УДК 517.51

О. О. Карлова, О. В. Собчук

ПРО H_1-КОМПОЗИТОРИ І КУСКОВО НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

O. O. Karlova, O. V. Sobchuk. *On H_1-compositors and piecewise continuous mappings*, Mat. Stud. **38** (2012), 139–146.

We introduce the notion of a right H_1-compositor and prove that for a hereditarily Baire metrizable space X, a normal space Y and a mapping $f\colon X\to Y$ the following conditions are equivalent: (i) f is piecewise continuous; (ii) f is k-continuous; (iii) f is G_δ-measurable; if, moreover, Y is perfect, then (i)–(iii) are equivalent to: (iv) f is a right H_1-compositor.

Е. А. Карлова, А. В. Собчук. *Об H_1-композиторах и кусочно непрерывных отображениях* // Мат. Студії. – 2012. – Т.38, №2. – C.139–146.

Вводится понятие правого H_1-композитора и доказывается, что для наследственно бэровского метризуемого пространства X, нормального пространства Y и отображения $f\colon X\to Y$ следующие условия равносильны: (i) f — кусочно непрерывное; (ii) f — k-непрерывное; (iii) f — G_δ-измеримое; если, кроме того, Y — совершенное, то условия (i)–(iii) равносильны условию: (iv) f — правый H_1-композитор.

1. Вступ. Ми кажемо, що відображення f між топологічними просторами X і Y є

- *першого класу Лебеґа*, якщо прообраз довільної відкритої в Y множини є типу F_σ в X;
- *G_δ-вимірним*, якщо прообраз довільної відкритої в Y множини є типу G_δ в X;
- *першого класу Бера*, якщо f є поточковою границею послідовності неперервних відображень $f_n\colon X\to Y$;
- *кусково неперервним*, якщо існує така послідовність замкнених множин $(F_n)_{n=1}^\infty$, що $X=\bigcup_{n=1}^\infty F_n$ і звуження $f|_{F_n}$ неперервне для кожного $n\in\mathbb{N}$;
- *насичено неперервним*, якщо звуження $f|_F$ на довільну непорожню замкнену множину $F\subseteq X$ має точку неперервності.

Сукупність усіх відображень першого класу Лебеґа з X в Y ми позначаємо через $\mathrm{H}_1(X,Y)$, а першого класу Бера — через $\mathrm{B}_1(X,Y)$.

Добре відомо, що композиція неперервного відображення і відображення першого класу Бера залишається відображенням першого класу, тоді як композиція двох відображень першого класу Бера, взагалі кажучи, вже не буде відображенням першого класу Бера. Справді, розглянемо функцію $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=\frac{1}{n} \text{ для деякого } n\in\mathbb{N},\\ 0, & \text{інакше,}\end{cases}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A21, 54C08.
Keywords: right H_1-compositor, right B_1-compositor, mapping of the first Lebesgue class, G_δ-measurable mapping, piecewise continuous mapping, k-continuous mapping, weakly k-continuous mapping.

і функцію $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\quad g(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=r_n \text{ для деякого } n\in\mathbb{N},\\ 0, & \text{інакше},\end{cases}$ де $\mathbb{Q}=\{r_n\colon n\in\mathbb{N}\}$. Тоді функції f і g належать до першого класу Бера, але композиція $f\circ g$ — це функція Діріхле, яка не є функцією першого класу.

Д. Чжао в [5] ввів поняття *правого* B_1*-композитора*, тобто такої функції $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що $g\circ f\in \mathrm{B}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ для довільної функції $g\in \mathrm{B}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, і отримав такий результат.

Теорема 1. *Для функції $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ наступні умови рівносильні:*
1. *f — G_δ-вимірна;* 2. *f — правий B_1-композитор;* 3. *для довільної функції $\varepsilon\colon\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ першого класу Бера існує функція $\delta\colon\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ така, що*
$$|x'-x''|<\min\{\delta(x'),\delta(x'')\}\implies |f(x')-f(x'')|<\min\{\varepsilon(f(x')),\varepsilon(f(x''))\}.$$

Крім того, у [5] було введене поняття k-неперервної функції.

Означення 1. Функція $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ називається *k-неперервною*, якщо для довільної функції $\varepsilon\colon\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ існує функція $\delta\colon\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ така, що для всіх $x',x''\in\mathbb{R}$
$$|x'-x''|<\min\{\delta(x'),\delta(x'')\}\implies |f(x')-f(x'')|<\min\{\varepsilon(f(x')),\varepsilon(f(x''))\}.$$

З теореми 1 випливає, що кожна k-неперервна функція є правим B_1-композитором. У зв'язку із цим Д. Чжао поставив наступне питання.

Питання 1. *Чи кожний правий B_1-композитор $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є k-неперервною функцією?*

При доведенні багатьох результатів з [5] Д. Чжао використовує наступну характеризацію функцій першого класу Лебеґа, яка вперше була одержана у роботі [1].

Теорема 2. *Нехай $f\colon X\to Y$ — відображення між повними сепарабельними метричними просторами (X,d) та (Y,ϱ). Тоді наступні умови рівносильні:*
1. *$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta\colon X\to(0,+\infty))(\forall x',x''\in X)$ $(d(x',x'')<\min\{\delta(x'),\delta(x'')\}\implies \varrho(f(x'),f(x''))<\varepsilon)$;* 2. *$f$ належить до першого класу Лебеґа.*

Умова (1) теореми 2 для функцій $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ також вивчалась у працях [2, 3, 4, 5].

У цій статті ми узагальнюємо теорему 2 і даємо позитивну відповідь на питання 1.

2. Насичена неперервність слабко k-неперервних функцій. Для відображення $f\colon X\to Y$ між топологічними просторами символом $C(f)$ ми позначаємо множину точок неперервності відображення f, а через $D(f)$ — множину точок розриву відображення f.

Для точки $x\in X$ позначимо через $\mathcal{U}_x$ систему всіх околів точки x в X. Для функції $f\colon X\to(Y,\varrho)$ покладемо
$$\omega_f(A)=\sup_{x',x''\in A}\varrho(f(x'),f(x'')),\ \omega_f(x)=\inf_{U\in\mathcal{U}_x}\omega_f(U),\ \omega_{f,x}(A)=\sup_{x'\in A}\varrho(f(x),f(x')).$$
Зауважимо, що $\omega_f(A)\le 2\omega_{f,x}(A)$ для всіх $x\in A$.

У метричному просторі (X,d) через $B_r(x)$ ми позначаємо відкриту кулю з центром в точці x і радіусом r.

Для топологічного простору X через $\mathcal{T}(X)$ ми позначаємо його топологію.

Означення 2. Відображення $U\colon X\to\mathcal{T}(X)$ називається *окіл-відображенням*, якщо $x\in U(x)$ для кожного $x\in X$.

Означення 3. Окіл-відображення $U\colon X\to\mathcal{T}(X)$ називається *майже відкритим*, якщо множина $\{(x,y)\colon y\in U(x)\}$ є околом діагоналі Δ в X^2.

Означення 4. Нехай X і Y — топологічні простори. Відображення $f\colon X \to Y$ називається *слабко k-неперервним*, якщо для довільного майже відкритого окіл-відображення $V\colon Y \to \mathcal{T}(Y)$ існує окіл-відображення $U\colon X \to \mathcal{T}(X)$ таке, що для всіх $x', x'' \in X$

$$x', x'' \in U(x') \cap U(x'') \implies f(x'), f(x'') \in V(f(x')) \cap V(f(x'')). \tag{1}$$

Твердження 1. *Нехай X — топологічний простір, (Y, ϱ) — метричний простір і $f\colon X \to Y$. Тоді наступні умови рівносильні:*
1. *f — слабко k-неперервне;*
2. *для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл-відображення $U\colon X \to \mathcal{T}(X)$ таке, що для всіх $x', x'' \in X$*

$$x', x'' \in U(x') \cap U(x'') \implies \varrho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon. \tag{2}$$

Доведення. (1) $\Longrightarrow$ (2). Очевидно.
(2) $\Longrightarrow$ (1). Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через U_n окіл-відображення $U_n\colon X \to \mathcal{T}(X)$, яке відповідає числу $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

Нехай $V\colon Y \to \mathcal{T}(Y)$ — майже відкрите окіл-відображення. Для кожного $y \in Y$ позначимо через $\delta(y)$ таке число з $(0,1)$, що $B_{2\delta(y)}(y) \times B_{2\delta(y)}(y) \subseteq \{(y', y'')\colon y'' \in V(y')\} = W$. Тепер для кожного $x \in X$ покладемо

$$U(x) = \bigcap_{k \le 1/\delta(f(x))} U_k(x).$$

Нехай $x', x'' \in U(x') \cap U(x'')$ і $\delta(f(x')) \le \delta(f(x''))$. Позначимо $K = [1/\delta(f(x'))]$. Тоді $U(x') \subseteq U_K(x')$ і $U(x'') \subseteq U_K(x'')$. Тому $\varrho(f(x'), f(x'')) \le 1/K \le 2\delta(f(x''))$. Отже, $(f(x'), f(x'')) \in W$ і $(f(x''), f(x')) \in W$. □

Теорема 3. *Нехай X — берів метризовний простір, Y — метризовний простір і $f\colon X \to Y$ — слабко k-неперервне відображення. Тоді $C(f) \neq \varnothing$.*

Доведення. Нехай d — метрика на X, а ϱ — метрика на Y, які породжують топологічні структури просторів X і Y відповідно.

Припустимо, що $D(f) = X$. Тоді $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, де $X_n = \{x \in X\colon \omega_f(x) \ge \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки простір X берів, а множини X_n замкнені, то існують така відкрита непорожня множина G в X і номер $N_1 \in \mathbb{N}$, що $\omega_f(x) \ge \frac{1}{N_1}$ для всіх $x \in G$.

Для $\varepsilon = 1/6N_1$ виберемо таке окіл-відображення $U\colon X \to \mathcal{T}(X)$, що виконується (2). Для кожного $x \in X$ існує таке $\delta(x) > 0$, що $B_{\delta(x)}(x) \subseteq U(x)$. Зрозуміло, що $\varrho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$ як тільки $d(x', x'') < \min\{\delta(x'), \delta(x'')\}$.

Нехай $A_n = \{x \in G\colon \delta(x) > \frac{1}{n}\}$ і $F_n = \overline{A_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Оскільки G є множиною другої категорії в X, то існує такий номер N_2, що множина F_{N_2} десь щільна в G, тобто існує така відкрита в X множина $U \subseteq G$, що $U \subseteq F_{N_2}$. Візьмемо довільну точку $a \in U$, позначимо $V = U \cap B_{\delta(a)}(a) \cap B_{\frac{1}{2N_2}}(a)$ і покажемо, що $\omega_{f,a}(V) \le 1/3N_1$. Нехай $x \in V$. Виберемо $b \in V \cap B_{\delta(x)}(x) \cap A_{N_2}$. Тоді, оскільки $b \in B_{\delta(a)}(a)$, то $d(a,b) < \delta(a)$. Крім того, $b \in A_{N_2} \cap B_{\frac{1}{2N_2}}(a)$. Тому $d(a,b) < \frac{1}{2N_2} < \frac{1}{2}\delta(b)$, зокрема, $d(a,b) < \delta(b)$. Отже, $d(a,b) < \min\{\delta(a), \delta(b)\}$.

Оскільки $x \in B_{\frac{1}{2N_2}}(a)$, то $d(x,a) < \frac{1}{2N_2} < \frac{1}{2}\delta(b)$. Тоді

$$d(x,b) \le d(x,a) + d(a,b) < (\delta(b) + \delta(b))/2 = \delta(b).$$

З іншого боку, $b \in B_{\delta(x)}(x)$, тому $d(x,b) < \delta(x)$. І, отже, $d(x,b) < \min\{\delta(x), \delta(b)\}$. Тоді

$$\varrho(f(x), f(a)) \le \varrho(f(x), f(b)) + \varrho(f(b), f(a)) < 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{1}{6N_1} = \frac{1}{3N_1},$$

звідки $\omega_{f,a}(V) \leq \frac{1}{3N_1}$. Врахувавши, що $\omega_f(V) \leq 2\omega_{f,a}(V)$, ми одержимо, що $\omega_f(V) \leq \frac{2}{3N_1} < \frac{1}{N_1}$. Тоді $\omega_f(x) < \frac{1}{N_1}$ для довільного $x \in V$, звідки отримується суперечність, адже $V \subseteq G$. Отже, $C(f) \neq \varnothing$. $\square$

Теорема 4. *Нехай X — спадково берів метризовний простір, Y — метризовний простір і $f\colon X \to Y$ — слабко k-неперервне відображення. Тоді f є насичено неперервним.*

Доведення. Нехай $F \subseteq X$ — замкнена множина. Згідно з теоремою 3, множина точок неперервності звуження $f|_F$ не порожня, оскільки простір F берів. $\square$

3. Насичено неперервні відображення першого класу Лебеґа. Підмножина B топологічного простору X називається *розкладною*, якщо множина $\overline{F \cap B} \cap \overline{F \setminus B}$ ніде не щільна в F для довільної замкненої непорожньої множини $F \subseteq X$.

Зауважимо, що для довільних двох множин E та H у топологічному просторі X з того, що рівняння $A = \overline{A \cap E} \cap \overline{A \cap H}$ має єдиний розв'язок $A = \varnothing$ випливає, що існує така розкладна множина $B \subseteq X$, що $E \subseteq B$ і $B \cap H = \varnothing$ (див. [6, с.103]).

Доведення наступного результату є аналогічним до доведення теореми 2 з [6, с.403].

Теорема 5. *Нехай X — досконалий паракомпакт, Y — досконалий простір і $f\colon X \to Y$ — насичено неперервне відображення. Тоді $f \in H_1(X, Y)$.*

Доведення. Візьмемо довільну замкнену множину F в Y і покажемо, що її прообраз $f^{-1}(F)$ є множиною типу G_δ в X. Оскільки простір Y досконалий, то $G = Y \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, де $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність замкнених підмножин простору Y. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$, позначимо $E = f^{-1}(F),\ H_n = f^{-1}(F_n)$ і припустимо, що рівняння

$$A = \overline{A \cap E} \cap \overline{A \cap H_n} \tag{3}$$

має розв'язок $A \neq \varnothing$. Нехай $g = f|_A$. Оскільки A — замкнена множина, то існує $p \in C(g)$. З (3) випливає, що $A \subseteq \overline{A \cap E} = \overline{g^{-1}(F)}$. Враховуючи неперервність відображення g у точці p, ми одержимо, що $f(p) = g(p) \in \overline{g(g^{-1}(F))} \subseteq F$. Аналогічно можна довести, що $f(p) = g(p) \in \overline{g(g^{-1}(F_n))} \subseteq F_n$, а це суперечить тому, що $F \cap F_n = \varnothing$. Звідки, $A = \varnothing$.

Отже, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує така розкладна множина B_n в X, що $f^{-1}(F) \subseteq B_n \subseteq X \setminus f^{-1}(F_n)$. Тоді

$$f^{-1}(F) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus f^{-1}(F_n)) = X \setminus f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F) =$$
$$= X \setminus (X \setminus f^{-1}(F)) = f^{-1}(F).$$

Тому, $f^{-1}(F) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Згідно з [9, теорема 1] множина B_n є типу G_δ в X для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому і множина $f^{-1}(F)$ є типу G_δ. Отже, $f \in H_1(X, Y)$. $\square$

З теорем 4 і 5 негайно випливає наступний наслідок.

Теорема 6. *Нехай X — спадково берів метризовний простір, Y — метризовний простір і $f\colon X \to Y$ — слабко k-неперервне відображення. Тоді f належить до першого класу Лебеґа.*

4. Функції першого класу Лебеґа є слабко k-неперервними. Нагадаємо, що сім'я $\mathcal{A} = (A_i\colon i \in I)$ підмножин топологічного простору X називається *дискретною*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує окіл U, який перетинається не більше ніж з однією з множин сім'ї $\mathcal{A}$. Сім'я $\mathcal{A} = (A_i : i \in I)$ підмножин топологічного простору X називається *сильно дискретною*, якщо існує дискретна сім'я $\mathcal{G} = (G_i : i \in I)$ відкритих множин в X така, що $\overline{A}_i \subseteq G_i$ для всіх $i \in I$. Зауважимо, що у випадку, коли простір X метризовний, то кожна дискретна сім'я є сильно дискретною.

Сім'я $\mathcal{A}$ називається *(сильно) σ-дискретною*, якщо її можна подати у вигляді зліченного об'єднання (сильно) дискретних сімей.

Сім'я $\mathcal{B}$ підмножин топологічного простору X називається *базою для функції* $f : X \to Y$, якщо для довільної відкритої в Y множини V існує підсім'я $\mathcal{B}_V \subseteq \mathcal{B}$ така, що $f^{-1}(V) = \bigcup \mathcal{B}_V$. Якщо, до того ж, сім'я $\mathcal{B}$ є (сильно) σ-дискретною, то її називають *(сильно) σ-дискретною базою для f*, а відображення $f : X \to Y$, яке має (сильно) σ-дискретну базу, називається *(сильно) σ-дискретним.*

Зауваження 1. Довільне відображення, яке діє в простір з другою аксіомою зліченності, є σ-дискретним. Також легко бачити, що кожне неперервне відображення з метризовною областю визначення чи простором значень є σ-дискретним, адже метризовний простір має σ-дискретну базу. Згідно з [7, теорема 3] довільна функція першого класу Лебеґа, яка визначена на повнометризовному просторі і набуває значень у метризовному просторі, є σ-дискретною.

Теорема 7. *Нехай X — нормальний простір, Y — метризовний простір і $f : X \to Y$ — σ-дискретне відображення першого класу Лебеґа. Якщо виконується одна з наступних умов: 1) f — сильно σ-дискретне; 2) Y — сепарабельний, то f є слабко k-неперервним.*

Доведення. Нехай ϱ — обмежена метрика на Y, яка породжує його топологічну структуру. Для кожного $y \in Y$ покладемо $f_y(x) = \varrho(x, y)$. Розглянемо ізометричне вкладення $h : Y \to Z$, де $Z = \ell_\infty(Y)$, $h(y) = f_y$ для всіх $y \in Y$. Тоді $h \circ f \in B_1(X, Z)$ згідно з [8, теорема 3.7]. Нехай $(g_n)_{n=1}^\infty$ — послідовність неперервних відображень $g_n : X \to Z$, яка поточково збігається до $h \circ f$ на X.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і $x \in X$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо такий окіл $U_n(x)$ точки x, що $\|g_n(x') - g_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всіх $x' \in U_n(x)$. Крім того, існує такий номер $N(x) \in \mathbb{N}$, що $\|g_n(x) - h(f(x))\| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всіх $n \geq N(x)$. Покладемо $U(x) = U_1(x) \cap \cdots \cap U_{N(x)}(x)$. Доведемо, що виконується (2). Справді, нехай $x', x'' \in U(x') \cap U(x'')$. Без обмеження загальності, вважатимемо, що $N(x') \leq N(x'')$. Тоді

$$\varrho(f(x'), f(x'')) = \|h(f(x')) - h(f(x''))\| \leq \|h(f(x')) - g_{N(x'')}(x')\| +$$
$$+ \|g_{N(x'')}(x') - g_{N(x'')}(x'')\| + \|g_{N(x'')}(x'') - h(f(x''))\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отже, відображення f є слабко k-неперервним. □

З теореми 7 і зауваження 1 випливає наступний наслідок.

Теорема 8. *Нехай X та Y — метризовні простори і $f : X \to Y$ — відображення першого класу Лебеґа. Якщо виконується одна з наступних умов: 1) X — повнометризовний; 2) Y — сепарабельний, то f є слабко k-неперервним.*

Поєднуючи теореми 4, 5 і 8, ми одержимо наступний результат.

Теорема 9. *Нехай f — відображення з простору X у простір Y і виконується одна з наступних умов:*
1. X — спадково берів метризовний простір, Y — метризовний сепарабельний простір;

2. X — *повнометризовний простір*, Y — *метризовний простір*.
Тоді f *належить до першого класу Лебеґа в тому і тільки тому випадку, коли* f *є слабко* k*-неперервним.*

5. Поняття H_1**-композитора.**

Означення 5. Нехай X і Y — топологічні простори. Відображення $f\colon X \to Y$ називається *правим* H_1*-композитором* ($\mathrm{H}_1(\mathbb{R})$*-композитором*), якщо для довільного топологічного простору Z (для $Z = \mathbb{R}$) і довільного відображення $g\colon Y \to Z$ першого класу Лебеґа композиція $g \circ f\colon X \to Z$ теж належить до першого класу Лебеґа.

Теорема 10. *Нехай* X — *топологічний простір*, Y — *досконалий простір. Тоді наступні умови рівносильні:* 1. f *є правим* H_1*-композитором;* 2. f *є правим* $\mathrm{H}_1(\mathbb{R})$*-композитором;* 3. f *є* G_δ*-вимірним.*

Доведення. Імплікація (1) $\Longrightarrow$ (2) очевидна.
(2) $\Longrightarrow$ (3). Нехай $F \subseteq Y$ — довільна замкнена множина. Розглянемо функцію $g\colon Y \to \mathbb{R}$, $g(y) = \begin{cases} 1, & y \in F, \\ 0, & y \in Y \setminus F. \end{cases}$ Тоді $g \in H_1(Y, \mathbb{R})$, адже простір Y досконалий. Оскільки f є правим $\mathrm{H}_1(\mathbb{R})$-композитором, то відображення $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ належить до першого класу Лебеґа. Неважко переконатися, що $f^{-1}(F) = (g \circ f)^{-1}((0, 2))$. Отже, множина $f^{-1}(F)$ є множиною типу F_σ в X.
(3) $\Longrightarrow$ (1). Нехай Z — топологічний простір, $g \in H_1(Y, Z)$ і $h = g \circ f$. Візьмемо довільну замкнену в Z множину F. Тоді $g^{-1}(F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, де F_n — замкнені підмножини простору Y. Оскільки $h^{-1}(F) = f^{-1}(g^{-1}(F))$, то $h^{-1}(F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(F_n)$. Але відображення f є G_δ-вимірним, тому множина $h^{-1}(F)$ є F_σ-множиною в X. □

6. G_δ**-вимірність** k**-неперервних відображень.**

Означення 6. Відображення $f\colon X \to Y$ між топологічними просторами X і Y називається *k-неперервним*, якщо для довільного окіл-відображення $V\colon Y \to \mathcal{T}(Y)$ існує окіл-відображення $U\colon X \to \mathcal{T}(X)$ таке, що для всіх $x', x'' \in X$

$$x', x'' \in U(x') \cap U(x'') \implies f(x'), f(x'') \in V(f(x')) \cap V(f(x'')). \tag{4}$$

Легко бачити, що у випадку $X = Y = \mathbb{R}$ означення 6 і 1 є рівносильними.

Твердження 2. *Нехай* X *і* Y — *топологічні простори. Тоді кожне неперервне відображення* $f\colon X \to Y$ *є* k*-неперервним.*

Доведення. Зафіксуємо довільне окіл-відображення $V\colon Y \to \mathcal{T}(Y)$. Для довільного $x \in X$ існує такий окіл $U(x)$ точки x, що $f(U(x)) \subseteq V(f(x))$. Перевіримо виконання умови (4). Справді, візьмемо такі точки $x', x'' \in X$, що $x', x'' \in U(x') \cap U(x'')$. Тоді $f(x') \in f(U(x'')) \subseteq V(f(x''))$. Аналогічно, $f(x'') \in f(U(x')) \subseteq V(f(x'))$. Отже, $f(x'), f(x'') \in V(f(x')) \cap V(f(x''))$. □

Твердження 3. *Нехай* X, Y, Z — *топологічні простори,* $f\colon X \to Y$ — k*-неперервне відображення,* $g\colon Y \to Z$ — *слабко* k*-неперервне відображення. Тоді композиція* $g \circ f\colon X \to Z$ *є слабко* k*-неперервним відображенням.*

Доведення. Позначимо $h = g \circ f$. Зафіксуємо довільне майже відкрите окіл-відображення $W\colon Z \to \mathcal{T}(Z)$ і знайдемо таке окіл-відображення $V\colon Y \to \mathcal{T}(Y)$, що $g(y'), g(y'') \in W(g(y')) \cap W(g(y''))$ як тільки $y', y'' \in V(y') \cap V(y'')$. Оскільки відображення $f\colon X \to Y$ є k-неперервним, то існує окіл-відображення $U\colon X \to \mathcal{T}(X)$, що $f(x'), f(x'') \in V(f(x')) \cap V(f(x''))$ для всіх $x', x'' \in U(x') \cap U(x'')$. Зрозуміло, що $h(x'), h(x'') \in W(h(x')) \cap W(h(x''))$ для всіх $x', x'' \in U(x') \cap U(x'')$. □

Теорема 11. *Нехай X — спадково берів метризовний простір, Y — нормальний простір і $f\colon X \to Y$ — k-неперервне. Тоді f — G_δ-вимірне.*

Доведення. Згідно з теоремою 10 досить довести, що f є правим $\mathrm{H}_1(\mathbb{R})$-композитором.

Розглянемо довільне відображення $g \in H_1(Y, \mathbb{R})$. За теоремою 8 відображення g є слабко k-неперервним. Застосувавши твердження 3, ми одержимо, що композиція $g \circ f$ є слабко k-неперервним відображенням. Тоді за теоремою 6, $g \circ f \in H_1(X, \mathbb{R})$. Отже, f є правим $\mathrm{H}_1(\mathbb{R})$-композитором. □

7. Зв'язок між k-неперервними і кусково неперервними функціями.

Лема 1. *Нехай X — топологічний простір, $(X_n)_{n=1}^\infty$ — диз'юнктна послідовність F_σ-множин така, що $X = \bigsqcup_{n=1}^\infty X_n$. Тоді існує окіл-відображення $U\colon X \to \mathcal{T}(X)$ таке, що*

$$\text{якщо } x \in X_n \text{ і } y \in X_m \text{ при } n \neq m, \text{ то } y \notin U(x) \text{ або } x \notin U(y). \tag{5}$$

Доведення. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо зростаючу послідовність $(F_{n,k})_{k=1}^\infty$ замкнених множин, таку, що $X_n = \bigcup_{k=1}^\infty F_{n,k}$. Зафіксуємо $x \in X$ і виберемо такий номер $n = n_x$, що $x \in X_n$. Покладемо $k_x = \min\{k \in \mathbb{N}\colon x \in F_{n,k}\}$,

$$L_x = \{(m,k) \in \mathbb{N}^2\colon m + k \leq n + k_x \text{ і } m \neq n\}, \quad B_x = \bigcup_{(m,k) \in L_x} F_{m,k}.$$

Тоді множина B_x замкнена, причому $x \notin B_x$. Покладемо $U(x) = X \setminus B_x$.

Покажемо, що окіл-відображення $U\colon X \to \mathcal{T}(X)$ є шуканим. Справді, нехай $x \in X_n$, $y \in X_m$ і $n \neq m$. Якщо $n + k_x \leq m + k_y$, то $(n, k_x) \in L_y$. Оскільки $x \in F_{n,k_x}$, то $x \in B_y$, звідки $x \notin U(y)$. Якщо ж $m + k_y < n + k_x$, то $y \notin U(x)$. □

Твердження 4. *Нехай X — досконало нормальний простір, Y — топологічний простір, $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$, де $(X_n)_{n=1}^\infty$ — послідовність F_σ-множин, $f\colon X \to Y$ — таке відображення, що $f|_{X_n}$ — k-неперервне для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді $f\colon X \to Y$ — k-неперервне.*

Доведення. Зафіксуємо довільне окіл-відображення $V\colon Y \to \mathcal{T}(Y)$. Згідно з теоремою редукції ([6, с. 358]) існує диз'юнктна послідовність $(A_n)_{n=1}^\infty$ множин типу F_σ така, що $A_n \subseteq X_n$ і $X = \bigsqcup_{n=1}^\infty A_n$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує окіл-відображення $U_n\colon A_n \to \mathcal{T}(A_n)$ таке, що для всіх $x', x'' \in U_n(x') \cap U_n(x'')$ виконується включення $f(x'), f(x'') \in V(f(x'), f(x''))$. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $x \in A_n$ виберемо таку множину $\widetilde{U}_n(x) \in \mathcal{T}(X)$, що $U_n(x) = A_n \cap \widetilde{U}_n(x)$.

За лемою 1 існує таке окіл-відображення $U_0\colon X \to \mathcal{T}(X)$, що якщо $x' \in A_n$ і $x'' \in A_m$ при $n \neq m$, то $x' \notin U_0(x'')$ або $x'' \notin U_0(x')$. Покладемо $U(x) = U_0(x) \cap \widetilde{U}_n(x)$, якщо $x \in A_n$. Тоді $U\colon X \to \mathcal{T}(X)$ — це окіл-відображення. Крім того, якщо $x', x'' \in U(x') \cap U(x'')$, то $x', x'' \in U_0(x') \cap U_0(x'')$, звідки випливає, що існує номер $n \in \mathbb{N}$ такий, що $x', x'' \in A_n$. Тоді $x', x'' \in A_n \cap \widetilde{U}_n(x') \cap \widetilde{U}_n(x'') = U_n(x') \cap U_n(x'')$. Тому, $f(x'), f(x'') \in V(f(x'), f(x''))$.

Отже, відображення $f\colon X \to Y$ є k-неперервним. □

З тверджень 2 і 4 та означення кусково неперервного відображення негайно випливає наступний результат.

Теорема 12. *Нехай X — досконало нормальний простір, Y — топологічний простір і $f\colon X\to Y$ — кусково неперервне відображення. Тоді f — k-неперервне.*

8. Характеризація k-неперервних відображень.

Теорема 13. *Нехай X — спадково берів метризовний простір, Y — нормальний простір і $f\colon X\to Y$. Тоді наступні умови рівносильні:* 1. *f — кусково неперервне;* 2. *f — k-неперервне;* 3. *f — G_δ-вимірне.*

Якщо, до того ж, Y — досконалий, то умови (1)–(3) еквівалентні до умови: 4. *f — правий H_1-композитор.*

Доведення. Імплікація (1) $\Longrightarrow$ (2) доведена у теоремі 12. Імплікація (2) $\Longrightarrow$ (3) випливає з теореми 11. Імплікація (3) $\Longrightarrow$ (1) встановлена в [10, теорема 8.1]. Якщо ж простір Y досконалий, то еквівалентність умов (3) і (4) випливає з теореми 10. □

Наслідок 1. *Для відображення $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ наступні умови рівносильні:* 1. *f — правий B_1-композитор;* 2. *f — k-неперервне.*

Доведення. Випливає з теореми 13 і рівності $\mathrm{H}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})=\mathrm{B}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Peng-Yee Lee, Wee-Kee Tang, Dongsheng Zhao, *An equivalent definition of functions of the first Baire class*, Proc. Amer. Math. Soc., **129** (2000), №8, 2273–2275.
2. J. Jachymski, M. Lindner, S. Lindner, *On Cauchy type characterizations of continuity and Baire one functions*, Real Anal. Exchange, **30** (2004/05), №1, 339–346.
3. D. Lecomte, *How we can recover Baire class one functions?* Mathematika, **50** (2003), №1-2, 171–198.
4. D.N. Sarkhel, *Baire one functions*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, **31** (2003), №2, 143–149.
5. D. Zhao, *Functions whose composition with Baire class one functions are Baire class one*, Soochow J. Math., **33** (2007), №4, 543–551.
6. K. Kuratowski, Topology, V.1, New York, London, Warszawa, 1966.
7. R. Hansell, *Borel measurable mappings for nonseparable metric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **161** (1971), 145–168.
8. L. Veselý, *Characterization of Baire-one functions between topological spaces*, Acta Univ. Carol., Math. Phys., **33** (1992), №2, 143–156.
9. O.O. Karlova, *The decomposable and the ambiguous sets*, Carpathian Math. Publications, **3** (2011), №2, 71–76. (in Ukrainian)
10. T. Banakh, B. Bokalo, *On scatteredly continuous maps between topological spaces*, Topology Appl., **157** (2010), №1, 108–122.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Maslenizza.ua@gmail.com

Надійшло 16.05.2012