I;X)$. Це, зокрема, дозволяє говорити про похідні функцій з $L^2_{\rm loc}(I;X)$ в сенсі розподілів $D'({\rm int}I;X)$ і належність таких похідних до $L^2_{\rm loc}(I;X)$.

Через $\mathcal{L}(F;G)$, де F і G — гільбертові простори, позначимо банахів простір лінійних обмежених операторів, що переводять F в G. Під $\mathcal{L}(F)$ розумітимемо $\mathcal{L}(F;F)$.

Нехай V і H — гільбертові простори над полем дійсних чисел з, відповідно, скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_V$ і $(\cdot,\cdot)$ та нормами $\|\cdot\|$ і $|\cdot|$. Припустимо, що простір V неперервно і щільно вкладається в H, тобто V є підмножиною H, замикання V за нормою H збігається з H та існує стала $\lambda>0$ така, що

$$\lambda|v|^2\le\|v\|^2\quad\forall v\in V. \tag{1}$$

Нехай V' і H' спряжені, відповідно, до V та H простори. Вважатимемо (провівши відповідне ототожнення функціоналів), що простір H' є підпростором простору V'. Ототожнивши (на підставі теореми Рісса) простори H та H', в результаті отримаємо неперервні та щільні вкладення

$$V\subset H\subset V'. \tag{2}$$

Зауважимо, що в цьому випадку $\langle g,v\rangle_V=(g,v)$ для будь-яких $v\in V, g\in H\subset V'$, де $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ — означає дію елемента з простору V' на елемент простору V (канонічний добуток на $V'\times V$). Тому далі вживатимемо позначення $(\cdot,\cdot)$ і замість $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$. Також використовуватимемо позначення $(\cdot,\cdot)_{V'}$, $\|\cdot\|_*$ для відповідно скалярного добутку і норми в V'.

Нехай $S:=(0,T]$, де $T>0$ — задане число.

Через φ позначимо функцію з простору $C([0,T])\cap C^1((0,T])$, яка задовольняє умови:

1) $\varphi(0)=0$; 2) $\varphi(t)>0$ при $t\in(0,T]$; 3) $\int_0^T[\varphi(s)]^{-1}ds=+\infty$.

Нехай $\alpha:S\to(0,+\infty)$, $\beta:S\to(0,+\infty)$ — вимірні функції такі, що

$$(\forall\, t\in S)\colon\ \alpha(t)\le\beta(t),\quad (\forall\,\tau\in(0,T))\colon\ 0<\inf_{t\in[\tau,T]}\alpha(t),\quad \sup_{t\in[\tau,T]}\beta(t)<\infty.$$

Нам будуть потрібні спеціальні простори функцій, визначених на S. Дамо їх означення. Нехай X — гільбертів простір, про який говорилося на початку пункту. Якщо $\omega\in\mathbb{R}$ — довільне число, а $\gamma:S\to(0,+\infty)$ — яка-небудь вимірна функція, що є обмеженою на будь-якому відрізку з S, то позначимо

$$L^2_{\varphi,\omega,\gamma}(S;X):=\left\{f\in L^2_{\rm loc}(S;X):\int_S\gamma(t)[\varphi(t)]^{-1}e^{2\omega\int_T^t\alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}\|f(t)\|_X^2dt<\infty\right\}.$$

Лінійний простір $L^2_{\varphi,\omega,\gamma}(S;X)$ є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(f,g)_{L^2_{\varphi,\omega,\gamma}(S;X)} = \int_S [\varphi(t)]^{-1}\gamma(t)e^{2\omega\int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}(f(t),g(t))_X dt.$$

На підставі (2) легко переконатися, що простори $L^2_{\rm loc}(S;V)$, $L^2_{\rm loc}(S;V')$, а також $L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(S;V), L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S;V')$ можна ототожнити з підпросторами простору розподілів $D'((0,T);V')$.

З відомих результатів (див., наприклад, [12, с.177–179]) легко випливає такий факт: *якщо функція y з $L^2_{loc}(S;V)$ має похідну y' з $L^2_{loc}(S;V')$, то y належить (можливо, після зміни її значень на множині міри нуль) до простору $C(S;H)$ і функція $t\to|y(t)|^2$ є абсолютно неперервною на будь-якому відрізку з S, причому виконується рівність*

$$\frac{d}{dt}|y(t)|^2 = 2(y'(t),y(t)) \quad \textit{для майже всіх} \quad t\in S. \tag{3}$$

Введемо простір $W_{\varphi,\omega}(S) := \{y\in L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(S;V) : y'\in L^2_{\varphi,\omega,\varphi^2/\alpha}(S;V')\}$, який є гільбертовим зі скалярним добутком $(y,z)_{W_{\varphi,\omega}(S)} := (y,z)_{L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(S;V)} + (y',z')_{L^2_{\varphi,\omega,\varphi^2/\alpha}(S;V')}$, де y',z' є похідними функцій, відповідно, y,z в сенсі розподілів $D'((0,T);V')$.

Зі сказанного вище випливає, що

$$W_{\varphi,\omega}(S)\subset C(S;H). \tag{4}$$

Крім того, елементи простору $W_{\varphi,\omega}(S)$ володіють властивостями, що описані в такому твердженні.

Лема 1. *Нехай $y\in W_{\varphi,\omega}(S)$, де $\omega\in\mathbb{R}$ — довільне число. Тоді існує $y_0\geq 0$ таке, що*

$$\lim_{t\to 0}|y(t)|\exp\left\{\omega\int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds\right\} = y_0,$$

причому, якщо

$$\inf_{t\in S}\alpha(t) > 0, \tag{5}$$

то $y_0 = 0$. Крім того, правильною є така оцінка

$$|y(t)|^2\exp\left\{2\omega\int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds\right\} \leq y_0^2 + (2\omega\lambda^{-1}+1)\times$$

$$\times\int_0^t \big([\varphi(\tau)]^{-1}\alpha(\tau)|y(\tau)|^2 + \varphi(\tau)[\alpha(\tau)]^{-1}|y'(\tau)|^2\big)\exp\left\{2\omega\int_T^\tau \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds\right\}d\tau,\ t\in S, \tag{6}$$

де $\lambda>0$ — стала з (1).

Це твердження доведемо дещо пізніше, а тепер припустимо, що задана сім'я операторів $A(t): V\to V',\ t\in S$, така, що:
$\mathbf{A}_1$: функція $t\to(A(t)v,w)$ вимірна на S для будь-яких $v,w\in V$;
$\mathbf{A}_2$: для будь-яких $v\in V$ і $t\in S$ виконуються нерівності

$$(A(t)v,v)\geq\alpha(t)\|v\|^2, \tag{7}$$

$$\|A(t)v\|_*\leq\beta(t)\|v\|. \tag{8}$$

Розглянемо рівняння

$$\varphi(t)\frac{dy(t)}{dt} + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in S, \tag{9}$$

де $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; V')$ — задана функція.

Під *розв'язком рівняння* (9) розумітимемо функцію $y \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; V)$, яка має похідну в сенсі розподілів $D'((0,T); V')$ з простору $L^2_{\mathrm{loc}}(S; V')$ та задовольняє рівняння (9) в просторі $L^2_{\mathrm{loc}}(S; V')$.

Для рівняння (9) розглянемо **задачу**: *знайти його розв'язок, який задовольняє умову*

$$\exp\left\{\omega\int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds\right\}|y(t)| \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to +0, \tag{10}$$

де $\omega \in \mathbb{R}$ *— задане число.*

Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (9), (10).

Теорема 1. *Правильні такі два твердження:*
(i) Задача (9), (10) має не більше одного розв'язку, якщо $\omega \le \lambda$, *де* $\lambda > 0$ *— стала з (1).*
(ii) Нехай $\omega < \lambda$ *— яке-небудь число,* $f \in L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S; V')$. *Крім того, припустимо, що існує стала* $K \ge 1$ *така, що*

$$\beta(t) \le K\alpha(t), \quad t \in S. \tag{11}$$

Тоді існує (єдиний) розв'язок задачі (9), (10), він належить до $W_{\varphi,\omega}(S)$ *і задовольняє оцінки*

$$e^{2\omega\int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}|y(t)|^2 \le C_1\int_0^t [\varphi(\eta)]^{-1}[\alpha(\eta)]^{-1}e^{2\omega\int_T^\eta \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}\|f(\eta)\|_*^2 d\eta,\ t \in S, \tag{12}$$

$$\|y\|_{W_{\varphi,\omega}(S)} \le C_2\|f\|_{L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S;V')}, \tag{13}$$

де C_1, C_2 *— додатні сталі, які залежать тільки від* ω, λ *і* K.

Доведення. Нехай $\widetilde{S}:=(-\infty, 0]$. Покладемо

$$\theta(t) := \int_T^t \frac{ds}{\varphi(s)},\ t \in S. \tag{14}$$

і позначимо через θ^{-1} функцію, яка є оберненою до функції θ, заданої в (14).

Введемо лінійний оператор Z, який взаємно однозначно переводить лінійний простір функцій $F := \{h\colon S \to V'\}$ на лінійний простір функцій $\widetilde{F} := \{\widetilde{h}\colon \widetilde{S} \to V'\}$ за правилом $Zh = \widetilde{h}$, де $\widetilde{h}(\tau) := h(t)|_{t=\theta^{-1}(\tau)}$, $\tau \in \widetilde{S}$, $t \in S$, тобто оператор Z функції з простору F ставить у відповідність функцію з $\widetilde{F}$, отриману з даної в результаті заміни змінної

$$\tau = \theta(t), \quad t \in S, \quad \tau \in \widetilde{S}. \tag{15}$$

Нехай $\widetilde{\alpha} = Z\alpha$, $\widetilde{\beta} = Z\beta$. Очевидно, що

$$\widetilde{\alpha}(\tau) \le \widetilde{\beta}(\tau) \quad \forall\, \tau \in S, \quad 0 < \inf_{\tau\in[\rho,0]}\widetilde{\alpha}(\tau), \quad \sup_{\tau\in[\rho,0]}\widetilde{\beta}(\tau) < \infty \quad \forall\, \rho \in (-\infty, 0).$$

Для довільних гільбертового простору X зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і нормою $\|\cdot\|_X$, дійсного числа ω та вимірної локально обмеженої функції $\widetilde{\gamma}\colon \widetilde{S}\to(0,+\infty)$ визначимо простір

$$L^2_{\omega,\widetilde{\gamma}}(\widetilde{S};X):=\left\{\widetilde{f}\in L^2_{\mathrm{loc}}(\widetilde{S};X)\colon \int_{\widetilde{S}}\widetilde{\gamma}(\tau)e^{2\omega\int_0^\tau\widetilde{\alpha}(s)ds}\|\widetilde{f}(\tau)\|_X^2d\tau<\infty\right\}.$$

Цей простір є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(\widetilde{f},\widetilde{g})_{L^2_{\omega,\widetilde{\gamma}}(\widetilde{S};X)}=\int_{\widetilde{S}}\widetilde{\gamma}(\tau)e^{2\omega\int_0^\tau\widetilde{\alpha}(s)ds}(\widetilde{f}(\tau),\widetilde{g}(\tau))_Xd\tau$$

та відповідною йому нормою, яку позначимо через $\|\cdot\|_{L^2_{\omega,\widetilde{\gamma}}(\widetilde{S};X)}$.

Введемо ще простір

$$W_\omega(\widetilde{S}):=\{\widetilde{y}\in L^2_{\omega,\widetilde{\alpha}}(\widetilde{S};V)\colon \widetilde{y}'\in L^2_{\omega,1/\widetilde{\alpha}}(\widetilde{S};V')\},$$

який є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(y,z)_{W_\omega(\widetilde{S})}:=(y,z)_{L^2_{\omega,\widetilde{\alpha}}(\widetilde{S};V)}+(y',z')_{L^2_{\omega,1/\widetilde{\alpha}}(\widetilde{S};V')},$$

де y' і z' є похідними функцій, відповідно, y та z в сенсі розподілів $D'((-\infty,0);V')$.

Зауважимо, що звуження оператора Z на підпростори $L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(S;V), L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S;V')$, $W_{\varphi,\omega}(S)$ простору F є ізометрією на підпростори, відповідно, $L^2_{\omega,\widetilde{\alpha}}(\widetilde{S};V), L^2_{\omega,1/\widetilde{\alpha}}(\widetilde{S};V')$, $W_\omega(\widetilde{S})$ простору $\widetilde{F}$. Покажемо це на прикладі просторів $L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(S;V)$ і $L^2_{\omega,\widetilde{\alpha}}(\widetilde{S};V)$. Нехай $y\in L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(S;V)$ і $\widetilde{y}=Zy$. Враховуючи (15) і, зокрема, співвідношення $dt=\varphi(t)d\tau$, маємо

$$\|y\|^2_{L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(S;V)}\equiv\int_S\alpha(t)e^{2\omega\int_T^t\alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}\|y(t)\|^2[\varphi(t)]^{-1}dt=$$

$$=\int_{\widetilde{S}}\widetilde{\alpha}(\tau)e^{2\omega\int_T^{\theta^{-1}(\tau)}\alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}\|\widetilde{y}(\tau)\|^2d\tau=\int_{\widetilde{S}}\widetilde{\alpha}(\tau)e^{2\omega\int_0^\tau\widetilde{\alpha}(s)ds}\|\widetilde{y}(\tau)\|^2d\tau\equiv\|\widetilde{y}\|^2_{L^2_{\omega,\widetilde{\alpha}}(\widetilde{S};V)}.$$

Звідси легко випливає те, що потрібно. Аналогічно перевіряємо правильність нашого твердження стосовно інших пар просторів.

Зробимо в задачі (9), (10) заміну змінних (15). У результаті отримаємо задачу

$$\frac{d\widetilde{y}}{d\tau}+\widetilde{A}(\tau)\widetilde{y}(\tau)=\widetilde{f}(\tau),\quad \tau\in\widetilde{S}, \tag{16}$$

$$e^{\omega\int_0^\tau\widetilde{\alpha}(s)ds}|\widetilde{y}(\tau)|\to0\quad \text{при}\quad \tau\to-\infty, \tag{17}$$

де $\widetilde{f}=Zf$, $\widetilde{y}=Zy$, $\widetilde{A}(\tau)=A(t)|_{t=\theta^{-1}(\tau)}, \tau\in\widetilde{S}$.

Легко переконуємося, що сім'я операторів $\widetilde{A}(\tau)\colon V\to V', \tau\in\widetilde{S}$, задовольняє умови:

A$'_1$: функція $\tau\to(\widetilde{A}(\tau)v,w)$ вимірна на $\widetilde{S}$ для будь-яких $v,w\in V$;

A$'_2$: для будь-яких $v\in V$ і $\tau\in\widetilde{S}$ виконуються нерівності $(\widetilde{A}(\tau)v,v)\geq\widetilde{\alpha}(\tau)\|v\|^2$, $\|\widetilde{A}(\tau)v\|_*\leq\widetilde{\beta}(\tau)\|v\|$.

Тепер відмітимо, що задача (16), (17) досліджувалася в роботі [6] і там доведено, що:

(i) задача (16), (17) має не більше одного розв'язку при виконанні умови $\omega\leq\lambda$, де λ — стала з умови (1);

(ii) якщо $\omega < \lambda$ та існує стала $K \ge 1$ така, що $\widetilde{\beta}(t) \le K\widetilde{\alpha}(t),\ t \in S$, то існує (єдиний) розв'язок задачі (16), (17), він належить $W_\omega(\widetilde{S})$ та задовольняє оцінки

$$e^{2\omega\int_0^\tau \widetilde{\alpha}(s)ds}|\widetilde{y}(\tau)|^2 \le C_1 \int_{-\infty}^{\tau} [\widetilde{\alpha}(\xi)]^{-1} e^{2\omega\int_0^\xi \widetilde{\alpha}(s)ds}\|\widetilde{f}(\xi)\|_*^2 d\xi, \quad \tau \in S, \tag{18}$$

$$\|\widetilde{y}\|_{W_\omega(\widetilde{S})} \le C_2 \|\widetilde{f}\|_{L^2_{\omega,1/\widetilde{\alpha}}(\widetilde{S};V')}, \tag{19}$$

де C_1, C_2 — додатні сталі, які залежать тільки від ω, λ і K.

На підставі цих результатів і сказанного вище можна зробити висновок про те, що для завершення доведення нашої теореми нам достатньо перевірити, чи з оцінок (18) і (19) випливають оцінки, відповідно, (12) і (13). Зауважимо, що оцінка (13) безпосередньо випливає з оцінки (19) та властивостей оператора Z. Переконаємося в правильності оцінки (12). Для цього спочатку в лівій частині оцінки (18) зробимо заміну змінної (15). Тоді отримаємо $e^{2\omega\int_0^\tau \widetilde{\alpha}(s)ds}|\widetilde{y}(\tau)|^2 = e^{2\omega\int_0^{\theta(t)} \widetilde{\alpha}(s)ds}|y(t)|^2 = e^{2\omega\int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}|y(t)|^2$. Тепер проведемо заміну змінних $\xi = \theta(\eta), \eta \in S, \xi \in \widetilde{S}$, в інтегралі правої частини оцінки (18):

$$\int_{-\infty}^{\tau} [\widetilde{\alpha}(\xi)]^{-1} e^{2\omega\int_0^\xi \widetilde{\alpha}(s)ds}\|\widetilde{f}(\xi)\|_*^2 d\xi = \int_0^{\theta^{-1}(\tau)} [\alpha(\eta)]^{-1} e^{2\omega\int_0^{\theta(\eta)} \widetilde{\alpha}(s)ds}\|f(\eta)\|_*^2 [\varphi(\eta)]^{-1} d\eta =$$

$$= \int_0^t [\alpha(\eta)]^{-1} e^{2\omega\int_T^\eta \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}\|f(\eta)\|_*^2 [\varphi(\eta)]^{-1} d\xi.$$

На підставі цих двох рівностей та оцінки (18) маємо оцінку (12). □

Доведення леми 1. Правильність цього твердження безпосередньо випливає з леми 1 праці [6]. Справді, нехай $y \in W_{\varphi,\omega}(S)$, а $\widetilde{y}{:=}Zy$. Як було сказано вище, $\widetilde{y}$ належить простору $W_\omega(\widetilde{S})$. Тоді з леми 1 праці [6] випливає існування $y_0 \ge 0$ такого, що

$$\lim_{\tau\to-\infty} |\widetilde{y}(\tau)| \exp\left\{\omega \int_0^\tau \widetilde{\alpha}(s)ds\right\} = y_0, \tag{20}$$

причому, коли $\inf_{t\in\widetilde{S}} \widetilde{\alpha}(t) > 0$, то $y_0 = 0$. Там же стверджується, що правильною є оцінка

$$|\widetilde{y}(\tau)|^2 \exp\left\{2\omega \int_0^\tau \widetilde{\alpha}(s)ds\right\} \le y_0^2 + (2\omega\lambda^{-1} + 1)\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\tau} \left(\widetilde{\alpha}(\eta)|\widetilde{y}(\eta)|^2 + [\widetilde{\alpha}(\eta)]^{-1}|\widetilde{y}'(\eta)|^2\right) \exp\left\{2\omega \int_0^\eta \widetilde{\alpha}(s)ds\right\} d\eta, \quad \tau \in \widetilde{S}. \tag{21}$$

Для завершення доведення достатньо в (20) та (21) провести заміну змінних (15). □

2. Формулювання задачі оптимального керування та її однозначна розв'язність. Нехай U — гільбертів простір керувань; ω — деяке число; $A(t)\colon V \to V'$, $t \in S$ — сім'я операторів, яка описана в попередньому пункті; B — лінійний неперервний оператор, який переводить U в $L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S;V')$, тобто є елементом простору $\mathcal{L}(U; L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S;V'))$; g — елемент простору $L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S;V')$.

Стан досліджуваної еволюційної системи $y(v) = y(\cdot; v)$ при заданому керуванні $v \in U$ визначатимемо як функцію з простору $W_{\varphi,\omega}(S)$, що є розв'язком рівняння

$$\varphi(t)\frac{d}{dt}y(t;v) + A(t)y(t;v) = g(t) + (Bv)(t), \quad t \in S, \tag{22}$$

і задовольняє умову

$$|y(t;v)|\exp\left\{\omega\int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds\right\}\to 0 \text{ при } t\to 0. \tag{23}$$

Нехай $\mathcal{H}$ — деякий гільбертів простір спостережень; $C\in\mathcal{L}(W_{\varphi,\omega}(S);\mathcal{H})$ — заданий оператор, який визначає спостереження $z(v){:=}Cy(v)$ при керуванні $v\in U$.
Через N позначимо симетричний оператор з простору $\mathcal{L}(U)$, який задовольняє умову

$$(Nv,v)_U\ge\nu\|v\|_U^2,\quad v\in U, \tag{24}$$

де $\nu=\mathrm{const}>0$. Прийнявши $\Phi(z,v){:=}\|z-z_0\|_{\mathcal{H}}^2+(Nv,v)_U, (z,v)\in\mathcal{H}\times U$, введемо в розгляд функцію вартості $J(v){:=}\Phi(z(v),v), v\in U$, тобто

$$J(v)=\|Cy(v)-z_0\|_{\mathcal{H}}^2+(Nv,v)_U,\quad v\in U, \tag{25}$$

де $z_0\in\mathcal{H}$ — заданий елемент.

Нехай U_∂ — опукла замкнена множина в U. **Задача**, яку ми розглядаємо, полягає у знаходженні елементів $u\in U_\partial$ (u — оптимальне керування) таких, що

$$J(u)=\inf_{v\in U_\partial}J(v). \tag{26}$$

Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (26) і нас цікавитиме питання існування та єдиності розв'язку задачі (26).

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (11) *і* $\omega<\lambda$, *де* λ *— стала з нерівності (1). Тоді задача (26) має єдиний розв'язок і він характеризується варіаційною нерівністю*

$$\Big(Cy(u)-z_0, C\big(y(v)-y(u)\big)\Big)_{\mathcal{H}}+(Nu,v-u)_U\ge 0\quad\forall v\in U_\partial. \tag{27}$$

При доведенні цієї теореми суттєво будемо опиратися на таке твердження, правильність якого безпосередньо випливає з теореми 1.3 (див. [1, с.18]).

Твердження 1. *Нехай* $v\mapsto J(v)\colon U\to\mathbb{R}$ *— строго опуклий і диференційовний функціонал, який у випадку, коли* U_∂ *— необмежена множина, задовольняє умову*

$$J(v)\to+\infty \text{ при } \|v\|_U\to+\infty,\quad v\in U_\partial. \tag{28}$$

Тоді існує єдиний розв'язок (оптимальне керування) задачі (26) і він характеризується варіаційною нерівністю

$$J'(u)\cdot(v-u)\ge 0\quad\forall v\in U_\partial. \tag{29}$$

Доведення теореми 2. Нам достатньо довести, що в нашому випадку виконуються всі умови твердження 1. Нехай $W^*_{\varphi,\omega}(S)$ — лінійний підпростір простору $W_{\varphi,\omega}(S)$, який складається функцій, які задовольняють умову (10). Легко переконатися, використовуючи лему 1, що $W^*_{\varphi,\omega}(S)$ з нормою простору $W_{\varphi,\omega}(S)$ є банаховим простором.

Зауважимо, що відображення $y(\cdot)\mapsto A(\cdot)y(\cdot)$ переводить простір $L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(S;V)$ в простір $L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S;V')$. Справді, для довільного $y\in L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(S;V)$ на підставі (8) і (11) маємо

$$[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_T^t\alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}\|A(t)y(t)\|_*^2[\varphi(t)]^{-1}\le[\alpha(t)]^{-1}\beta^2(t)e^{2\omega\int_T^t\alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}\|y(t)\|^2[\varphi(t)]^{-1}\le$$
$$\le K^2\alpha(t)e^{2\omega\int_T^t\alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}\|y(t)\|^2[\varphi(t)]^{-1},\quad t\in S. \tag{30}$$

Оскільки права частина нерівності (30) інтегровна по S, то з цієї нерівності випливає, що функція $t \mapsto A(t)y(t)$ належить простору $L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S;V')$. Зауваживши, що функція φ є обмеженою, як неперервна на відрізку, з того, що $y' \in L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S;V')$, отримаємо $\varphi y' \in L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S;V')$. Отож, на підставі сказанного є коректно визначеним оператор $L\colon W^*_{\varphi,\omega}(S) \to L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S;V')$ за правилом

$$(Ly)(t):=\varphi(t)\frac{dy(t)}{dt} + A(t)y(t), \quad t \in S, \quad y \in W^*_{\varphi,\omega}(S).$$

Оскільки ми припустили, що $\omega < \lambda$, то з теореми 1 випливає бієктивність оператора L, причому оператор L і обернений до нього $L^{-1}\colon L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S;V') \to W^*_{\varphi,\omega}(S)$ є неперервними. Справді, для L це легко перевіряється з використанням нерівності (30), а для L^{-1} випливає з оцінки (13), якщо покласти $y:=L^{-1}f$. Отже, оператор L здійснює ізоморфізм між просторами $W^*_{\varphi,\omega}(S)$ і $L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S;V')$.

З (22), (23) випливає, що для кожного $v \in U$ стан $y(v)$ системи визначається за правилом

$$y(v) = L^{-1}(g + Bv). \tag{31}$$

Звідси, зокрема, випливає, що відображення $v \mapsto y(v)\colon U \to W^*_{\varphi,\omega}(S)$ є афінним і неперервним. В силу цього і наших припущень отримаємо, що функціонал J є строго опуклим і неперервним. Те, що він є і диференційовним, доводиться цілком аналогічно, як це зроблено при доведенні теореми 2 роботи [6]. Диференціал функціоналу J має вигляд

$$J'(v)\cdot h = 2(Cy(v) - z_0, CL^{-1}Bh)_{\mathcal{H}} + 2(Nv,h)_U, \quad v \in U, h \in U. \tag{32}$$

Умова (28) виконується, оскільки на підставі (24) маємо

$$J(v) = \|Cy(v) - z_0\|^2_H + (Nv,v)_U \geq \nu\|v\|^2, \quad v \in U. \tag{33}$$

Зі сказаного і твердження 1 випливає, що задача (26) має єдиний розв'язок і він характеризується варіаційною нерівністю (29). Нерівність (29) в нашому випадку, враховуючи (32) і те, що $L^{-1}B(v-u) = y(v) - y(u)$ (див. (31)), можна записати у вигляді (27). $\square$

3. Сукупність співвідношень, які характеризують оптимальне керування у випадку фінального спостереження. Для дальшої конкретизації співвідношень, що характеризують оптимальне керування, треба уточняти типи спостережень. Ми розглянемо випадок *фінального спостереження*, тобто виконання умови

$$\mathbf{F}\colon\ \mathcal{H} = H,\ C = DP,\ \text{де}\ \ Pz = z(T)\ \ \forall z \in W_{\varphi,\omega}(S),\ D \in \mathcal{L}(H)$$

(нескладно переконатися, що $P \in \mathcal{L}(W_{\varphi,\omega}(S);H)$). В цьому випадку нерівність (27) матиме вигляд

$$\Big(Dy(T;u) - z_0, D\big(y(T;v) - y(T;u)\big)\Big)_H + (Nu, v-u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{34}$$

Оскільки $H = H'$, то з (34) маємо

$$(D^*(Dy(T;u) - z_0), y(T;v) - y(T;u))_H + (Nu, v-u)_U \geq 0 \ \ \forall v \in U_\partial, \tag{35}$$

де D^* — спряжений до D оператор, тобто D^* — оператор з $\mathcal{L}(H)$ такий, що

$$(Dv, w) = (v, D^*w) \ \ \forall v, w \in H.$$

Для кожного $t \in S$ через $A^*(t)\colon V \to V'$ позначимо спряжений до $A(t)$ оператор, тобто $A^*(t) \in \mathcal{L}(V;V')$ такий, що

$$(A^*(t)v, w) = (A(t)w, v) \quad \forall v, w \in V. \tag{36}$$

Введемо в розгляд спряжений стан $t \mapsto p(t;u) \in L^2_{loc}(S;V) \cap C(S;H)$, як розв'язок задачі Коші

$$-\varphi(t)\frac{dp(t;u)}{dt} + A^*(t)p(t;u) = 0 \quad \text{в} \quad D'(S;V'), \tag{37}$$

$$p(T;u) = D^*(Dy(T;u) - z_0). \tag{38}$$

Існування та єдиність розв'язку цієї задачі випливає з відомих результатів, якщо в ній зробити заміну t на $-t$ (див., наприклад, [11, Твердження 2.3, с.112]).

Подібно, як і у доведенні теореми 3 роботи [6], отримуємо такі оцінки розв'язку задачі (37), (38):

$$|p(t)| \le |p_T| \exp\left\{\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds\right\}, \quad t \in S, \quad p_T := p(T), \tag{39}$$

$$\int_S \alpha(t) \exp\left\{-2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds\right\} \|p(t)\|^2[\varphi(t)]^{-1}dt \le \frac{|p_T|^2}{2\min\{1; 1-\lambda^{-1}\omega\}}, \tag{40}$$

$$\int_S [\alpha(t)]^{-1} \exp\left\{-2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds\right\} \|p'(t)\|_*^2\varphi(t)dt \le \frac{K^2|p_T|^2}{2\min\{1; 1-\lambda^{-1}\omega\}}. \tag{41}$$

Тепер для майже кожного $t \in S$ скалярно домножимо (37) на $[\varphi(t)]^{-1}(y(t;v) - y(t;u)), v \in V$, і проінтегруємо отриману рівність за t від $\tau \in (0,T)$ до T:

$$-\int_\tau^T \Big(\frac{d}{dt}p(t;u),\ y(t;v)-y(t;u)\Big)dt + \int_\tau^T \big(A^*(t)p(t;u),\ (y(t;v)-y(t;u)\big)[\varphi(t)]^{-1}dt = 0. \tag{42}$$

Звідси після відповідних перетворень отримаємо

$$\begin{aligned}(p(T;u), y(T;v) - y(T;u)) = (p(\tau;u), y(\tau;v) - y(\tau;u)) + \\ + \int_\tau^T \Big(p(t;u), \frac{d}{dt}(y(t;v) - y(t;u)) + [\varphi(t)]^{-1}A(t)(y(t;v) - y(t;u))\Big)dt.\end{aligned} \tag{43}$$

З рівностей

$$\varphi(t)\frac{d}{dt}y(t;v) + A(t)y(t;v) = g(t) + (Bv)(t), \quad t \in S,$$

$$\varphi(t)\frac{d}{dt}y(t;u) + A(t)y(t;u) = g(t) + (Bu)(t), \quad t \in S$$

випливає рівність

$$\frac{d}{dt}(y(t;v) - y(t;u)) + [\varphi(t)]^{-1}A(t)(y(t;v) - y(t,u)) = [\varphi(t)]^{-1}(B(v-u))(t), \quad t \in S. \tag{44}$$

З (43), (44) легко здобудемо

$$\begin{aligned}(p(T;u), y(T;v) - y(T;u)) = (p(\tau;u), y(\tau;v) - y(\tau;u)) + \\ + \int_\tau^T \big(p(t;u), (B(v-u))(t)\big)[\varphi(t)]^{-1}dt.\end{aligned} \tag{45}$$

Покажемо, що в (45) можна перейти до границі при $\tau \to 0$. На підставі (23) і (39):

$$|(p(\tau;u), y(\tau;v) - y(\tau;u))| \leq |p(\tau;u)| \cdot |y(\tau;v) - y(\tau;u)| \leq$$
$$\leq |p(T;u)| e^{\omega \int_T^\tau \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds} (|y(\tau;v)| + |y(\tau;u)|) = |p(T;u)| \gamma(\tau), \tag{46}$$

де $\gamma(t), t \in S$, — функція така, що $\gamma(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Легко бачити, що

$$\int_\tau^T |(p(t;u), (B(v-u))(t))| [\varphi(t)]^{-1} dt \leq \int_\tau^T \|(p(t;u)\| \cdot \|(B(v-u))(t)\|_* [\varphi(t)]^{-1} dt =$$
$$= \int_\tau^T [\alpha(t)]^{1/2} e^{-\omega \int_T^\tau \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds} \|p(t;u)\| [\varphi(t)]^{-1/2} \times \tag{47}$$
$$\times [\alpha(t)]^{-1/2} e^{\omega \int_T^\tau \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds} \|(B(v-u))(t)\|_* [\varphi(t)]^{-1/2} dt.$$

На підставі (40) і того, що $B(v-u) \in L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S;V')$, можна зробити висновок про інтегровність на S підінтегральної функції в інтегралі правої частини нерівності (47). Врахувавши це, а також (46), перейдемо в (45) до границі при $\tau \to 0$:

$$(p(T;u), y(T;v) - y(T;u)) = \int_S (p(t;u), (B(v-u))(t)) [\varphi(t)]^{-1} dt. \tag{48}$$

Покладемо $\widehat{p}(t;u) := p(t;u) e^{-2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds}$, $t \in S$. На підставі (40) можемо зробити висновок, що $\widehat{p}(u) \in L_{\varphi,\omega,\alpha}(S;V)$. Очевидно, що правильною є рівність

$$\int_S (p(t;u), (B(v-u))(t)) [\varphi(t)]^{-1} dt = \int_S e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} ((B(v-u))(t), \widehat{p}(t;u)) [\varphi(t)]^{-1} dt. \tag{49}$$

Нехай виконується умова (5). Покладемо

$$\mathbb{V}_{\varphi,\omega} := L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(S;V), \quad \mathbb{H}_{\varphi,\omega} := L^2_{\varphi,\omega,1}(S;H), \quad \mathbb{V}'_{\varphi,\omega} := L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S;V').$$

Як було сказано раніше, простори $\mathbb{V}_{\varphi,\omega}, \mathbb{H}_{\varphi,\omega}, \mathbb{V}'_{\varphi,\omega}$ є гільбертовими. Зауважимо, що в припущенні (5) правильним є ланцюжок неперервних і щільних включень

$$\mathbb{V}_{\varphi,\omega} \subset \mathbb{H}_{\varphi,\omega} \subset \mathbb{V}'_{\varphi,\omega}. \tag{50}$$

Ототожнимо спряжений до $\mathbb{H}_{\varphi,\omega}$ простір з ним самим. Тоді спряжений до $\mathbb{V}_{\varphi,\omega}$ простір ототожнюється з $\mathbb{V}'_{\varphi,\omega}$ і дія елемента $f \in \mathbb{V}'_{\varphi,\omega}$ на елемент $v \in \mathbb{V}_{\varphi,\omega}$ визначається так

$$((f,v)) = \int_S e^{2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds} (f(t), v(t)) [\varphi(t)]^{-1} dt. \tag{51}$$

На підставі (51) бачимо, що (49) можна записати у вигляді

$$\int_S (p(t;u), (B(v-u))(t)) [\varphi(t)]^{-1} dt = ((\widehat{p}(u), B(v-u))) = \langle B^* \widehat{p}(u), v-u \rangle_U. \tag{52}$$

Тому, з (38), (48), (52) випливає, що співвідношення (35) рівносильне до нерівності

$$(\Lambda_U^{-1} B^* \widehat{p}(u) + Nu, v-u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial, \tag{53}$$

де $\Lambda_U : U \to U'$ канонічний ізоморфізм Ріса.

Отже, ми довели таке твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення теореми 2 і умови* **F** *та (5). Тоді розв'язок задачі (26) (оптимальне керування) характеризується співвідношеннями*

$$\varphi(t)\frac{dy(t;u)}{dt} + A(t)y(t;u) = g(t) + (Bu)(t), \quad t \in S,$$
$$t \mapsto y(t;u) \in L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(S;V),$$
$$-\varphi(t)\frac{dp(t;u)}{dt} + A^*(t)p(t;u) = 0, \quad t \in S,$$
$$p(T;u) = D^*(Dy(T;u) - z_0),$$
$$t \mapsto \widehat{p}(t;u) := p(t;u)\exp\left\{-2\omega\int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds\right\} \in L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(S;V),$$
$$(\Lambda_U^{-1}B^*\widehat{p}(u) + Nu, v - u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Lions J.-L. Optimal control of systems described by partial differential equations. – M.: Mir, 1972. (in Russian)
2. Boltyanskiy V.G. Mathematical methods of optimal control. – M.: Nauka, 1969. (in Russian)
3. Balakrishnan V. Semigroup theory and control theory. – Washington, 1965.
4. Butkovsky A.G. Methods for control of systems with distributed parameters. – M.: Nauka, 1975. – 568p. (in Russian)
5. Zgurovsky M.Z., Melnyk V.S., Novikov A.N. Applied methods of analysis and control of nonlinear processes and fields. – K.: Naukova dumka, 2004. – 590p. (in Russian)
6. Bokalo M. *Optimal control of evolution systems without initial conditions*// Visn. L'viv Univ., Ser. Mekh.-Mat. – 2010. – V.73. – P. 85–113. (in Ukrainian)
7. Bokalo M.M. *Optimal control problem for evolution systems without initial conditions*// Nonlinear boundary problem. – 2010. – V.20. – P. 14–27. (in Ukrainian)
8. Freedman A., Schuss Z. *Degenerate evolution equations in Hilbert space*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – V.161. – P. 401–427.
9. Gorbachuk M.L., Pivtorak N.I. *About solutions of evolution parabolic equations with degeneration* // Differential equations. – 1985. – V.21, №8. – P. 1317–1323. (in Russian)
10. Bokalo M., Lorenzi A. *Linear evolution first-order problems without initial conditions*// Milan Journal of Mathematics. – 2009. – V.77. – P. 437–494.
11. Showalter R.E. Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. – Math. Surveys and Monogr. V.49. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997.
12. Gayevskyy H., Greger K., Zaharias K. Nonlinear operator equations and operator differential equations. – M.: Mir, 1978. – 336p. (in Russian)

Кафедра диференціальних рівнянь
Львівського національного університету імені Івана Франка
mm.bokalo@gmail.com

Надійшло 12.03.2012