УДК 517.53

М. П. Магола, П. В. Фiлевич

КУТОВИЙ РОЗПОДIЛ ЗНАЧЕНЬ АНАЛIТИЧНИХ I ВИПАДКОВИХ АНАЛIТИЧНИХ ФУНКЦIЙ

M. P. Mahola, P. V. Filevych. *The angular value distribution of analytic and random analytic functions*, Mat. Stud. **38** (2012), 147–153.

Let $a \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum c_n z^n$ be an analytic function in the disk $|z| < 1$ such that $S_f(r){:=} \left(\sum |c_n|^2 r^{2n}\right)^{\frac12} \to +\infty$, $r \to 1$, $N_f(r,\alpha,\beta,a)$ be the integrated counting function of a-points of f in the sector $0 < |z| \le r$, $\alpha \le \arg_\alpha z < \beta$, $N_f(r,a) = N_f(r,0,2\pi,a)$, and $E \subset (0,1)$ be a set such that $\sup E = 1$. It is proved that if $N_f(r,a) \sim \ln S_f(r)$, $E \ni r \to 1$, then $N_f(r,\alpha,\beta,a) \sim \frac{\beta-\alpha}{2\pi} \ln S_f(r)$, $E \ni r \to 1$, uniformly in $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$.

М. П. Магола, П. В. Филевич. *Угловое распределение значений аналитических и случайных аналитических функций* // Мат. Студiї. – 2012. – Т.38, №2. – C.147–153.

Пусть $a \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum c_n z^n$ — аналитическая в круге $|z| < 1$ функция, для которой $S_f(r){:=} \left(\sum |c_n|^2 r^{2n}\right)^{\frac12} \to +\infty$, $r \to 1$, $N_f(r,\alpha,\beta,a)$ — усредненная считающая функция a-точек f в секторе $0 < |z| \le r$, $\alpha \le \arg_\alpha z < \beta$, $N_f(r,a) = N_f(r,0,2\pi,a)$, а $E \subset (0,1)$ — любое множество такое, что $\sup E = 1$. Доказано, что если $N_f(r,a) \sim \ln S_f(r)$, $E \ni r \to 1$, то $N_f(r,\alpha,\beta,a) \sim \frac{\beta-\alpha}{2\pi} \ln S_f(r)$, $E \ni r \to 1$, равномерно по $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$.

1. Вступ. Покладемо $\mathcal{D}(r) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < r\}$ для всiх $r \in (0,+\infty]$, $\ln^+ x = \ln \max\{x,1\}$ для кожного $x \in [0,+\infty)$ i $\mathcal{S}(r,\alpha,\beta) = \{z \in \mathbb{C} \colon 0 < |z| \le r,\ \alpha \le \arg_\alpha z < \beta\}$ для довiльних $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ таких, що $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$.

Використовуємо стандартнi позначення теорiї розподiлу значень мероморфних функцiй ([1, 2]). Зокрема, якщо $a \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R} \in (0,+\infty]$ i $r \in (0,\mathcal{R})$, то для мероморфної в $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функцiї f через $N_f(r,a)$, $N_f(r,\alpha,\beta,a)$, $T_f(r)$ i $M_f(r)$ позначаємо вiдповiдно усереднену лiчильну функцiю a-точок, усереднену лiчильну функцiю a-точок в секторi $\mathcal{S}(r,\alpha,\beta)$, характеристику Неванлiнни i максимум (супремум) модуля. Нехай $c_f(a)$ — перший ненульовий коефiцiєнт у розвиненнi Лорана функцiї $f(z) - a$ в околi точки $z = 0$.

Через $\mathcal{H}(\mathcal{R})$ позначимо клас аналiтичних в крузi $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функцiй вигляду $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, для яких $S_f(r){:=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}\right)^{\frac12} \to +\infty$ $(r \to \mathcal{R})$.

Нехай $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$, $a \in \mathbb{C}$. Використовуючи рiвнiсть Йєнсена

$$N_f(r,a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta}) - a| d\theta - \ln |c_f(a)| \quad (r \in (0,\mathcal{R}))$$

i наведену нижче лему B, легко отримуємо нерiвнiсть

$$N_f(r,a) \le \ln^+ S_{f-a}(r) + \frac{1}{2e} - \ln |c_f(a)| \quad (r \in (0,\mathcal{R})). \tag{1}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30B20, 30D20, 30D35.
Keywords: value distribution, analytic function, random analytic function, integrated counting function, angular integrated counting function.

Звідси, скориставшись очевидною нерівністю $S^2_{f-a}(r) \le S^2_f(r) + |c_0 - a|^2$ і добре відомими властивостями функції $\ln^+ x$, маємо $N_f(r,a) \le \ln^+ S_f(r) + C$ для всіх $r \in (0,\mathcal{R})$, де C — деяка стала, залежна від f і a.

Якщо $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ і $\mathcal{R} < +\infty$, то, як виявляється, з "близькості" $N_f(r,a)$ до $\ln S_f(r)$ випливає, що a-точки функції f розподілені в крузі $\mathcal{D}(r)$ в певному сенсі рівномірно. Такий висновок дозволяє зробити така теорема.

Теорема 1. *Нехай $a \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R} \in (0,+\infty)$, $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ і $E \subset (0,1)$ — довільна множина така, що $\sup E = \mathcal{R}$. Тоді якщо*

$$N_f(r,a) \sim \ln S_f(r), \quad E \ni r \to \mathcal{R}, \tag{2}$$

то рівномірно за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$, виконується співвідношення

$$N_f(r,\alpha,\beta,a) \sim \frac{\beta-\alpha}{2\pi} \ln S_f(r), \quad E \ni r \to \mathcal{R}. \tag{3}$$

Зауважимо, що теорема 1, взагалі кажучи, неправильна для цілих функцій. Покажемо, не вдаючись в деталі, як можуть бути побудовані цілі функції, для яких (3) не випливає з (2) (з $\mathcal{R} = +\infty$). Розглянемо опуклу неперервно-диференційовну функцію Φ таку, що при $x \to +\infty$ виконуються співвідношення $\frac{\Phi(x)}{x} \to +\infty$ та $\Phi(x+1) \sim \Phi(x)$ (останнє співвідношення означає, що $\Phi(\ln r)$ є повільно змінною функцією, а тому $\Phi(\ln r)$ і $\Phi'(\ln r)$ мають нульовий порядок). Нехай (z_n) — додатна зростаюча послідовність така, що $\Phi'(\ln z_n) = n$ для всіх $n \ge n_0$. Нескладно довести, що для лічильної функції $n(r)$ цієї послідовності правильне співвідношення $n(r) \sim \Phi'(\ln r)$, $r \to +\infty$. Тоді $n(r)$ також має нульовий порядок, а тому канонічний добуток $f(z) = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - \frac{z}{z_n})$ задає цілу функцію, для якої $N_f(r,0) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt$, тобто

$$r(N_f(r,0))'_+ = n(t) \sim \Phi'(\ln r), \ r \to +\infty.$$

За правилом Лопіталя отримуємо, що $N_f(r,0) \sim \Phi(\ln r)$, $r \to +\infty$. Тоді (див., наприклад, [3]) з повільної зміни функції $\Phi(\ln r)$ випливає, що $N_f(r,0) \sim \ln M_f(r)$, $r \to +\infty$, а тому $N_f(r,0) \sim \ln S_f(r)$, $r \to +\infty$. З іншого боку, оскільки усі нулі функції f є додатними числами, то $N_f(r,\alpha,\beta,0) = 0$ для всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \beta < 2\pi$.

Перш ніж доводити теорему 1, сформулюємо декілька допоміжних тверджень. У заключній частині роботи теорему 1 застосуємо для дослідження кутового розподілу значень випадкових аналітичних в крузі функцій.

2. Допоміжні результати. Наступне твердження доведене в [2] для мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій. У випадку мероморфних у крузі функцій доведення ідентичне.

Лема А. *Нехай $\mathcal{R} \in (0,+\infty]$, $r \in (0,\mathcal{R})$, $k > 1$ — деяке число таке, що $kr < \mathcal{R}$, і f — мероморфна в крузі $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція. Тоді*

$$\frac{1}{r}\int_0^r \ln^+ M_f(t)dt \le C(k)T_f(kr),$$

де стала $C(k) > 1$ залежить лише від k.

Перше з наведених далі тверджень доведене в [4], а друге є добре відомим.

Лема B. *Нехай $\mathcal{F} \subset [0, 2\pi]$ — вимірна множина, $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $r \in (0, \mathcal{R})$ і f — аналітична в крузі $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція. Тоді*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{F}} \ln^+ |f(re^{i\theta})|d\theta \leq \frac{1}{2e} + \frac{\mu(\mathcal{F})}{2\pi}\ln^+ S_f(r),$$

де $\mu(\mathcal{F})$ — міра Лебега множини $\mathcal{F}$.

Лема C. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty)$, $r_0 \in (0, \mathcal{R})$, λ — неспадна необмежена зверху на $[r_0, \mathcal{R})$ функція, а функція Λ така, що $r\Lambda'_+(r) = \lambda(r)$, $r \in [r_0, \mathcal{R})$. Тоді $\Lambda(r) = o(\lambda(r))$, $r \to \mathcal{R}$.*

Доведення. Оскільки $\lambda(r) \geq 0$ для $r \in [r_1, \mathcal{R})$, де $r_1 \in [r_0, \mathcal{R})$, то для довільного фіксованого $r_2 \in [r_1, \mathcal{R})$ і всіх $r \in [r_2, \mathcal{R})$ маємо

$$0 \leq \Lambda(r) - \Lambda(r_2) = \int_{r_2}^{r} \frac{\lambda(t)}{t}dt \leq \lambda(r)\ln\frac{r}{r_2},$$

звідки отримуємо, що $0 \leq \varlimsup\limits_{r\to\mathcal{R}} \frac{\Lambda(r)}{\lambda(r)} \leq \lambda(r)\ln\frac{R}{r_2}$. Залишилось спрямувати r_2 до $\mathcal{R}$. □

Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $r \in (0, \mathcal{R})$ і g — аналітична в крузі $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція. Покладемо $\mathcal{E}_g(r) = \{\theta \in \mathbb{R}\colon g(te^{i\theta}) \neq 0$ для всіх $t \in (0, r]\}$. Добре відомим є таке твердження (див. [5], [6], а також [7], с. 126, і [4]).

Лема D. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $r \in (0, \mathcal{R})$, f — аналітична в крузі $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція. Тоді існує неперервна обмежена на $\mathcal{E}_f(r)$ функція $V_f(r, \theta)$ така, що:*
(i) для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_f(r)$ таких, що $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$, правильна рівність

$$N_f(r, \alpha, \beta, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} \ln|f(re^{i\theta})|d\theta - \frac{\beta - \alpha}{2\pi}\ln|c_f(0)| + V_f(r, \alpha) - V_f(r, \beta);$$

(ii) для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таких, що $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$, маємо

$$\int_{\alpha}^{\beta} V_f(r, \theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^r (\ln|f(te^{i\alpha})| - \ln|f(te^{i\beta})|)\ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t}.$$

Наступна теорема є виправленим варіантом теореми 3 з роботи [4], доведеної з деякими огріхами.

Теорема 2. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $g \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ і $r_0 \in (0, \mathcal{R})$ — довільне фіксоване число таке, що $S_g(r_0) \geq 1$. Тоді існують сталі $C_1 > 0$ та $C_2 > 0$ такі, що для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$, виконується нерівність*

$$N_g(r, \alpha, \beta, 0) \leq \frac{\beta - \alpha}{2\pi}\ln S_g(r) + 3\Big(\frac{3}{\pi^2}\ln^2 S_g(r)h_g(r)\Big)^{1/3} + C_2 \quad (r_0 \leq r < \mathcal{R}), \qquad (4)$$

де

$$h_g(r) = \int_{r_0}^{r} (\ln S_g(t) - N_g(t, 0) + C_1)\ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t} \quad (r_0 \leq r < \mathcal{R}).$$

Доведення. Покладемо $I(\alpha,\beta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{r_0}(\ln|f(te^{i\alpha})|-\ln|f(te^{i\beta})|)\frac{dt}{t}$. За лемою D маємо

$$\int_\alpha^\beta (V_g(r,\theta)-V_g(r_0,\theta))d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^r(\ln|g(te^{i\alpha})|-\ln|g(te^{i\beta})|)\ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t}+I(\alpha,\beta)\ln\frac{r}{r_0}. \quad (5)$$

Зафіксуємо деяке $r_1\in(r_0,\mathcal{R})$ і нехай C_3 та C_4 — сталі такі, що $|V_g(r_0,\theta)|\le C_3$ для всіх $\theta\in\mathcal{E}_g(r_0)$ і $|V_g(r_1,\theta)|\le C_4$ для всіх $\theta\in\mathcal{E}_g(r_1)$ (див. лему D). Використовуючи (5) з r_1 замість r, а також лему A, для довільних $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta\le\alpha+2\pi$, отримуємо

$$|I(\alpha,\beta)|\ln\frac{r_1}{r_0}\le\int_\alpha^\beta(|V_g(r_1,\theta)|+|V_g(r_0,\theta)|)d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r_1}(\ln^+M_g(t)+\ln^+M_{\frac{1}{g}}(t))\ln\frac{r_1}{t}\frac{dt}{t}\le$$
$$\le 2\pi(C_4+C_3)+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_0}\frac{r_1}{r_0}C\Big(\frac{r_1}{r_0}\Big)(T_g(r_1)+T_{\frac{1}{g}}(r_1)).$$

Отже, існує стала $C_5>0$ така, що $|I(\alpha,\beta)|\le C_5$ для довільних $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta\le\alpha+2\pi$. Оскільки функція $|I(\alpha,\beta)|$ є періодичною як за α, так і за β, то $|I(\alpha,\beta)|\le C_5$ для всіх $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Нехай

$$C_1=\frac{1}{e}+|\ln|c_g(0)||+\frac{2C_5}{\ln\frac{r_1}{r_0}},\quad C_2=\frac{1}{e}+2C_3+2|\ln|c_g(0)||+N_g(r_1,0).$$

Покладемо

$$l_g(r)=\int_{r_0}^r\Big(\ln S_g(t)-N_g(t,0)-\ln|c_g(0)|+\frac{1}{e}\Big)\ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t}+C_5\ln\frac{r}{r_0}\quad (r_0\le r<\mathcal{R}).$$

З нерівності (1) випливає, що $\ln S_g(t)-N_g(t,0)-\ln|c_g(0)|+\frac{1}{e}\ge\frac{1}{2e}$ для всіх $t\in(r_0,\mathcal{R})$, а тому $l_g(r)>0$ для всіх $r\in(r_0,\mathcal{R})$.

Доведемо, що для довільних $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta\le\alpha+2\pi$, виконується нерівність

$$N_g(r,\alpha,\beta,0)\le\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln S_g(r)+3\Big(\frac{3}{\pi^2}\ln^2S_g(r)l_g(r)\Big)^{1/3}+C_2\quad (r_1<r<\mathcal{R}). \quad (6)$$

Звідси і випливатиме (4). Справді, якщо $r\in[r_0,r_1]$, то $N_g(r,\alpha,\beta,0)\le N_g(r_1,0)\le C_2$, тобто (4) виконується. Якщо ж $r\in(r_1,\mathcal{R})$, то

$$C_5\ln\frac{r}{r_0}\le\frac{2C_5}{\ln\frac{r_1}{r_0}}\cdot\frac{1}{2}\ln^2\frac{r}{r_0}=\frac{2C_5}{\ln\frac{r_1}{r_0}}\int_{r_0}^r\ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t},$$

а тому $l_g(r)\le h_g(r)$ і (4) випливає з (6).

Перейдемо до доведення нерівності (6). Зафіксуємо довільні $r\in(r_1,\mathcal{R})$ і $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ такі, що $\alpha<\beta\le\alpha+2\pi$. Нерівність (6) правильна, якщо $8l_g(r)\ge\ln S_g(r)$. Справді, використовуючи нерівність (1), маємо

$$N_g(r,\alpha,\beta,0)\le N_g(r,0)\le\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln S_g(r)+N_g(r,0)\le$$
$$\le\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln S_g(r)+\ln S_g(r)+\frac{1}{2e}-\ln|c_g(0)|\le\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln S_g(r)+2\Big(\ln^2S_g(r)l_g(r)\Big)^{1/3}+C_2.$$

Нехай тепер $8l_g(r)<\ln S_g(r)$ і $\varepsilon=(\frac{8\pi}{9}\frac{l_g(r)}{\ln S_g(r)})^{1/3}$. Оскільки $l_g(r)>0$ і $\ln S_g(r)>0$, то $\varepsilon>0$. З іншого боку, $\varepsilon<(\frac{8\pi}{9}\frac{1}{8})^{1/3}<\frac{\pi}{4}$.

Покладемо $\varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r} \ln|g(te^{i\theta})| \ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t}$. Тоді, застосовуючи лему B до функції g, отримуємо

$$I_1 := \int_{\alpha-3\varepsilon}^{\alpha-2\varepsilon} \varphi(\theta)d\theta = \int_{r_0}^{r} \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha-3\varepsilon}^{\alpha-2\varepsilon} \ln|g(te^{i\theta})|d\theta\Big) \ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t} \le \int_{r_0}^{r} \Big(\frac{1}{2e} + \frac{\varepsilon}{2\pi}\ln S_g(t)\Big) \ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t}.$$

Звідси, а також з теореми про середнє, застосованої до інтеграла I_1, випливає існування числа $\zeta_1 \in [\alpha - 3\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon]$ такого, що

$$\varphi(\zeta_1) \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{r_0}^{r} \Big(\frac{1}{2e} + \frac{\varepsilon}{2\pi}\ln S_g(t)\Big) \ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t}. \tag{7}$$

Оскільки для довільних $x, y \in \mathbb{R}$ з формули Йєнсена випливає рівність

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x}^{y} \ln|g(re^{i\theta})|d\theta = N_g(r, 0) + \ln|c_g(0)| - \frac{1}{2\pi}\int_{y}^{x+2\pi} \ln|g(re^{i\theta})|d\theta, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

то, використовуючи лему B, у випадку $x < y \le x + 2\pi$ маємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x}^{y} \ln|g(re^{i\theta})|d\theta \ge N_g(r, 0) + \ln|c_g(0)| - \frac{1}{2e} - \frac{x + 2\pi - y}{2\pi}\ln S_g(r).$$

З огляду на це,

$$I_2 := \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} \varphi(\theta)d\theta = \int_{r_0}^{r} \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} \ln|g(te^{i\theta})|d\theta\Big) \ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t} \ge$$
$$\ge \int_{r_0}^{r} \Big(N_g(t, 0) + \ln|c_g(0)| - \frac{1}{2e} - \frac{2\pi - \varepsilon}{2\pi}\ln S_g(t)\Big) \ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t}.$$

Звідси і з теореми про середнє, застосованої до інтеграла I_2, випливає існування числа $\zeta_2 \in [\alpha - \varepsilon, \alpha]$ такого, що

$$\varphi(\zeta_2) \ge \frac{1}{\varepsilon}\int_{r_0}^{r} \Big(N_g(t, 0) + \ln|c_g(0)| - \frac{1}{2e} - \frac{2\pi - \varepsilon}{2\pi}\ln S_g(t)\Big) \ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t}. \tag{8}$$

Тоді, скориставшись (5), лемою D і нерівностями (7) та (8), отримуємо

$$I_3 := \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} (V_g(r, \theta) - V_g(r_0, \theta))d\theta = \varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2) + I(\zeta_1, \zeta_2)\ln\frac{r}{r_0} \le$$
$$\le \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_{r_0}^{r} (\ln S_g(t) - N_g(t, 0) - \ln|c_g(0)| + \frac{1}{e})\ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t} + \varepsilon C_5 \ln\frac{r}{r_0}\Big) \le \frac{1}{\varepsilon}l_g(r).$$

З нерівності $\zeta_2 - \zeta_1 \ge \varepsilon$ і теореми про середнє, застосованої до інтеграла I_3, випливає існування числа $\zeta \in [\zeta_1, \zeta_2] \cap \mathcal{E}_g(r)$ такого, що

$$V_g(r, \zeta) - V_g(r_0, \zeta) \le l_g(r)/\varepsilon^2. \tag{9}$$

Подібно доводимо, що існують числа $\eta_1 \in [\beta, \beta + \varepsilon]$ і $\eta_2 \in [\beta + 2\varepsilon, \beta + 3\varepsilon]$ такі, що

$$\varphi(\eta_1) \ge \frac{1}{\varepsilon}\int_{r_0}^{r} \Big(N_g(t, 0) + \ln|c_g(0)| - \frac{1}{2e} - \frac{2\pi - \varepsilon}{2\pi}\ln S_g(t)\Big) \ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t},$$
$$\varphi(\eta_2) \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{r_0}^{r} \Big(\frac{1}{2e} + \frac{\varepsilon}{2\pi}\ln S_g(t)\Big) \ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t}.$$

Тоді

$$I_4:=\int_{\eta_1}^{\eta_2}(V_g(r,\theta)-V_g(r_0,\theta))d\theta=\varphi(\eta_1)-\varphi(\eta_2)+I(\eta_1,\eta_2)\ln\frac{r}{r_0}\geq-\frac{1}{\varepsilon}l_g(r).$$

З нерівності $\eta_2-\eta_1\leq 3\varepsilon$ і теореми про середнє, застосованої до інтеграла I_4, випливає існування числа $\eta\in[\eta_1,\eta_2]\cap\mathcal{E}_g(r)$ такого, що $V_g(r,\eta)-V_g(r_0,\eta)\geq-\frac{1}{3\varepsilon^2}l_g(r)$. Використовуючи останню нерівність, нерівність (9), леми D та B, і враховуючи, що $\eta-\zeta\leq\beta-\alpha+6\varepsilon<4\pi$, отримуємо

$$\begin{aligned}N_g(r,\alpha,\beta,0)&\leq N_g(r,\zeta,\eta,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\zeta}^{\eta}\ln|g(re^{i\theta})|d\theta-\frac{\eta-\zeta}{2\pi}\ln|c_g(0)|+V_g(r,\zeta)-V_g(r,\eta)\leq\\&\leq\frac{\eta-\zeta}{2\pi}\ln S_g(r)+\frac{1}{e}-\frac{\eta-\zeta}{2\pi}\ln|c_g(0)|+V_g(r,\zeta)-V_g(r,\eta)\leq\\&\leq\frac{\beta-\alpha+6\varepsilon}{2\pi}\ln S_g(r)+\frac{1}{e}+2|\ln|c_g(0)||+\frac{1}{\varepsilon^2}l_g(r)+C_3+\frac{1}{3\varepsilon^2}l_g(r)+C_3=\\&=\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln S_g(r)+3\Big(\frac{3}{\pi^2}\ln^2S_g(r)l_g(r)\Big)^{1/3}+C_2.\end{aligned}\qquad\square$$

3. Доведення теореми 1. Нехай $g(z)=f(z)-a$. Тоді (див. формулювання теореми 2)

$$h_g(r)\leq\lambda(r)=\int_{r_0}^{r}(\ln S_g(t)+C_1)\ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t}.$$

Легко перевірити, що $r(r\Lambda'(r))'=\ln S_g(r)+C_1$. За лемою C маємо $h_g(r)\leq\Lambda(r)=o(r\Lambda'(r))=o(r(r\Lambda'(r))')=o(\ln S_g(r))$, $r\to\mathcal{R}$. Використовуючи теорему 2, рівномірно за $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta\leq\alpha+2\pi$, отримуємо

$$\varlimsup_{r\to\mathcal{R}}\frac{N_f(r,\alpha,\beta,a)}{\ln S_f(r)}=\varlimsup_{r\to\mathcal{R}}\frac{N_g(r,\alpha,\beta,0)}{\ln S_g(r)}\leq\frac{\beta-\alpha}{2\pi}.\tag{10}$$

З іншого боку, скориставшись нерівністю (10) з β і $\alpha+2\pi$ замість відповідно α і β, а також співвідношенням (2), рівномірно за $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta\leq\alpha+2\pi$, маємо

$$\begin{aligned}\varliminf_{E\ni r\to\mathcal{R}}\frac{N_f(r,\alpha,\beta,a)}{\ln S_f(r)}&=\varliminf_{E\ni r\to\mathcal{R}}\frac{N_f(r,0)-N_f(r,\beta,\alpha+2\pi,a)}{\ln S_f(r)}\geq\\&\geq\varliminf_{E\ni r\to\mathcal{R}}\frac{N_f(r,0)}{\ln S_f(r)}-\varlimsup_{r\to\mathcal{R}}\frac{N_f(r,\alpha,\beta,a)}{\ln S_f(r)}\geq1-\frac{\alpha+2\pi-\beta}{2\pi}=\frac{\beta-\alpha}{2\pi}.\end{aligned}$$

Звідси і з (10) випливає, що рівномірно за $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta\leq\alpha+2\pi$, виконується співвідношення (3).

4. Кутовий розподіл значень випадкових аналітичних функцій. Розглянемо довільний ймовірнісний простір $(\Omega,\mathcal{A},P)$, де Ω — деяка множина, P — повна ймовірнісна міра, а $\mathcal{A}$ — σ-алгебра вимірних відносно P підмножин з Ω, і припустимо, що на цьому просторі існує послідовність Штейнгауза $(\omega_n(\omega))$, тобто послідовність незалежних рівномірно розподілених на $[0,1]$ випадкових величин (див. [8]).

Поряд з аналітичною функцією $f\in\mathcal{H}(\mathcal{R})$ з тейлоровими коефіцієнтами (c_n) розглянемо випадкову аналітичну функцію $f_\omega(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{2\pi i\omega_n(\omega)}c_nz^n$.

Розподіл значень і кутовий розподіл значень випадкових аналітичних функцій вигляду досліджувався у статтях роботах [9]–[12], [4]. Наступні дві теореми, що є безпосередніми наслідками з теореми 1, а також з теорем 13 та 17 статті [12], доповнюють результати згаданих статей в частині, що стосується кутового розподілу значень випадкових аналітичних у скінченному крузі функцій.

Теорема 3. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty)$, а $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ аналітична функція. Тоді існує зростаюча до $\mathcal{R}$ послідовність (r_p) така, що м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ і довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$, виконується співвідношення $N_{f_\omega}(r_p, \alpha, \beta, a) \sim \frac{\beta-\alpha}{2\pi} \ln S_f(r_p)$, $p \to \infty$.*

Теорема 4. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty)$ і $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналітична функція. Якщо виконуються умови*

$$\varliminf_{r\to\mathcal{R}} \frac{\ln S_f(r)}{\ln \frac{1}{\mathcal{R}-r}} > 0, \quad \varlimsup_{r\to\mathcal{R}} \frac{\ln\ln S_f(r) \ln\ln \frac{1}{\mathcal{R}-r}}{\ln^2 \frac{1}{\mathcal{R}-r}} = 0,$$

то м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ і довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$, виконується співвідношення

$$N_{f_\omega}(r, \alpha, \beta, a) \sim \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \ln S_f(r), \ r \to \mathcal{R}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Hayman W.K. Meromorphic functions. – Oxford: Clarendon Press, 1964.
2. Goldberg A.A., Ostrovskii I.V. Value distribution of meromorphic functions. – Transl. Math. Monogr., V.236. – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2008.
3. Sheremeta M.M., Zabolotskii N.V. *On the slow growth of the main characteristics of entire functions*// Math. Notes. – 1999. – V.65, №2. – P. 168–174.
4. Mahola M.P., Filevych P.V. *The angular value distribution of random analytic functions*// Mat. Stud. – 2012. – V.37, №1. – P. 34–51.
5. Hayman W.K., Rossi J.F. *Characteristic, maximum modulus and value distribution*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1984. – V.284, №2. – P. 651–664.
6. Hayman W.K. *Angular value distribution of power series with gaps*// Proc. London Math. Soc. – 1972. – V.24, №3. – P. 590–624.
7. Levin B.Ja. Lectures on entire functions. – Transl. Math. Monogr., V.150. – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1996.
8. Kahane J.-P. Some Random Series of Functions. – Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
9. Offord A.C. *The distribution of the values of a random function in the unit disk*// Studia Math. – 1972. – V.41. – P. 71–106.
10. Mahola M.P., Filevych P.V. *The value distribution of a random entire function*// Mat. Stud. – 2010. – V.34, №2. – P. 120–128.
11. Mahola M.P., Filevych P.V. *The angular distribution of zeros of random analytic functions*// Ufa Math. J. – 2012. – V.4, №1. – P. 116–128.
12. Mahola M.P., Filevych P.V. *The value distribution of random analytic functions*// Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. – 2012. – V.9. – P. 180–215. (in Ukrainian)

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника,
marichka_stanko@ukr.net; filevych@mail.ru

Надійшло 1.07.2012

Після переробки 1.09.2012