Математичні Студії. Т.38, №2 Matematychni Studii. V.38, No.2

УДК 517.956.227+517.956.8

В. М. Гут

КОЛИВНІ СИСТЕМИ З М'ЯКИМИ ВАЖКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

V. M. Hut. *Vibrating systems with heavy soft inclusions*, Mat. Stud. **38** (2012), 162–176.

The Neumann spectral problem for an elliptic operator of the second order with singularly perturbed coefficients is considered. The asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions is studied. The problem describes the eigenmodes of a composite material with a finite number of heavy and soft inclusions. The number-by-number convergence of the eigenvalues and the corresponding eigenspaces is established. The limit eigenvalue problem involves a non-local boundary condition which arises from the non trivial coupling of the inclusions.

В. М. Гут. *Колеблющиеся системы с мягкими тяжелыми включениями* // Мат. Студії. – 2012. – Т.38, №2. – C.162–176.

Рассмотрена спектральная задача Неймана для эллиптического оператора второго порядка с сингулярно возмущенными коэффициентами. Задача моделирует собственные колебания композитного материала с конечным числом мягких и одновременно тяжелых включений произвольной формы. Изучено асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций задачи. Найдены главные члены асимптотики собственных элементов с учетом их кратности. Предельная спектральная задача содержит нелокальное краевое условие, описывающие нетривиальное взаимодействия включений.

1. Вступ. Сучасні технології, що використовують нові види матеріалів, зокрема композити, сприяли активному розвитку математичної теорії сильно неоднорідних середовищ. Огляд досягнень теорії усереднення та асимптотичних методів з достатньо повною бібліографією можна знайти в монографіях [1]–[5].

Основні математичні моделі цієї теорії — це крайові задачі для диференціальних рівнянь із сингулярною залежністю їхніх коефіцієнтів від параметрів. Так, власні коливання композитних середовищ моделюють крайовими задачами для еліптичних диференціальних операторів, в яких коефіцієнти при старших похідних відповідають за жорсткість матеріалу, а коефіцієнт при спектральному параметрі — за розподіл маси середовища. В залежності від типу композитного матеріалу деякі з цих коефіцієнтів, чи всі одночасно, можуть сингулярно залежати від малого параметра.

Різноманітні моделі коливних систем з локально збуреними розподілами маси вивчали в [6]–[14], див. також огляд результатів в [15]. Зокрема, моделі середовищ складної геометрії з одночасним збурення як густини маси, так і жорсткості розглянуто в [9, 10]. Властивості механічних систем з масами, які концентруються в околі одновимірних многовидів, описані в [12, 13]. В [14] розглянуто випадок великої кількості тонких важких включень, в припущені, що включення здійснюють лише жорсткі переміщення.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 47A25, 47A55, 58J37, 65L15.
Keywords: spectral Neumann problem, eigenvalue, eigenfunction, singular perturbation, asymptotics of spectrum, heavy inclusions.

У праці [16] вивчені власні коливання композитного середовища, яке містить скінченну кількість надміцних легких включень. Деякі одновимірні моделі контрастних структур, які ми вивчаємо були розглянуті в [17, 18]. Моделі середовищ вивчених в [16]–[17] мали одночасне збурення як густини маси, так і жорсткості. Припускалося, що композит утворений з матеріалів, коли жорсткіший матеріал має меншу щільність маси.

У праці вивчена модель композитного середовища, яке містить скінченну кількість м'яких важких включень довільної форми. Відношення коефіцієнтів жорсткості основного тіла та включень є порядку ε^{-1} при $\varepsilon \to 0$, а відношення густин маси — порядку $\varepsilon^{\varkappa}$, де $\varkappa > 0$. Досліджено асимптотичну поведінку власних значень та власних функцій відповідної спектральної задачі Неймана. Основним результатом статті є теореми збіжності спектра та власних підпросторів, коли параметр ε прямує до нуля. Спектральна задача, яка виникає в границі, поставлена на включеннях і містить інтегральну крайову умову. Така нелокальна умова описує нетривіальну взаємодію усіх включень, яка не зникає навіть після переході до границі. Причиною такої взаємодії є крайові умови Неймана, у випадку умов Діріхле така взаємодія не спостерігається. Зауважимо, що аналогічний ефект описаний С. О. Назаровим ([8]) для коливних систем з великою кількістю концентрованих мас.

Доведення теорем збіжності власних значень та власних функцій опирається на факт рівномірної резольвентної збіжності деякої сім'ї самоспряжених операторів. Оператори, що відповідають збуреній та граничній задачам, спершу діють в різних функціональних просторах, що унеможливлює їх порівняння в одній із операторних топологій. Проте збуреній задачі можна поставити у відповідність деяку нелінійну в'язку операторів, що визначена в тому ж просторі, що і граничний оператор. Для побудови в'язки використані оператори Діріхле-Неймана ([20], див. також [2, розділ IV.6]). Такий прийом, зокрема, застосовували в [21].

2. Формулювання задачі. Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, а ω — її строго внутрішня підмножина, яка може мати скінченну кількість компонент зв'язності, кожна з яких є областю. Введемо позначення $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\omega}$ та $\partial\Omega_0 = \partial\Omega \bigcup \partial\omega$, де межі $\partial\Omega$ та $\partial\omega$ є гладкими. Для кожного $\varepsilon \in (0,1)$ введемо функції

$$a_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon a(x), & \text{коли } x \in \omega, \\ \alpha(x), & \text{коли } x \in \Omega_0, \end{cases} \qquad r_\varepsilon(x) = \begin{cases} r(x), & \text{коли } x \in \omega, \\ \varepsilon^{\varkappa}\rho(x), & \text{коли } x \in \Omega_0, \end{cases}$$

де a, α, r та ρ — неперервні та додатні на замиканні своїх областей визначення, а $\varkappa$ — додатне число.

Розглянемо задачу на власні значення

$$-\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = \lambda^\varepsilon r_\varepsilon u^\varepsilon \text{ в } \Omega, \quad \partial_\nu u_\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{1}$$

де ∂_ν — похідна вздовж векторного поля нормалей на $\partial\Omega$. На поверхні $\partial\omega$ контакту двох середовищ від власної функції u^ε вимагатимемо виконання умов спряження

$$\big[u^\varepsilon\big]_{\partial\omega} = 0, \quad \big[a_\varepsilon\, \partial_\nu u^\varepsilon\big]_{\partial\omega} = 0, \tag{2}$$

де $\big[\,\cdot\,\big]_{\partial\omega}$ — стрибок функції при переході через поверхню $\partial\omega$. Вважатимемо, що векторне поле нормалей на $\partial\omega$ зорієнтоване в бік ω.

При кожному $\varepsilon \in (0,1)$ задача (1), (2) є стандартною спектральною задачею з дискретним невід'ємним спектром. Крім того, $\lambda_0^\varepsilon = 0$ є власним значенням із сталою власною функцією. Надалі вивчатимемо поведінку при $\varepsilon \to 0$ відмінних від нуля власних значень λ^ε та відповідних власних функції u^ε. Перенумеруємо власні значення задачі з врахуванням кратності

$$0 = \lambda_0^\varepsilon < \lambda_1^\varepsilon \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n^\varepsilon \leqslant \cdots \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Власні функції $\{u_n^\varepsilon\}_{n=0}^\infty$ можна вибрати так, що вони утворюватимуть ортонормовану базу у ваговому просторі $L_2(r_\varepsilon, \Omega)$ зі скалярним добутком

$$(u, v)_\varepsilon = \int_\Omega r_\varepsilon u\overline{v}\, dx = \int_\omega r u\overline{v}\, dx + \varepsilon^\varkappa \int_{\Omega_0} \rho u\overline{v}\, dx$$

та нормою $\|u\|_\varepsilon = (u, u)_\varepsilon^{1/2}$. Введемо також квадратичну форму

$$b_\varepsilon[u] = \varepsilon \int_\omega a|\nabla u|^2\, dx + \int_{\Omega_0} \alpha|\nabla u|^2\, dx, \quad u \in H^1(\Omega).$$

Лема 1. *Власні значення λ_n^ε є неперервними функціями змінної $\varepsilon \in (0,1)$. Кожне власне значення задовольняє оцінку $\lambda_n^\varepsilon \leqslant c_n\varepsilon$, де сталі c_n не залежать від ε.*

Доведення. Справді, з варіаційного принципу Куранта маємо

$$\lambda_{n-1}^\varepsilon = \inf_{E_n} \sup_{u \in E_n \setminus \{0\}} \frac{b_\varepsilon[u]}{\|u\|_\varepsilon^2},$$

де інфімум беруть за всіма n-вимірними підпросторами E_n в $H^1(\Omega)$. Неперервність власних значень в кожній точці інтервала $(0,1)$ випливає з неперервності на кожному відрізку $[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \subset (0,1)$ квадратичних форм $b_\varepsilon[u]$ і $\|u\|_\varepsilon^2$ стосовно ε, яка є рівномірною на кожній обмеженій множині з $H^1(\Omega)$.

Далі, розглянемо допоміжну спектральну задачу

$$-\mathrm{div}(a\nabla v) = \eta r v \text{ в } \omega, \quad v = 0 \text{ на } \partial\omega.$$

Нехай $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — перші n власних значень цієї задачі, а $v_1, \ldots, v_n$ — відповідні ортонормовані власні функції. Через $P_n \subset H^1(\Omega)$ позначимо лінійну оболонку цих функцій, продовжених нулем на всю область Ω. Тоді

$$\lambda_{n-1}^\varepsilon \leqslant \sup_{u \in P_n \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega a_\varepsilon |\nabla u|^2\, dx}{\int_\Omega \rho_\varepsilon |u|^2\, dx} = \varepsilon \sup_{u \in P_n \setminus \{0\}} \frac{\int_\omega a|\nabla u|^2\, dx}{\int_\omega r|u|^2\, dx} = \varepsilon\eta_n,$$

що завершує доведення. □

2.1. Гранична задача. Побудуємо формальну асимптотику власних значень та власних функцій. Розвинення власного значення виберемо таким $\lambda^\varepsilon \sim \varepsilon\mu + o(\varepsilon)$, а власної функції — $u^\varepsilon \sim u + o(\varepsilon)$ в ω та $u^\varepsilon \sim v + \varepsilon v_1 + o(\varepsilon)$ в Ω_0. Підставивши ці асимптотичні розвинення у (1) та (2), отримаємо рівності

$$\mathrm{div}(\alpha\nabla v) = 0 \text{ в } \Omega_0, \quad \partial_\nu v = 0 \text{ на } \partial\Omega_0; \tag{3}$$

$$\mathrm{div}(\alpha\nabla v_1) = 0 \text{ в } \Omega_0, \quad \alpha\, \partial_\nu v_1 = a\, \partial_\nu u \text{ на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{4}$$

$$-\mathrm{div}(a\nabla u) = \mu r u \text{ в } \omega, \quad u = v \text{ на } \partial\omega. \tag{5}$$

Розв'язком задачі Неймана (3) є довільна стала функція на Ω_0, тобто задача має нульове власне значення. Тоді згідно з альтернативою Фредгольма розв'язок v_1 неоднорідної задачі (4) існуватиме лише при виконанні умови

$$\int_{\partial\omega} a\, \partial_\nu u\, ds = 0, \tag{6}$$

де ds — елемент поверхні. З рівностей (5) отримаємо спектральну задачу

$$-\operatorname{div}(a\nabla u) = \mu r u \quad \text{в } \omega, \ u \text{ — стала на } \partial\omega, \quad \int_{\partial\omega} a\,\partial_\nu u\,ds = 0. \tag{7}$$

Таку задачу надалі називатимемо *граничною.* Нехай ω має K компонент зв'язності $\omega_1, \ldots, \omega_K$. Під записом "*$u$ — стала на $\partial\omega$*" тут і надалі розумітимемо, що звуження u на поверхню $\partial\omega_k$ дорівнює деякій сталі c_k, і всі ці сталі рівні. Зауважимо також, що значення u на межі $\partial\omega$ в задачі (7) невідоме.

Формальні міркування, проведені вище, дозволяють припустити, що власні значення задачі (1), (2) матимуть асимптотику $\lambda_n^\varepsilon = \varepsilon\mu_n + o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, де μ_n — власне значення задачі (7), а власні функції u_n^ε збігатимуться до власних функцій задачі (7), які за неперервністю продовжені сталою в область Ω_0. Строге обґрунтування цього факту буде наведене в наступних розділах.

3. Операторне формулювання збуреної та граничної задач. Через $H^s(\Omega)$ тут і надалі позначатимемо простори С. Л. Соболєва. Задачі (1), (2) в просторі $L_2(r_\varepsilon, \Omega)$ відповідає самоспряжений оператор $A_\varepsilon = -\frac{1}{r_\varepsilon}\operatorname{div}(a_\varepsilon\nabla\,\cdot)$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(A_\varepsilon) = \bigl\{u \in H^2(\Omega \setminus \partial\omega)\colon \partial_\nu u = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad [u]_{\partial\omega} = 0, \quad [a_\varepsilon\,\partial_\nu u]_{\partial\omega} = 0\bigr\}.$$

Граничній ж задачі (7) відповідає оператор $T = -\frac{1}{r}\operatorname{div}(a\nabla\cdot)$ в $L_2(r, \omega)$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(T) = \Bigl\{v \in H^2(\omega)\colon v \text{ — стала на } \partial\omega, \quad \int_{\partial\omega} a\,\partial_\nu v\,ds = 0\Bigr\}.$$

Лема 2. *Спектр граничної задачі* (7) *є дійсним і дискретним. Всі власні значення є невід'ємними і мають скінченну кратність.*

Доведення. Покажемо, що оператор T невід'ємний, самоспряжений із компактною резольвентою. Побудуємо спряжений оператор T^*. Для довільних $u \in \mathcal{D}(T)$ і $v \in H^2(\omega)$ інтегрування частинами дає

$$\begin{aligned}(Tu, v)_{L_2(r,\omega)} &= -\int_\omega \operatorname{div}(a\nabla u)\,\overline{v}\,dx = -\int_\omega u\operatorname{div}(a\nabla\overline{v})\,dx + \\ &+ \int_{\partial\omega} a\,\partial_\nu u\,\overline{v}\,ds - \int_{\partial\omega} au\,\partial_\nu\overline{v}\,ds.\end{aligned} \tag{8}$$

Тому дія операторів T і T^* є однаковою. Позаяк $\int_{\partial\omega} a\,\partial_\nu u\,ds = 0$ для всіх $u \in \mathcal{D}(T)$, то перший поверхневий інтеграл в (8) дорівнюватиме нулю, коли функція v є сталою на кожній з меж $\partial\omega_k$, і ці сталі рівні. Інший поверхневий інтеграл дорівнюватиме нулю для всіх $u \in \mathcal{D}(T)$ лише тоді, коли $\int_{\partial\omega} a\,\partial_\nu\overline{v}\,ds$ рівний нулю, бо u — стала на $\partial\omega$. Неважко зауважити, що накладені на v умови є необхідними і достатніми для того, щоб обидва поверхневі інтеграли були одночасно рівні нулю для всіх $u \in \mathcal{D}(T)$. Отже, $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$, а оператор T — самоспряжений.

Крім того, оператор T є невід'ємним, позаяк

$$(Tu, u)_{L_2(r,\omega)} = \int_\omega a|\nabla u|^2\,dx \geqslant 0$$

для усіх $u \in \mathcal{D}(T)$. Доведення компактності резольвенти оператора T є стандартним і випливає з компактності вкладення просторів $H^2(\omega) \subset L_2(\omega)$. □

Нашою метою є встановлення близькості спектрів операторів A_ε та T. Ця близькість випливала б зі збіжності резольвент операторів A_ε до резольвенти оператора T. Проте ці оператори визначені в різних просторах. Щоб побудувати оператори, які діють в *одному функціональному просторі*, зведемо задачу (1), (2) до *еквівалентної* задачі на множині ω. Поставимо у відповідність задачі (1), (2) інший оператор, а точніше сім'ю операторів, що діятимуть в просторі $L_2(r,\omega)$. Для $\varphi \in H^{3/2}(\partial\omega)$ розглянемо крайову задачу

$$-\mathrm{div}(\alpha\nabla v) = \theta\rho v \text{ в } \Omega_0, \quad v = \varphi \text{ на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v = 0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{9}$$

Якщо число θ не є власним значенням відповідної однорідної задачі, то (9) має єдиний розв'язок $v \in H^2(\Omega_0)$, а також коректно визначена нормальна похідна $\partial_\nu v \in H^{1/2}(\partial\omega)$. Введемо оператор Діріхле-Неймана $\Lambda(\theta)\colon H^{3/2}(\partial\omega) \to H^{1/2}(\partial\omega)$, який діє за правилом $\Lambda(\theta)\varphi = \alpha\,\partial_\nu v$. Таке відображення допускає неперервне продовження $\Lambda(\theta)\colon H^{1/2}(\partial\omega) \to H^{-1/2}(\partial\omega)$, яке при дійсних θ є самоспряженим оператором ([19]). Крім того, якщо відрізок $[\theta_1,\theta_2] \subset \mathbb{R}$ не містить власних значень однорідної задачі, то

$$\|\Lambda(\theta) - \Lambda(\theta')\| \leqslant c|\theta - \theta'|, \tag{10}$$

для всіх $\theta,\theta' \in [\theta_1,\theta_2]$, де стала c залежить лише від θ_1,θ_2.

Зробимо в рівнянні (1) заміну спектрального параметра $\lambda^\varepsilon = \varepsilon\mu^\varepsilon$. Звуження функції u^ε на Ω_0 є розв'язком задачі

$$-\mathrm{div}(\alpha\nabla v) = \varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon\rho v \text{ в } \Omega_0, \quad v = u^\varepsilon \text{ на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Скориставшись оператором $\Lambda(\theta)$, другу з умов спряження (2) перепишемо так $\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon)u^\varepsilon = \varepsilon a\,\partial_\nu u^\varepsilon$. Тому μ^ε і звуження u^ε на ω є власним значенням та власною функцією задачі

$$-\mathrm{div}(a\nabla u) = \mu r u \text{ в } \omega, \quad (\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu) - \varepsilon a\,\partial_\nu)u = 0 \text{ на } \partial\omega \tag{11}$$

з нелінійною залежністю від μ.

У просторі $L_2(r,\omega)$ введемо сім'ю операторів $T_\varepsilon(\mu) = -\frac{1}{r}\mathrm{div}(a\nabla\,\cdot)$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(T_\varepsilon(\mu)) = \big\{v \in H^2(\omega)\colon (\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu) - \varepsilon a\partial_\nu)v = 0 \text{ на } \partial\omega\big\}.$$

Нехай $\Sigma = \{(\varepsilon,\mu) \in (0,1)\times\mathbb{R}\colon \varepsilon^{\varkappa+1}\mu < \eta_1\}$, де η_1 — найменше власне значення відповідної однорідної задачі (9). Для $(\varepsilon,\mu) \in \Sigma$ оператори $T_\varepsilon(\mu)$ коректно визначені, а задачу (11) можна записати у вигляді $(T_\varepsilon(\mu) - \mu)u = 0$.

Отже, задачі (11) ми поставили у відповідність нелінійну операторну в'язку $T_\varepsilon(\mu) - \mu$. Власними значеннями цієї в'язки є точки μ, в яких оператор $T_\varepsilon(\mu) - \mu$ не має обмеженого оберненого. Тому число μ називатимемо власним значенням задачі (11), якщо $\mu \in \sigma(T_\varepsilon(\mu))$. Зауважимо, що нуль є власним значенням оператора $T_\varepsilon(0)$ для всіх $\varepsilon > 0$.

Лема 3. *Для кожної пари $(\varepsilon,\mu) \in \Sigma$ оператор $T_\varepsilon(\mu)$ є самоспряженим, а його резольвента є компактною.*

Доведення. Для всіх $u \in \mathcal{D}(T_\varepsilon(\mu))$ та $v \in H^2(\omega)$ маємо

$$(T_\varepsilon(\mu)u,v)_{L_2(r,\omega)} = \int_\omega \mathrm{div}(a\nabla u)\,\overline{v}\,dx = \int_\omega u\,\mathrm{div}(a\nabla\overline{v})\,dx + \int_{\partial\omega} a\partial_\nu u\,\overline{v}\,ds - \int_{\partial\omega} au\partial_\nu\overline{v}\,ds.$$

Із самоспряженості оператора $\Lambda(\theta)$, отримаємо

$$\int_{\partial\omega} a\partial_\nu u\,\overline{v}\,ds - \int_{\partial\omega} au\partial_\nu\overline{v}\,ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\omega}\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu)\,u\overline{v}\,ds - \int_{\partial\omega} au\partial_\nu\overline{v}\,ds =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\omega} u\,(\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu) - \varepsilon a\partial_\nu)\overline{v}\,ds.$$

Отже, максимальний клас функцій v, для яких виконується тотожність

$$(T_\varepsilon(\mu)u, v)_{L_2(r,\omega)} = (u, T^*_\varepsilon(\mu)v)_{L_2(r,\omega)},$$

збігається з $\mathcal{D}(T_\varepsilon(\mu))$, тобто $T^*_\varepsilon(\mu) = T_\varepsilon(\mu)$. Залишилося зауважити, що область визначення $D(T_\varepsilon(\mu))$ з нормою графіка компактно вкладається в $L_2(r,\omega)$, звідки випливає компактність резольвенти оператора $T_\varepsilon(\mu)$. □

Взагалі кажучи, спектри задачі (1), (2) та (11) не збігаються. В наступній лемі ми конкретизуємо, в якому сенсі розумітимемо еквівалентність цих задач.

Лема 4. *Нехай λ_n^ε — власні значення задачі* (1), (2) *з власними функціями u_n^ε. Для кожного натурального N і достатньо малих ε числа*

$$\varepsilon^{-1}\lambda_1^\varepsilon, \ \dots\ , \varepsilon^{-1}\lambda_N^\varepsilon \tag{12}$$

є власними значеннями задачі (11) *з власними функціями $u_1^\varepsilon|_\omega, \dots, u_N^\varepsilon|_\omega$ відповідно. Крім того, на інтервалі $(0, \varepsilon^{-1}\lambda_N^\varepsilon]$ задача* (11) *не має інших власних значень.*

Доведення. Нехай $\mu_n^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$. З леми (1) випливає, що при малих ε величини $\varepsilon^{\varkappa+1}\mu_1^\varepsilon, \cdots, \varepsilon^{\varkappa+1}\mu_N^\varepsilon$ будуть меншими за η_1. Тому оператори $\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu_n^\varepsilon)$ визначені для всіх $n \leqslant N$ і кожне з чисел μ_n^ε є власним значенням задачі (11), а відповідні власні функції є звуженням власних функцій збуреної задачі на підмножину ω.

Нехай тепер μ^ε — власне значення задачі (11) з інтервалу $(0, \mu_N^\varepsilon]$, а v^ε — відповідна власна функція. Функцію v^ε можна продовжити на всю область Ω розв'язком задачі

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla w^\varepsilon) = \varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon\rho w^\varepsilon \ \text{ в } \Omega_0, \ w^\varepsilon = v^\varepsilon \ \text{ на } \partial\omega, \ \partial_\nu w^\varepsilon = 0 \ \text{ на } \partial\Omega.$$

Покладемо $u^\varepsilon = w^\varepsilon$ в Ω_0 та $u^\varepsilon = v^\varepsilon$ в ω. Тоді $\varepsilon\mu^\varepsilon$ є власним значенням задачі (1), (2) з власною функцією u^ε, бо на межі $\partial\omega$ окрім рівності $w^\varepsilon = v^\varepsilon$ виконується також умова $\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon)v^\varepsilon = \varepsilon a\,\partial_\nu v^\varepsilon$. Отже, μ^ε є одним з чисел (12). □

4. Рівномірна резольвентна збіжність сім'ї операторів $T_\varepsilon(\mu)$. Центральним місцем при обґрунтуванні асимптотики спектра та власних підпросторів задачі (1), (2) буде рівномірна резольвентна збіжність сім'ї операторів $T_\varepsilon(\mu)$ до оператора T при $\varepsilon \to 0$.

Спершу доведемо деякі допоміжні твердження. Для довільної функції $f \in L_2(\omega)$ розглянемо резольвентні рівняння

$$(T_\varepsilon(\mu^\varepsilon) - \zeta)v_\varepsilon = f, \quad (T - \zeta)v = f,$$

де $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, а μ^ε є обмеженою послідовністю додатних чисел. Функції v_ε та v є розв'язками крайових задач

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a\nabla v_\varepsilon) + \zeta r v_\varepsilon = -rf \quad \text{в } \omega, \\ (\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon) - \varepsilon a\,\partial_\nu)v_\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\omega; \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a\nabla v) + \zeta r v = -rf \quad \text{в } \omega, \\ \quad v \text{ — стала на } \partial\omega, \quad \int_{\partial\omega} a\partial_\nu v\,ds = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Обидва розв'язки v_ε та v належать простору $H^2(\omega)$. Дослідимо граничну поведінку послідовності v_ε при $\varepsilon \to 0$ в просторах Соболєва. Розв'язок задачі (13), скориставшись оператором $\Lambda(\theta)$, продовжимо на усю область Ω розв'язком крайової задачі

$$\operatorname{div}(a\nabla v_\varepsilon) + \zeta r v_\varepsilon = -rf \text{ в } \omega, \tag{15}$$

$$\operatorname{div}(\alpha\nabla v_\varepsilon) = -\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon \rho v_\varepsilon \text{ в } \Omega_0, \tag{16}$$

$$\partial_\nu v_\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad [v_\varepsilon]_{\partial\omega} = 0, \quad [a_\varepsilon\, \partial_\nu v_\varepsilon]_{\partial\omega} = 0, \tag{17}$$

зберігши для продовження теж саме позначення.

Нехай $\langle u\rangle_{\Omega_0} = |\Omega_0|^{-1}\int_{\Omega_0} u\, dx$ — середнє значення функції u в області Ω_0.

Лема 5. *Нехай* $f \in L_2(\omega)$, *а* v_ε *є розв'язком задачі* (13). *Тоді виконуються оцінки*

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leqslant C_2\|f\|_{L_2(\omega)}, \tag{18}$$

$$\|v_\varepsilon - \langle v_\varepsilon\rangle_{\Omega_0}\|_{H^{1/2}(\partial\omega)} \leqslant C_1\sqrt{\varepsilon}\, \|f\|_{L_2(\omega)}, \tag{19}$$

де сталі C_1 *та* C_2 *не залежать від* ε *та* f.

Доведення. Домножимо рівняння (15) на $-\overline{v}_\varepsilon$, рівняння (16) на $\overline{v}_\varepsilon$, і проінтегруємо частинами

$$\int_\omega a\,|\nabla v_\varepsilon|^2\, dx + \int_{\partial\omega} a\,\partial_\nu v_\varepsilon\, ds - \zeta\int_\omega r\,|v_\varepsilon|^2\, dx = \int_\omega r f\overline{v}_\varepsilon\, dx,$$

$$\int_{\Omega_0} \alpha\,|\nabla v_\varepsilon|^2\, dx - \int_{\partial\omega} \alpha\,\partial_\nu v_\varepsilon\, ds = \varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon\int_{\Omega_0} \rho\,|v_\varepsilon|^2\, dx.$$

Домноживши першу рівність на ε, додамо її до другої. Тоді, врахувавши умову $[a_\varepsilon\,\partial_\nu v_\varepsilon]_{\partial\omega} = 0$, отримаємо

$$\int_{\Omega_0}\alpha|\nabla v_\varepsilon|^2 dx + \varepsilon\int_\omega a|\nabla v_\varepsilon|^2 dx - \varepsilon\,\zeta\int_\omega r|v_\varepsilon|^2 dx = \varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon\int_{\Omega_0}\rho|v_\varepsilon|^2 dx + \varepsilon\int_\omega rf\overline{v}_\varepsilon dx.$$

Уявна частина цієї рівності, поділена на ε, має вигляд $\operatorname{Im}\zeta\int_\omega r\,|v_\varepsilon|^2\, dx = -\operatorname{Im}\int_\omega rf\overline{v}_\varepsilon\, dx$. Звідси отримаємо оцінку

$$|\operatorname{Im}\zeta|\int_\omega r\,|v_\varepsilon|^2\, dx \leqslant r^*\int_\omega |f|\,|v_\varepsilon|\, dx \leqslant r^*\,\|f\|_{L_2(\omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\omega)},$$

де $r^* = \sup_\omega r$. Тому $\|v_\varepsilon\|_{L_2(\omega)} \leqslant c_0\,\|f\|_{L_2(\omega)}$. В області Ω_0 для v_ε, як розв'язку задачі (9) з $\varphi = v_\varepsilon|_{\partial\omega}$ та $\theta = \varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon$, виконується оцінка $\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)} \leqslant c\,\|v_\varepsilon\|_{L_2(\partial\omega)}$, де слід функції v_ε на межі $\partial\omega$ взято зі сторони множини ω. Звідси одержуємо

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)} \leqslant c_1\,\|v_\varepsilon\|_{L_2(\omega)} \leqslant c_2\,\|f\|_{L_2(\omega)}. \tag{20}$$

З попередніх оцінок випливає

$$\int_{\Omega_0}\alpha\,|\nabla v_\varepsilon|^2\, dx + \varepsilon\int_\omega a\,|\nabla v_\varepsilon|^2\, dx - \varepsilon\operatorname{Re}\zeta\int_\omega r\,|v_\varepsilon|^2\, dx \leqslant \varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon\rho^*\int_{\Omega_0}|v_\varepsilon|^2\, dx +$$
$$+\varepsilon r^*\int_\omega |f|\,|v_\varepsilon|\, dx \leqslant c_3^2\,\varepsilon\,\|f\|^2_{L_2(\omega)} \leqslant \varepsilon(\varepsilon^\varkappa\mu^\varepsilon\rho^* c_2^2 + r^* c_0)\,\|f\|^2_{L_2(\omega)} \leqslant c_3^2\,\varepsilon\,\|f\|^2_{L_2(\omega)},$$

де $\rho^* = \sup_{\Omega_0}\rho$. Без втрати загальності вважаємо, що $\operatorname{Re}\zeta < 0$. Тоді з останньої нерівності отримаємо

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_0)} \leqslant c_3\sqrt{\varepsilon}\,\|f\|_{L_2(\omega)}, \quad \|v_\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leqslant c_4\,\|f\|_{L_2(\omega)}, \tag{21}$$

де сталі c_3 та c_4 не залежить від ε та f. Виконується і така оцінка

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_5 \, \|f\|_{L_2(\omega)}. \tag{22}$$

З нерівності Пуанкаре та оцінки (21) отримаємо

$$\|v_\varepsilon - \langle v_\varepsilon \rangle_{\Omega_0}\|_{L_2(\Omega_0)} \leqslant c_6 \|\nabla v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_0)} \leqslant c_7 \sqrt{\varepsilon} \, \|f\|_{L_2(\omega)}.$$

Отже, $\|v_\varepsilon - \langle v_\varepsilon \rangle_{\Omega_0}\|_{H^1(\Omega_0)} \leqslant c_8 \sqrt{\varepsilon} \, \|f\|_{L_2(\omega)}$, а нерівність (19) є наслідком неперервності оператора сліду $\gamma \colon H^1(\Omega_0) \to H^{1/2}(\partial\omega)$. □

Нехай ω_0 — деяка область в $\mathbb{R}^d$, а P — еліптичний диференціальний оператор другого порядку з неперервними і обмеженими коефіцієнтами в ω_0. Введемо простір

$$H^1_P(\omega_0) = \big\{ u \in H^1(\omega_0) \colon Pu \in H^{-1}_0(\omega_0) \big\},$$

оснащений нормою графіка $\|u\|_{H^1_P(\omega_0)} = \|u\|_{H^1(\omega_0)} + \|Pu\|_{H_0^{-1}(\omega_0)}$, де $H_0^{-1}(\omega_0)$ — спряжений простір до $H^1(\omega_0)$ стосовно скалярного добутку в $L_2(\omega_0)$. Через $\langle h, \psi \rangle_{\partial\omega_0}$ позначатимемо дію функціонала $h \in H^{-1/2}(\partial\omega_0)$ на функціях $\psi \in H^{1/2}(\partial\omega_0)$. Введемо також неперервний оператор продовження $Z \colon H^{1/2}(\partial\omega_0) \to H^1(\omega_0)$, тобто правий обернений до оператора сліду $\gamma \colon H^1(\omega_0) \to H^{1/2}(\partial\omega_0)$.

Адаптуємо до наших потреб лему 5.1.1 з [22, с.197] про узагальнену формулу Ґріна. Надалі $P = -\mathrm{div}(a\nabla\cdot) - \zeta\, r$.

Твердження 1. *Для кожного $u \in H^1_P(\omega_0)$ відображення*

$$H^{1/2}(\partial\omega_0) \ni \psi \mapsto \langle \tau u, \psi \rangle_{\partial\omega_0} = \int_{\omega_0} a \nabla u \nabla Z\psi \, dx - \zeta \int_{\omega_0} r u Z\psi \, dx - \int_{\omega_0} r f Z\psi \, dx$$

задає лінійний неперервний функціонал τu на $H^{1/2}(\partial\omega_0)$ такий, що $\tau u = a\partial_\nu u|_{\partial\omega_0}$ для $u \in H^2(\omega_0)$. Крім того, відображення $\tau \colon H^1_P(\omega_0) \to H^{-1/2}(\partial\omega_0)$ є неперервним і не залежить від вибору оператора Z.

Лема 6. *Нехай $f \in L_2(\omega)$, а v_ε є розв'язком задачі* (13). *Існують незалежні від ε та f сталі C_3 та C_4 такі, що для всіх $k \in \{1, \dots, K\}$*

$$\|a\partial_\nu v_\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\partial\omega_k)} \leqslant C_3 \, \|f\|_{L_2(\omega)}, \tag{23}$$

$$\Big| \int_{\partial\omega} \Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon) v_\varepsilon \, ds \Big| \leqslant C_4 \varepsilon^{\varkappa+1} \, \|f\|_{L_2(\omega)}. \tag{24}$$

Доведення. Розв'язок v_ε задачі (13) як елемент $H^2(\omega)$ належить простору $H^1_P(\omega_k)$ і $\tau_k v_\varepsilon = a\partial_\nu v_\varepsilon|_{\partial\omega_k}$. З неперервності вкладення $L_2(\omega_k) \subset H_0^{-1}(\omega_k)$ та леми 5 матимемо

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1_P(\omega_k)} = \|v_\varepsilon\|_{H^1(\omega_k)} + \|f\|_{H_0^{-1}(\omega_k)} \leqslant C \, \|f\|_{L_2(\omega)},$$

де сталі c_k не залежить від ε та f. Згідно з твердженням 1 для всіх $k \in \{1, \dots, K\}$ отримаємо $\|a\partial_\nu v_\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\partial\omega_k)} = \|\tau_k v_\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\partial\omega_k)} \leqslant \|\tau_k\| \, \|v_\varepsilon\|_{H^1_P(\omega_k)} \leqslant C_3 \, \|f\|_{L_2(\omega)}$. Проінтегруємо частинами рівняння (16) $\int_{\partial\omega} \Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon) v_\varepsilon \, ds = -\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon \int_{\Omega_0} \rho\, v_\varepsilon \, dx$. Звідси випливає оцінка

$$\Big| \int_{\partial\omega} \Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon) v_\varepsilon \, ds \Big| \leqslant c\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon \, \|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_0)} \leqslant c\mu^\varepsilon \varepsilon^{\varkappa+1} \, \|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_4 \varepsilon^{\varkappa+1} \, \|f\|_{L_2(\omega)},$$

що завершує доведення. □

Доведення основних результатів про асимптотичну поведінку спектра та власних підпросторів збуреної задачі (1) ґрунтуються на такій теоремі.

Теорема 1. *Для кожної обмеженої послідовності додатних чисел* $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ *сім'я операторів* $T_\varepsilon(\mu_\varepsilon)$ *збігається при* $\varepsilon\to 0$ *до оператора* T *в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.*

Доведення. Різниця $w_\varepsilon = v_\varepsilon - v$ розв'язків задач (13) та (14) задовольняє рівняння $\operatorname{div}(a\nabla w_\varepsilon) + \zeta r w_\varepsilon = 0$ в ω. Доведемо, що норма функції w_ε в просторі $L_2(r,\omega)$ є нескінченно малою величиною рівномірно стосовно f при $\varepsilon\to 0$. Домножимо останнє рівняння на $-w_\varepsilon$ і проінтегруємо частинами

$$\int_\omega \big(a|\nabla w_\varepsilon|^2 - \zeta r|w_\varepsilon|^2\big)\,dx = -\int_{\partial\omega} a\partial_\nu w_\varepsilon\,\overline{w}_\varepsilon\,ds = -\int_{\partial\omega} a\partial_\nu v\,\overline{v}\,ds +$$
$$+\varepsilon^{-1}\int_{\partial\omega}\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon)v_\varepsilon\,\overline{v}\,ds + \int_{\partial\omega} a\partial_\nu v\,\overline{v}_\varepsilon\,ds - \varepsilon^{-1}\int_{\partial\omega}\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon)v_\varepsilon\,\overline{v}_\varepsilon\,ds. \tag{25}$$

Оцінимо поверхневі інтеграли в (25). З крайових умов задачі (14) випливає, що $\int_{\partial\omega} a\partial_\nu v\,\overline{v}\,ds = 0$, а розв'язок цієї задачі справджує нерівність

$$\|v\|_{H^2(\omega)} \leqslant c_1\|f\|_{L_2(\omega)}. \tag{26}$$

Позаяк функція v дорівнює деякій сталі C_v на межі $\partial\omega$, то з попередньої нерівності випливає оцінка $\big|C_v\big| \leqslant c_2\|f\|_{L_2(\omega)}$. Звідси для другого поверхневого інтеграла в (25), врахувавши (24), одержимо

$$\Big|\int_{\partial\omega}\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon)v_\varepsilon\,\overline{v}\,ds\Big| \leqslant c_3\varepsilon^{\varkappa+1}\,\|f\|^2_{L_2(\Omega_0)}. \tag{27}$$

З леми 5 та нерівності (26) матимемо

$$\Big|\int_{\partial\omega} a\partial_\nu v\,\overline{v}_\varepsilon\,ds\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{K}\int_{\partial\omega_k} a\partial_\nu v\,\big(\overline{v}_\varepsilon - \langle\overline{v}_\varepsilon\rangle_{\Omega_0}\big)\,ds\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{K}\|a\partial_\nu v\|_{H^{-1/2}(\partial\omega_k)}\|v_\varepsilon - \langle v_\varepsilon\rangle_{\Omega_0}\|_{H^{1/2}(\partial\omega)} \leqslant c_4\sqrt{\varepsilon}\,\|f\|^2_{L_2(\omega)}. \tag{28}$$

З нерівності (20) маємо оцінку $|\langle v_\varepsilon\rangle_{\Omega_0}| \leqslant c_5\|f\|_{L_2(\omega)}$. Звідси та з лем 5, 6 отримаємо

$$\varepsilon^{-1}\Big|\int_{\partial\omega}\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon)v_\varepsilon\,\overline{v}_\varepsilon\,ds\Big| \leqslant \varepsilon^{-1}\Big|\int_{\partial\omega}\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon)v_\varepsilon\,\big(\overline{v}_\varepsilon - \langle\overline{v}_\varepsilon\rangle_{\Omega_0}\big)\,ds\Big| +$$
$$+\varepsilon^{-1}|\langle v_\varepsilon\rangle_{\Omega_0}|\Big|\int_{\partial\omega}\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon)v_\varepsilon\,ds\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{K}\|a\partial_\nu v_\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\partial\omega_k)}\|v_\varepsilon - \langle v_\varepsilon\rangle_{\Omega_0}\|_{H^{1/2}(\partial\omega)} +$$
$$+c_6\varepsilon^{\varkappa}\,\|f\|^2_{L_2(\omega)} \leqslant c_7\varepsilon^{\gamma}\,\|f\|^2_{L_2(\omega)}, \tag{29}$$

де $\gamma = \min\{1/2, \varkappa\}$. Нагадаємо, що $\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu^\varepsilon)v_\varepsilon = \varepsilon a\partial_\nu v_\varepsilon$ на межі $\partial\omega$.

З оцінок (27)–(29) для рівності (25) отримуємо

$$\Big|\int_{\Omega_0}\Big(a|\nabla w_\varepsilon|^2 - \zeta\, r|w_\varepsilon|^2\Big)\,dx\Big| \leqslant c_8\varepsilon^{\gamma}\,\|f\|^2_{L_2(\Omega_0)}.$$

Звідси $\|w_\varepsilon\|_{L_2(\omega)} = \|v_\varepsilon - v\|_{L_2(\omega)} \leqslant c_9\varepsilon^{\gamma/2}\|f\|_{L_2(\omega)}$, що є рівносильним до нерівності

$$\left\|(T_\varepsilon(\mu^\varepsilon) - \zeta)^{-1} - (T - \zeta)^{-1}\right\| \leqslant c_9\varepsilon^{\gamma/2},$$

позаяк всі сталі c_k у цьому доведенні не залежали від ε та f. З останньої нерівності випливає рівномірна збіжність резольвент $(T_\varepsilon(\mu^\varepsilon) - \zeta)^{-1} \to (T - \zeta)^{-1}$ для всіх ζ з резольвентної множини оператора T ([23, теор. VIII.19]). □

5. Збіжність спектра та власних підпросторів збуреної задачі. Нехай H — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$, а A — самоспряжений оператор з дискретним спектром в H та областю визначення $\mathcal{D}(A)$.

Означення 1. *Квазімодою з нев'язкою δ оператора A* будемо називати таку пару $(\eta, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}(A)$, що $\|Av - \eta v\| \leqslant \delta$ і $\|v\| = 1$.

Твердження 2 ([24], с.141). *Якщо $(\mu, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}(A)$ — квазімода оператора A із нев'язкою δ, то для довільного $d > \delta$ існує пара (λ, u) така, що*

$$|\lambda - \mu| \leqslant \delta, \quad \|u - v\| \leqslant 2d^{-1}\delta,$$

де λ — власне значення оператора A, а u — нормована лінійна комбінація власних функцій цього оператора, для яких відповідні власні значення лежать в інтервалі $[\mu - d, \mu + d]$.

Означення 2. Нехай $(\eta, v_1), \dots, (\eta, v_N)$ — квазімоди оператора A. Говоритимемо, що *вони утворюють сім'ю квазімод з нев'язкою δ та відхиленням від ортогональності τ*, якщо $\|Av_j - \eta v_j\| \leqslant \delta$ та $|(v_j, v_k) - \delta_{jk}| \leqslant \tau$ для всіх $j, k \in \{1, \dots, N\}$, де δ_{jk} — символ Кронекера.

Обґрунтування збіжності власних значень збуреної задачі із врахуванням їхньої кратності до власних значень задачі (7) базується на такому твердженні.

Твердження 3 ([24], с.142). *Нехай $\{(\eta, v_j)\}_{j=1}^N$ — сім'я квазімод оператора A з нев'язкою δ та відхиленням від ортогональності τ. Якщо $\delta h^{-1} + \tau < N^{-1}$ для деякого $h > 0$, то на відрізку $[\eta - h, \eta + h]$ сумарна кратність власних значень оператора A є не меншою N.*

5.1. Збіжність власних значень. Нехай $\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ та $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ — власні значення задач (1), (2) та (7) відповідно, перераховані із врахуванням кратності.

Лема 7. *Для кожного $n \in \mathbb{N}$ границя послідовності $\mu_n^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ є точкою спектра оператора T.*

Доведення. Послідовність μ_n^ε обмежена за лемою 1. Припустимо, що для деякого n

$$\mu_* = \varliminf_{\varepsilon\to 0} \mu_n^\varepsilon < \varlimsup_{\varepsilon\to 0} \mu_n^\varepsilon = \mu^*. \tag{30}$$

Величина μ_n^ε як функція параметра ε є неперервною, а тому для кожного $\mu \in (\mu_*, \mu^*)$ існує збіжна при $\varepsilon' \to 0$ до μ підпослідовність $\mu_n^{\varepsilon'}$. Виберемо число h таким, щоб інтервал $\Delta_h(\mu) = (\mu - h, \mu + h)$ цілком містився в (μ_*, μ^*). За лемою 4 число $\mu_n^{\varepsilon'}$ є власним значенням оператора $T_{\varepsilon'}(\mu_n^{\varepsilon'})$, і при достатньо малих ε' міститься в околі $\Delta_h(\mu)$. Згідно з теоремою 1 оператори $T_{\varepsilon'}(\mu_n^{\varepsilon'})$ збігаються до T в сенсі рівномірної резольвентної збіжності. Звідси, в інтервалі $\Delta_h(\mu)$ при малих ε' лежить власне значення T ([23, теор. VIII.23]). З довільності μ і h випливає, що спектр оператора T має бути скрізь щільний в (μ_*, μ^*), а тому $[\mu_*, \mu^*] \subset \sigma(T)$. Позаяк спектр оператора T дискретний, то останнє вкладення неможливе, якщо $\mu_* < \mu^*$. Отже, наше припущення (30) неправильне, а числа μ_* і μ^* рівні та збігаються з одним із власних значень оператора T. □

Лема 8. *Якщо* μ *є власним значенням оператора* T *кратності* s*, тобто* $\mu = \mu_n = \mu_{n+1} = \dots = \mu_{n+s-1}$ *та* $\mu_{n-1} < \mu < \mu_{n+s}$ *для деякого* n*, то сумарна кратність тих власних значень* λ^ε *задачі* (1), (2)*, для яких відношення* $\varepsilon^{-1}\lambda^\varepsilon$ *збігаються до* μ*, не менша* s*.*

Доведення. Виберемо h таким, щоб окіл $\Delta_h(\mu)$ не містив інших точок спектра T окрім μ. Згідно з теоремами 1 та [23, теор. VIII.23] для достатньо малих ε в $\Delta_h(\mu)$ лежать власні значення оператора $T_\varepsilon(\mu)$ сумарної кратності s. Позначимо їх $\mu_1^\varepsilon, \dots, \mu_s^\varepsilon$, а через $v_1^\varepsilon, \dots, v_s^\varepsilon$ — відповідні ортонормовані власні функції, які є розв'язками задач

$$-\operatorname{div}(a\nabla v_k^\varepsilon) = \mu_k^\varepsilon r v_k^\varepsilon \text{ в } \omega, \quad (\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu) - \varepsilon a\,\partial_\nu)v_k^\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\omega.$$

Кожну з них продовжимо в область Ω до функції $V_k^\varepsilon \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$ розв'язком задачі

$$-\operatorname{div}(a\nabla V_k^\varepsilon) = \mu_k^\varepsilon\, r V_k^\varepsilon \text{ в } \omega, \quad -\operatorname{div}(\alpha\nabla V_k^\varepsilon) = \mu\,\varepsilon^{\varkappa+1}\rho V_k^\varepsilon \text{ в } \Omega_0, \tag{31}$$

$$\partial_\nu V_k^\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad [V_k^\varepsilon]_{\partial\omega} = 0, \quad [a_\varepsilon\,\partial_\nu V_k^\varepsilon]_{\partial\omega} = 0. \tag{32}$$

Позаяк власні функції v_k^ε нормовані в $L_2(r,\omega)$, то для функцій V_k^ε виконується нерівність

$$c \leqslant \|V_k^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C \tag{33}$$

зі сталими, незалежними від ε та k. Справді, задачі (31)–(32) та (15)–(17) збігаються, якщо в рівнянні (15) покласти $f = (-\zeta + \mu_k^\varepsilon)V_k^\varepsilon$. Тому, оцінка знизу в (33) випливає безпосередньо з умови нормування та нерівності (20). Далі, з нерівності (22) матимемо рівномірну обмеженість V_k^ε за параметром ε в $H^1(\Omega)$, а отже і в просторі $L_2(\Omega)$. Покладемо $\widehat{V}_k^\varepsilon = \|V_k^\varepsilon\|_\varepsilon^{-1}V_k^\varepsilon$, де норма $\|\cdot\|_\varepsilon$ визначена в розділі 2. Покажемо, що пари $(\varepsilon\mu, \widehat{V}_k^\varepsilon)$ є квазімодами оператора A_ε.

Нехай $\mu_k^\varepsilon = \mu + \delta_k^\varepsilon$ для $k \in \{1, \dots, s\}$. Очевидно, що $|\delta_k^\varepsilon| < h$. З (31) безпосереднім обчисленням отримуємо рівність $(A_\varepsilon - \varepsilon\mu)\widehat{V}_k^\varepsilon = f_k^\varepsilon$, де

$$f_k^\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon\,\delta_k^\varepsilon\,\|V_k^\varepsilon\|_\varepsilon^{-1} v_k^\varepsilon & \text{в } \omega, \\ 0 & \text{в } \Omega_0. \end{cases}$$

Звідси $\|(A_\varepsilon - \varepsilon\mu)\widehat{V}_k^\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant \varepsilon|\delta_k^\varepsilon| < \varepsilon h$ для всіх $k \in \{1, \dots, s\}$. З ортогональності власних функцій v_k^ε в $L_2(r,\omega)$ та (33), для $j \neq k$ матимемо

$$|(\widehat{V}_j^\varepsilon, \widehat{V}_k^\varepsilon)_\varepsilon| = \Big|\frac{1}{\|V_j^\varepsilon\|_\varepsilon\|V_k^\varepsilon\|_\varepsilon}\Big(\int_\omega r v_j^\varepsilon \overline{v_k^\varepsilon}dx + \varepsilon^\varkappa\int_{\Omega_0}\rho V_j^\varepsilon\overline{V_k^\varepsilon}dx\Big)\Big| \leqslant \varepsilon^\varkappa\int_{\Omega_0}\rho|V_j^\varepsilon||V_k^\varepsilon|dx \leqslant c_1\varepsilon^\varkappa.$$

Отже, $\{(\varepsilon\mu, \widehat{V}_k^\varepsilon)\}_{k=1}^s$ — сім'я квазімод оператора A_ε з нев'язкою $\delta = \varepsilon h$ та відхиленням від ортогональності $\tau = c_1\varepsilon^\varkappa$. Згідно з твердженням 3 сумарна кратність власних значень оператора A_ε в інтервалі $\Delta_h(\mu)$ не менша s, як тільки $\varepsilon + c_1\varepsilon^\varkappa < s^{-1}$. Позаяк інтервал $\Delta_h(\mu)$ містить лише одну точку спектра T, то за попередньою лемою всі ці власні значення, поділені на ε, збігаються до μ. □

Наступна теорема дає вичерпну відповідь про зв'язок спектрів операторів A_ε та T при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 2. *Нехай* $\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ *та* $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ *— власні значення задач* (1), (2) *та* (7) *відповідно, пераховані із врахуванням кратності. Тоді для кожного натурального* n *відношення* $\varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$ *збігається до* μ_n *при* $\varepsilon \to 0$*.*

Доведення. З доведеного вище для кожного $n \in \mathbb{N}$ границя послідовності $\varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ є точкою спектра оператора T. Крім того, якщо μ є власним значенням оператора T кратності s, то сумарна кратність власних значень λ^ε задачі (1), (2), для яких відношення $\varepsilon^{-1}\lambda^\varepsilon$ збігаються до μ, не менша s.

Покажемо, що до s-кратного власного значення оператора T збігається рівно s відношень $\varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$. В доведенні попередньої леми ми будували квазімоди оператора A_ε із власних функцій оператора $T_\varepsilon(\mu)$. Тепер чинитимемо навпаки — за допомогою власної функції оператора A_ε з власним значенням в околі $\varepsilon\mu$ збудуємо майже-власну функцію для $T_\varepsilon(\mu)$. Ця квазімода буде майже-ортогональна до його власних функцій $v_1^\varepsilon,\dots,v_s^\varepsilon$. Тому розмірність спектрального проектора для $T_\varepsilon(\mu)$, що відповідає інтервалу $\Delta_h(\mu)$, буде не меншою ніж $s+1$. Тоді, з огляду на рівномірну резольвентну збіжність $T_\varepsilon(\mu)$ до T, кратність власного значення μ граничного оператора теж була б більшою s, що суперечить припущенню.

Нехай сім’я квазімод $\{(\varepsilon\mu,\widehat{V}_k^\varepsilon)\}_{k=1}^s$ апроксимує не весь спектр оператора A_ε, що локалізується в околі $\varepsilon\mu$. Тобто існує таке власне значення $\varepsilon\nu_\varepsilon$ оператора A_ε з власною функцією W_ε, що $\nu_\varepsilon\to\mu$, а також $(\forall k\in\{1,\dots,s\})$:

$$(W_\varepsilon,\widehat{V}_k^\varepsilon)_\varepsilon\to 0\quad(\varepsilon\to 0). \tag{34}$$

Нехай $w_\varepsilon=W_\varepsilon|_\omega$. Вважатимемо, що W_ε нормована умовою $\|w_\varepsilon\|_{L_2(r,\omega)}=1$. Функція w_ε загалом не належить до $\mathcal{D}(T_\varepsilon(\mu))$, тому побудуємо коректор. Розглянемо допоміжну задачу

$$-\operatorname{div}(a\nabla z_\varepsilon)=\zeta_\varepsilon r z_\varepsilon \text{ в } \omega,\quad (\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu)-\varepsilon a\,\partial_\nu)z_\varepsilon=\psi_\varepsilon \text{ на } \partial\omega, \tag{35}$$

де $\psi_\varepsilon=\big(\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\zeta_\varepsilon)-\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu)\big)w_\varepsilon$. Послідовність дійсних чисел ζ_ε вибираємо так, щоб $\zeta_\varepsilon\to\mu$ при $\varepsilon\to 0$, але $\operatorname{dist}\{\zeta_\varepsilon,\sigma(T_\varepsilon(\mu))\}\geqslant\varepsilon$. Позаяк $W_\varepsilon\in H^2(\Omega\setminus\partial\omega)$, то $\psi_\varepsilon\in H^{3/2}(\partial\omega)$ та існує єдиний розв’язок $z_\varepsilon\in H^2(\omega)$ задачі (35) для якого

$$\begin{aligned}\|z_\varepsilon\|_{H^2(\omega)}&\leqslant\frac{c_1\,\|\psi_\varepsilon\|_{H^{1/2}(\partial\omega)}}{\operatorname{dist}\{\zeta_\varepsilon,\sigma(T_\varepsilon(\mu))\}}\leqslant\frac{c_1}{\varepsilon}\,\big\|\big(\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\zeta_\varepsilon)-\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu)\big)w_\varepsilon\big\|_{H^{1/2}(\partial\omega)}\leqslant\\&\leqslant\frac{c_1}{\varepsilon}\,\big\|\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\zeta_\varepsilon)-\Lambda(\varepsilon^{\varkappa+1}\mu)\big\|\,\|w_\varepsilon\|_{H^{3/2}(\partial\omega)}\leqslant c_1 m\varepsilon^{\varkappa}|\zeta_\varepsilon-\mu|\leqslant c_2\varepsilon^{\varkappa}.\end{aligned}$$

За побудовою функції z_ε сума $w_*^\varepsilon=w_\varepsilon+z_\varepsilon$ належить області визначення оператора $T_\varepsilon(\mu)$, а коректор z_ε є нескінченно малим в L_2-нормі. Далі,

$$(T_\varepsilon(\mu)-\mu)w_*^\varepsilon=-\frac{1}{r}\operatorname{div}(a\nabla w_\varepsilon)-\mu w_\varepsilon-\frac{1}{r}\operatorname{div}(a\nabla z_\varepsilon)-\mu z_\varepsilon=(\nu_\varepsilon-\mu)w_\varepsilon+(\zeta_\varepsilon-\mu)z_\varepsilon,$$

тому величина $\delta_*^\varepsilon=\|(T_\varepsilon(\mu)-\mu)w_*^\varepsilon\|_{L_2(r,\omega)}$ нескінченно мала порядку $|\nu_\varepsilon-\mu|+|\zeta_\varepsilon-\mu|\varepsilon^\varkappa$ при $\varepsilon\to 0$. З (33) та (34) випливає, що $(w_\varepsilon,v_k^\varepsilon)_{L_2(r,\omega)}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ для всіх $k\in\{1,\dots,s\}$. З малості z_ε випливає, що добутки $(w_*^\varepsilon,v_k^\varepsilon)_{L_2(r,\omega)}$ теж прямують до нуля. Отже, (μ,v_1^ε), $\dots$, (μ,v_s^ε), (μ,w_*^ε) є сім’єю квазімод оператора $T_\varepsilon(\mu)$ з нескінченно малими нев’язкою та відхиленням від ортогональності. Звідси, згідно з твердженням 3, вимірність спектрального проектора для $T_\varepsilon(\mu)$, що відповідає інтервалу $\Delta_h(\mu)$, буде не меншою ніж $s+1$. Позаяк резольвенти $T_\varepsilon(\mu)$ збігаються до резольвенти T рівномірно, а кратність μ як власного значення оператора T рівна s, отримуємо суперечність. ☐

5.2. Збіжність власних підпросторів. Нехай U та V — підпростори гільбертового простору H. *Розхилом* між підпросторами U та V в просторі H називатимемо величину $\delta_H(U,V)=\|P_U-P_V\|$, де P_U і P_V — ортогональні проектори на ці підпростори.

Твердження 4 ([7]). *Нехай* $\dim U=\dim V=r<\infty$ *і для довільного нормованого вектора* $u\in U$, *існує вектор* $v\in V$ *такий, що виконується нерівність* $\|u-v\|\leqslant\beta$, *зі сталою* $\beta\in(0,r^{-1})$. *Тоді* $\delta_H(U,V)\leqslant C\beta$, *де стала* C *залежить лише від* r.

Нехай $\mathcal{L}^0_\mu$ — власний підпростір оператора T, що відповідає власному значенню μ. Елементи $\mathcal{L}^0_\mu$ є сталими функціями на межі $\partial\omega$, які продовжимо за неперервністю цими сталими на всю область Ω. Отримаємо підпростір $\mathcal{L}_\mu$ в $L_2(\Omega)$ причому, простори $\mathcal{L}^0_\mu$ і $\mathcal{L}_\mu$ мають однакову вимірність.

Теорема 3. *Нехай $\mathcal{L}^\varepsilon_\mu$ — підпростір в $L_2(\Omega)$, породжений такими власними функціями u^ε_k оператора A_ε, для яких $\varepsilon^{-1}\lambda^\varepsilon_k \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$. Тоді для кожної точки μ зі спектра оператора T маємо*

$$\delta_{L_2(\Omega)}(\mathcal{L}^\varepsilon_\mu, \mathcal{L}_\mu) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0). \tag{36}$$

Доведення. Доведення цієї теореми ґрунтується на лемі 4. З теореми 2 випливає, що $\dim \mathcal{L}^\varepsilon_\mu = \dim \mathcal{L}_\mu$ для достатньо малих ε. Покажемо тепер, що для кожного нормованого елемента простору $\mathcal{L}_\mu$, існує нормований елемент з простору $\mathcal{L}^\varepsilon_\mu$ такий, що норма різниці цих елементів є нескінченно малою величиною при $\varepsilon \to 0$.

Нехай $v \in \mathcal{L}_\mu$ — деяка власна функція оператора T з власним значенням μ, продовжена за неперервністю сталою на Ω_0 і $\|v\|_{L_2(r,\omega)} = 1$. Взагалі кажучи, v не належить до $\mathcal{D}(A_\varepsilon)$, тому не може бути майже-власною функцією оператора A_ε. Побудуємо коректор w як розв'язок задачі $-\mathrm{div}(\alpha\nabla w) = 0$ в Ω_0, $\partial_\nu w = 0$ на $\partial\Omega$ і $\alpha\partial_\nu w = a\partial_\nu v$ на $\partial\omega$, де похідна $\partial_\nu v$ обчислена з боку множини ω. Розв'язок w існує, бо для v виконується умова $\int_{\partial\omega} \alpha\partial_\nu v\, ds = 0$. Зберігши теж саме позначення, продовжимо функцію w на множину ω за неперервністю так, щоб $w \in H^2(\omega)$ та $\partial_\nu w = 0$ на $\partial\omega$, де похідна $\partial_\nu w$ обчислена з боку множини ω. Розглянемо функцію $v_\varepsilon = v + \varepsilon w$. За побудовою v_ε належить до $\mathcal{D}(A_\varepsilon)$ і $\|v_\varepsilon\|_\varepsilon \to 1$ при $\varepsilon \to 0$.

Введемо позначення $\widehat{v}_\varepsilon = \|v_\varepsilon\|^{-1}_\varepsilon v_\varepsilon$. Доведемо, що пара $(\varepsilon\mu, \widehat{v}_\varepsilon)$ є квазімодою оператора A_ε з нескінченно малою нев'язкою, при $\varepsilon \to 0$. Справді, безпосередньо переконуємося, що $A_\varepsilon\widehat{v}_\varepsilon - \varepsilon\mu\widehat{v}_\varepsilon = f_\varepsilon$, де

$$f_\varepsilon = \frac{1}{\|v_\varepsilon\|_\varepsilon} \cdot \begin{cases} -\varepsilon\mu(v + \varepsilon w)) & \text{в } \Omega_0, \\ -\varepsilon^2(\frac{1}{r}\mathrm{div}(a\nabla w) + \mu w) & \text{в } \omega. \end{cases}$$

Тому виконується оцінка $\|f_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant c\varepsilon^\gamma$, де $\gamma = \min\{1 + \varkappa/2, 2\}$.

Виберемо інтервал $[\mu - d, \mu + d]$, що не містить власних значень оператора T окрім μ. Згідно з твердженням 2 для всіх достатньо малих ε існує елемент $u_\varepsilon \in \mathcal{L}^\varepsilon_\mu$ такий, що $\|u_\varepsilon - \widehat{v}_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant c_1\varepsilon^\gamma$ і $\|u_\varepsilon\|_\varepsilon = 1$. Звідси маємо $\|u_\varepsilon - \widehat{v}_\varepsilon\|_{L_2(\omega)} \leqslant c_1\varepsilon^\gamma$. Отже, послідовність u_ε збігається до v в просторі $L_2(\omega)$. Для завершення доведення теореми потрібно показати, що послідовність u_ε збігається до v і в просторі $L_2(\Omega_0)$.

Функція u_ε має зображення $u_\varepsilon = c^\varepsilon_1 u^\varepsilon_1 + \ldots + c^\varepsilon_m u^\varepsilon_m$, де u^ε_k — ортонормовані власні функції оператора A_ε, для яких $\varepsilon^{-1}\lambda^\varepsilon_k \in [\mu - d, \mu + d]$. Для власних значень λ^ε_k та відповідних власних функцій u^ε_k виконуються рівності

$$\varepsilon \int_\omega a|\nabla u^\varepsilon_k|^2\, dx + \int_{\Omega_0} \alpha|\nabla u^\varepsilon_k|^2\, dx = \lambda^\varepsilon_k\Big(\int_\omega r|u^\varepsilon_k|^2\, dx + \varepsilon^\varkappa \int_{\Omega_0} \rho|u^\varepsilon_k|^2\, dx\Big),\ k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Домножимо ці рівності на $(c^\varepsilon_k)^2$ та додамо їх

$$\varepsilon \int_{\Omega_0} a|\nabla u_\varepsilon|^2\, dx + \int_\omega \alpha|\nabla u_\varepsilon|^2\, dx \leqslant C\varepsilon\Big(\int_{\Omega_0} r|u_\varepsilon|^2\, dx + \varepsilon^\varkappa \int_\omega \rho|u_\varepsilon|^2\, dx\Big).$$

Звідси отримаємо оцінки

$$\int_{\Omega_0} \alpha|\nabla u_\varepsilon|^2\, dx \leqslant C\varepsilon, \quad \int_\omega a|\nabla u_\varepsilon|^2\, dx \leqslant C. \tag{37}$$

Крім того, $\|u_\varepsilon\|_{L_2(r,\omega)} \leqslant 1$. Отже, послідовність функцій u_ε є обмеженою в просторі $H^1(\omega)$. Позаяк u_ε збігається сильно в $L_2(\omega)$ до v згідно доведеного вище, звідси випливає, що ця послідовність слабко збіжна в $H^1(\omega)$.

Далі, для кожної власної функції u_k^ε в області Ω_0, як розв'язку задачі (9) з $\varphi = u_k^\varepsilon|_{\partial\omega}$ та $\theta = \varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon$, виконується оцінка $\|u_k^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)} \leqslant c\,\|u_k^\varepsilon\|_{L_2(\partial\omega)}$, де слід функції u_k^ε на межі $\partial\omega$ обчислено з боку множини ω. Тоді

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)} \leqslant \sum_{k=1}^{m} |c_k^\varepsilon| \|u_k^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)} \leqslant c_1 \sum_{k=1}^{m} |c_k^\varepsilon|\, \|u_k^\varepsilon\|_{L_2(\omega)} \leqslant mc_1,$$

оскільки $(c_1^\varepsilon)^2 + \ldots + (c_m^\varepsilon)^2 = 1$. Тому отримуємо, що функція u_ε є обмеженою в $H^1(\Omega_0)$, а отже і в $H^1(\Omega)$.

На множині Ω_0 послідовність u_ε збігається до сталої, яка рівна значенню v на $\partial\omega$. Справді, існує підпослідовність $u_{\varepsilon'}$ слабко збіжна в $H^1(\Omega)$. Крім того, виконується оцінка (37), тому з нерівності Пуанкаре випливає, що границя цієї підпослідовності є сталою в Ω_0 і рівна значенню v на $\partial\omega$. Зауважимо, що в Ω_0 оцінка (37) виконується для довільної підпослідовності $u_{\varepsilon'}$. Позаяк u^ε слабко збіжна в $H^1(\omega)$ і є обмеженою в $H^1(\Omega)$ випливає, що u^ε збігається слабко і в $H^1(\Omega)$. Тому маємо, $\|u_\varepsilon - \widehat{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Звідси

$$\|u_\varepsilon - v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|u_\varepsilon - \widehat{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \|\widehat{v}_\varepsilon - v\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Отже, $\delta_{L_2(\Omega)}(\mathcal{E}_\mu^\varepsilon, \mathcal{E}_\mu) \to 0$, що завершує доведення (36). □

Наслідок 1. *Якщо μ_n — просте власне значення, то власна функція u_n^ε оператора A_ε збігається в $L_2(\Omega)$ до власної функції v_n оператора T, що за неперервністю продовжена сталою в область Ω_0.*

Доведення. У випадку одновимірних просторів $\mathcal{L}_\mu$ та $\mathcal{L}_\mu^\varepsilon$, збіжність до нуля їхнього розхилу еквівалентна збіжності одиничних векторів, які їх породжують. □

Подяка. Автор висловлює щиру подяку Ю. Д. Головатому за плідні обговорення та цінні зауваження щодо тексту статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Marchenko V.A., Khruslov E.Ya. Homogenized Models of Microinhomogeneous Media. – Kiev, Naukova Dumka, 2005 (in Russian). English translated in Homogenization of partial differential equations, Progress in Mathematical Physics, V.46, Birkhäuser, Boston, 2006.
2. Sanchez Hubert J., Sanchez Palencia E. Vibration and coupling of continuous systems. – Springer-Verlag, 1989. – 421p.
3. Oleinik O.A., Shamaev A.S., Yosifian G.A. Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization. – North-Holland, London, 1992.
4. Zhikov V.V., Kozlov S.M., Oleinik O.A., Homogenization of differential operators and integral functionals, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, NewYork, 1994.
5. Piatnitski A.L., Chechkin G.A., Shamaev A.S. Homogenization. Methods and Applications, V.234 of Translations of Mathematical Monographs, AMS, Providence, Rhode Island USA, 2007.
6. Lobo M., Nazarov S.A., Pérez E. *Eigen-oscillations of contrasting non-homogeneous elastic bodies: asymptotic and uniform estimates for eigenvalues*// IMA J. Appl. Math. – 2005. – P. 1–40.

7. Golovaty Yu.D. *Spectral properties of oscillatory systems with added masses*// Trudy Moskov. Mat. Obshch. – 1992. – V.54. – P. 29–72 (in Russian). English translated in Trans. Moscow Math. Soc. – 1993. – P. 23–59.
8. Nazarov S.A. *Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions*// RAIRO Model. Math. Anal. Numer. – 1993. – V.27, №6. – P. 777–799.
9. Melnyk T.A., Nazarov S.A. *The asymptotic structure of the spectrum in the problem of harmonic oscillations of a hub with heavy spokes*// Dokl. Akad. Nauk of Russia. – 1993. – V.333, №1. – P. 13–15. (in Russian) English translated in Acad. Sci. Dokl. Math. – 1994. – V.48, №3. – P. 428–432.
10. Melnyk T.A., Nazarov S.A. *Asymptotic analysis of the Neumann problem in a junction of body and heavy spokes*// Algebra i Analiz. – 2000. – V.12, №2. – P. 188–238 (in Russian). English translated in St. Petersburg Math. J. – 2001. – V.12, №2. – P. 317–351.
11. Chechkin G.A., Mel'nyk T.A. *Asymptotics of eigenelements to spectral problem in thick cascade junction with concentrated masses*// Appl. Anal. – 2011. – P. 1–41.
12. Golovaty Yu.D., Gomez D., Lobo M., Pérez E. *On vibrating membranes with very heavy thin inclusions*// Math. Models Methods. Appl. Sci. – 2004. – V.14, №7. – P. 987–1034.
13. Gomez D., Nazarov S.A., Pérez E. *Spectral stiff problems in domains surrounded by thin stiff and heavy bands: local effects for the eigenfunctions*// Networks and heterogeneous media. – 2011. – V.6, №1. – P. 1–35.
14. Rybalko V. *Vibrations of elastic systems with a large number of tiny heavy inclusions*// Asymptotic Analysis. – 2002. – V.32. – P. 27–62.
15. Lobo M., Pérez E. *Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review*// C. R. Mecanique. – 2003. – V.331. – P. 303–317.
16. Golovaty Yu.D., Hut V.M. *Vibrating systems with stiff light-weight inclusions: asymptotics of spectrum and eigenspaces.* (in Ukrainian, submitted for publication)
17. Babych N., Golovaty Yu.D. *Quantized asymptotics of high frequency oscillations in high contrast media*// Proc. of Waves. – 2007. – University of Reading. – P. 35–37.
18. Babych N., Golovaty Yu.D. *Low and high frequency approximations to eigenvibrations in a medium with double contrasts*// J. Comput. Appl. Math. – 2010. – V.234. – P. 1860–1867.
19. Sylvester J., Uhlmann G. *The Dirichlet to Neumann map and its applications, in inverse problems in partial differential equations*// SIAM. – 1990. – P. 101–139.
20. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Applied Mathematical Series. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, New York, 1998. – V.127.
21. Fliss S. *A Dirichlet-to-Neuman approach for the exact computation of guided modes in photonic crystal waveguides*// arXiv:1202.4928v1.
22. Hsiao G.C., Wendland W.L. Boundary integral equations. Appl. Math. Sci. – Berlin: Springer, 2008. – V.164. – 618 p.
23. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics, V.1: Functional Analysis. – M. Mir, 1977. (in Russian)
24. Lazutkin V.F. *Semiclassical asymptotics of eigenfunctions*// Ser. Sovrem. Probl. Mat., Fundam. Napravleniya. (Itogi Nauki Tekh.) – M., 1988. – V.34. – P. 135–174 (in Russian). English translated in Encyclopedia of Math. Sci. – V.34, Partial Differential Equations V, M.V. Fedoryuk (Editor), Springer, New York, 1999, 133p.

Львівський національний університет імені Івана Франка
v.hut@ukr.net

Надійшло 24.04.2012
Після переробки 12.06.2012