УДК 519.218.31

К. Ю. Жерновий

СИСТЕМИ ТИПУ $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ З ЧАСОМ ОБСЛУГОВУВАННЯ, ЗАЛЕЖНИМ ВІД ДОВЖИНИ ЧЕРГИ

K. Yu. Zhernovyi. *The* $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ *queues with the time of service, depending on the length of the queue*, Mat. Stud. **38** (2012), 93–105.

We study the $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ queue with the time of service, depending on the length of the queue at the service initiation. By using Korolyuk's potential method, we derive the average duration of the busy time and the stationary distribution of the number of customers in such a system. Similar results for the $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1$ queue with one threshold of switching of service modes are obtained.

К. Ю. Жерновый. *Системы типа* $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ *с временем обслуживания, зависимым от длины очереди* // Мат. Студії. – 2012. – Т.38, №1. – С.93–105.

Изучена система $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, в которой время обслуживания зависит от длины очереди и определяется в момент начала обслуживания заявки. С помощью метода потенциала Королюка определена средняя продолжительность периода занятости и стационарное распределение числа заявок в системе. Аналогичные результаты получены для системы $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1$ с одним порогом переключения режимов обслуживания.

1. Вступ. Моделі систем обслуговування, в яких інтенсивність обслуговування цілеспрямовано змінюється разом з довжиною черги, а замовлення надходять групами, часто використовуються для вивчення телекомунікаційних процесів, зокрема процесів передавання даних у мережах ATM з використанням технологій мультиплексування ([1, 2]). Ми вивчимо систему $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, в якій час обслуговування кожного замовлення визначається за правилом: якщо в момент початку обслуговування цього замовлення у системі перебуває n замовлень, то його часу обслуговування відповідає функція розподілу $F_n(x)$. Аналогічна модель зміни інтенсивності обслуговування розглядалась у статті [2], у якій система $\mathrm{M}/\mathrm{D}/1/\mathrm{m}$ використана для моделювання процесу передавання голосових пакетів за допомогою мультиплексора. Огляд результатів, отриманих для систем обслуговування з часом обслуговування, залежним від довжини черги, можна знайти в [3]. У статті [4], найближчій за постановкою задачі до наших досліджень, за допомогою марковської теорії відновлення для системи $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1$, у якій функція розподілу часу обслуговування $F_n(x)$ визначається відповідно до кількості n замовлень у системі в момент початку обсуговування кожного замовлення, записано алгебраїчну систему рівнянь для стаціонарних ймовірностей, які відповідають моментам завершення обслуговування замовлень. Розв'язки цієї доволі громіздкої системи, для яких не наведено явних формул, необхідно перерахувати за допомогою рекурентних співвідношень для

2010 *Mathematics Subject Classification:* 60K20, 60K25.
Keywords: $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ queue, queue length dependent service time, stationary distribution of the number of customers.

отримання стаціонарного розподілу, який відповідає довільним моментам часу ($t \to \infty$). Разом з тим, як зазначено у статті [2], для дослідження процесів передавання даних з використанням мультиплексора важливо дослідити систему зі скінченним буфером.

На відміну від праці [4], ми вивчимо систему $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ зі скінченним буфером (з обмеженою чергою), для якої визначимо середню тривалість періоду зайнятості і отримаємо зручні для числової реалізації формули для стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі та її стаціонарних характеристик. Аналогічні результати одержимо для системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1$ з одним порогом перемикання режимів обслуговування.

Метод потенціалу розроблений В. С. Королюком ([5]) для неперервних знизу випадкових блукань і застосовувався його учнями в модифікованому вигляді ([6–9]) для аналізу систем M/G/1 та $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1$ як з обмеженою, так і з необмеженою чергою.

У статтях [10, 11] методом потенціалу досліджено системи типу $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ та $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1$ з пороговим блокуванням вхідного потоку та перемиканням режимів обслуговування (r порогів перемикання: $h_1 < h_2 < \cdots < h_r$). Блокування потоку замовлень здійснюється під час обслуговування кожного чергового замовлення, для якого кількість замовлень у системі в момент початку його обслуговування, перевищує заданий пороговий рівень $h = h_1$.

2. Опис моделі та основні позначення. Розглянемо систему обслуговування типу $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$. Нехай задані послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{\alpha_i\}$, $\{\theta_i\}$, $\{\beta_{in}\}$ ($i, n \in \mathbb{N}$), де α_i — час між надходженням $(i-1)$–ої та i–ої групи замовлень, θ_i — кількість замовлень в i–ій групі, а β_{in} — час обслуговування i–го замовлення, якщо в момент початку його обслуговування в системі перебуває n замовлень. Вважаємо, що $\mathbf{P}\{\alpha_i < x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ ($\lambda > 0$), $\mathbf{P}\{\theta_i = n\} = a_n$ ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$).

Якщо $\xi(t)$ — кількість замовлень у системі в момент часу t, і в момент початку обслуговування i–го замовлення $\xi(t) = n$, то $\mathbf{P}\{\beta_{in} < x\} = F_n(x)$ ($x \geq 0$), $F_n(0) = 0$ ($n \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$). Позначимо описану систему обслуговування через

$$\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_{\mathrm{m+1}}/1/\mathrm{m}.$$

Замовлення обслуговуються по одному, виконане замовлення покидає систему, і пристрій, що обслуговує систему, негайно починає обслуговувати замовлення з черги за її наявності або чекає надходження чергової групи замовлень. Застосовується дисципліна обслуговування FIFO. Черга всередині однієї групи замовлень може бути організована довільно. Максимальна кількість замовлень, які одночасно можуть перебувати у черзі, не може перевищувати числа m.

Позначимо через $\mathbf{P}_n$ умовну ймовірність за умови, що в початковий момент часу в системі перебуває $n \in \mathbb{Z}_+$ замовлень, і через $\mathbf{M}(\mathbf{P})$ умовне математичне сподівання (умовну ймовірність) за умови, що система починає працювати в момент надходження першої групи замовлень.

Введемо такі позначення: $\eta(x)$ — кількість замовлень, які надійшли в систему на проміжку часу $[0; x)$; a_n^{k*} — k–кратна згортка послідовності a_n;

$$f_n(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_n(x), \;\; M_n = \int_0^\infty x dF_n(x) < \infty, \;\; \overline{F}_n(x) = 1 - F_n(x);$$
$$\alpha(z) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} z^k a_k; \;\; \overline{a}_n = \sum\nolimits_{k=n}^{\infty} a_k; \;\; \overline{p}_n = \sum\nolimits_{k=n}^{\infty} p_k; \;\; \overline{q}_n = \sum\nolimits_{k=n}^{\infty} q_k; \;\; b_1 = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} k a_k;$$

$$p_{ni} = \int_0^\infty \mathbf{P}\{\eta(x) = i+1\} dF_n(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dF_n(x) \quad (i \geq -1); \tag{1}$$

$$q_{ni} = \int_0^\infty \mathbf{P}\{\eta(x) = i\} \overline{F}_n(x) dx = \sum\nolimits_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \overline{F}_n(x) dx \quad (i \geq 0). \tag{2}$$

Зауважимо, що для кожного $n \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$ маємо $\sum_{i=-1}^\infty p_{ni} = 1$, тому послідовність p_{ni} можна інтерпретувати як розподіл стрибків напівнеперервного знизу випадкового блукання. Потенціал цього блукання визначимо рівністю

$$\sum\nolimits_{k=1}^\infty z^k R_{nk} = \frac{z}{f_n\big(\lambda(1-\alpha(z))\big) - z}, \ |z| < \min\{1, \nu_n\},$$

де ν_n — єдиний корінь рівняння $f_n\big(\lambda(1-\alpha(z))\big) = z$ на проміжку $[0; 1]$. Враховуючи, що

$$\sum\nolimits_{k=0}^\infty z^k q_{nk} = \frac{1 - f_n\big(\lambda(1-\alpha(z))\big)}{\lambda(1-\alpha(z))},$$

одержимо рівності

$$\sum\nolimits_{k=0}^\infty q_{nk} = M_n. \tag{3}$$

Послідовності q_{nk} та R_{nk} можна обчислити за допомогою рекурентних співвідношень ([8])

$$q_{n0} = \frac{1 - f_n(\lambda)}{\lambda}, \ q_{nk} = \sum\nolimits_{i=1}^k a_i q_{n,k-i} - \frac{p_{n,k-1}}{\lambda} \quad (k \in \mathbb{N}); \tag{4}$$

$$R_{n1} = \frac{1}{p_{n,-1}}, \ R_{n,k+1} = \frac{R_{nk} - \sum_{i=0}^{k-1} p_{ni} R_{n,k-i}}{p_{n,-1}} \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{5}$$

3. Період зайнятості та стаціонарний розподіл. Нехай $\tau(m) = \inf\{t \geq 0 \colon \xi(t) = 0\}$ позначає перший період зайнятості для системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_{\mathrm{m+1}}/1/\mathrm{m}$;

$$\varphi_n(t,k) = \mathbf{P}_n\{\xi(t) = k, \tau(m) > t\}, \ \Phi_n(k) = \int_0^\infty \varphi_n(t,k) dt \ (n \in \mathbb{N}, k \in \{1, 2, \ldots, m+1\}).$$

Очевидно, що $\varphi_0(t,k) = 0$. За допомогою формули повної ймовірності одержимо рівності

$$\begin{aligned}\varphi_n(t,k) &= \sum\nolimits_{j=0}^{m-n} \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) = j\} \varphi_{n+j-1}(t-x,k) dF_n(x) + \\ &+ \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) \geq m+1-n\} \varphi_m(t-x,k) dF_n(x) + \big(P\{\eta(t) = k-n\} + \\ &+ I\{k = m+1\} \mathbf{P}\{\eta(t) \geq m+2-n\}\big) \overline{F}_n(t) \quad (1 \leq n \leq m).\end{aligned} \tag{6}$$

Тут $I\{A\}$ дорівнює 1 або 0, залежно від того, відбулась подія A чи ні.

Ввівши позначення $f_{(n)}(k) = q_{n,k-n} + I\{k = m+1\} \overline{q}_{n,m+2-n}$, і враховуючи співвідношення (1) і (2), з (6) отримаємо систему рівнянь для визначення функцій $\Phi_n(k)$

$$\Phi_n(k) = \sum\nolimits_{j=0}^{m-n} p_{n,j-1}(s) \Phi_{n+j-1}(k) + \overline{p}_{n,m-n} \Phi_m(k) + f_{(n)}(k) \quad (1 \leq n \leq m), \tag{7}$$

з граничною умовою

$$\Phi_0(k) = 0. \tag{8}$$

Знайдемо функції $\Phi_n(k)$, розв'язавши систему рівнянь (7), (8).

Теорема 1. *Для всіх* $k \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$ *функції* $\Phi_n(k)$ *визначаються у вигляді*

$$\Phi_n(k) = \Phi_m(k) - \sum\nolimits_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni} f_{(n+i)}(k) \quad (n \in \{1, 2, \ldots, m-1\}), \tag{9}$$

де

$$\Phi_m(k) = R_{1,1}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{m-1} \mathcal{R}_{1i} f_{(i+1)}(k) - \sum\nolimits_{j=1}^{m-1} p_{1,j-1} \sum\nolimits_{i=1}^{m-j} \mathcal{R}_{ji} f_{(j+i)}(k) + f_{(1)}(k)\right), \tag{10}$$

а для сталих $\mathcal{R}_{ni}$ *виконуються такі рекурентні співвідношення*

$$\mathcal{R}_{n,1} = R_{n+1,1};$$
$$\mathcal{R}_{n,j+1} = p_{n+1,-1} R_{n+1,2} \mathcal{R}_{n+1,j} - R_{n+1,1} \sum\nolimits_{i=1}^{j-1} p_{n+1,i} \mathcal{R}_{n+1+i,j-i}, \tag{11}$$

де $j \in \mathbb{N}, n \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$.

Доведення. Для доведення рівностей (9) застосуємо метод математичної індукції. Рівняння (7) для $n = m$ набуває вигляду $\Phi_m(k) = p_{m,-1}\Phi_{m-1}(k) + \overline{p}_{m,0}\Phi_m(k) + f_{(m)}(k)$, звідки, враховуючи, що $1 - \overline{p}_{m,0} = p_{m,-1} = 1/R_{m,1}$, отримуємо

$$\Phi_{m-1}(k) = \Phi_m(k) - R_{m,1} f_{(m)}(k) = \Phi_m(k) - \mathcal{R}_{m-1,1} f_{(m)}(k),$$

що збігається з (9) для $n = m-1$.

Припустимо, що рівності (9) виконуються для всіх n ($n \in \{2, 3, \ldots, m-1\}$). Доведемо (9) для $\Phi_{n-1}(k)$. З (7) маємо

$$\Phi_n(k) = p_{n,-1}\Phi_{n-1}(k) + p_{n,0}\Phi_n(k) + \sum\nolimits_{j=2}^{m-n} p_{n,j-1}\Phi_{n+j-1}(k) + \overline{p}_{n,m-n}\Phi_m(k) + f_{(n)}(k).$$

Звідси

$$\Phi_{n-1}(k) = R_{n,1}\Big((1 - p_{n,0})\Phi_n(k) - \sum\nolimits_{j=2}^{m-n} p_{n,j-1}\Phi_{n+j-1}(k) - \overline{p}_{n,m-n}\Phi_m(k) -$$
$$- f_{(n)}(k)\Big) = R_{n,1}\Big((1 - p_{n,0})\Big(\Phi_m(k) - \sum\nolimits_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni} f_{(n+i)}(k)\Big) -$$
$$- \sum\nolimits_{j=2}^{m-n} p_{n,j-1}\Big(\Phi_m(k) - \sum\nolimits_{i=1}^{m-n-j+1} \mathcal{R}_{n+j-1,i} f_{(n+j-1+i)}(k)\Big) - \overline{p}_{n,m-n}\Phi_m(k) - f_{(n)}(k)\Big) =$$
$$= \Phi_m(k) - p_{n,-1}R_{n,2}\sum\nolimits_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni} f_{(n+i)}(k) + R_{n,1}\sum\nolimits_{j=2}^{m-n} p_{n,j-1} \times$$
$$\times \sum\nolimits_{i=1}^{m-n-j+1} \mathcal{R}_{n+j-1,i} f_{(n+j-1+i)}(k) - \mathcal{R}_{n-1,1} f_{(n)}(k) =$$
$$= \Phi_m(k) - p_{n,-1}R_{n,2}\sum\nolimits_{i=2}^{m-n+1} \mathcal{R}_{n,i-1} f_{(n-1+i)}(k) + R_{n,1}\Big(p_{n,1}\sum\nolimits_{i=1}^{m-n-1} \mathcal{R}_{n+1,i} f_{(n+1+i)}(k) +$$
$$+ p_{n,2}\sum\nolimits_{i=1}^{m-n-2} \mathcal{R}_{n+2,i} f_{(n+2+i)}(k) + \cdots + p_{n,m-n-1}\mathcal{R}_{m-1,1} f_{(m)}(k)\Big) - \mathcal{R}_{n-1,1} f_{(n)}(k) =$$
$$= \Phi_m(k) - \sum\nolimits_{i=2}^{m-n+1}\Big(p_{n,-1}R_{n,2}\mathcal{R}_{n,i-1} - R_{n,1}\sum\nolimits_{j=1}^{i-2} p_{nj}\mathcal{R}_{n+j,i-1-j}\Big) f_{(n-1+i)}(k) -$$
$$- \mathcal{R}_{n-1,1} f_{(n)}(k) = \Phi_m(k) - \sum\nolimits_{i=1}^{m-n+1} \mathcal{R}_{n-1,i} f_{(n-1+i)}(k),$$

що збігається з (9), якщо там замінити n на $n-1$. Отже, рівності (9) доведено. Одночасно ми переконалися у справедливості співвідношень (11), позначивши через $\mathcal{R}_{n-1,i}$ коефіцієнти біля $f_{(n-1+i)}(k)$ у сумі $\sum_{i=1}^{m-n+1} \mathcal{R}_{n-1,i} f_{(n-1+i)}(k)$.

Для виведення формули (10) досить покласти $n = 1$ в (7) і в (9), використати граничну умову (8), прирівняти одержані з (7) і (9) вирази для $\Phi_1(k)$, виключити всі $\Phi_i(k)$ $(i \in \{2, 3, \ldots, m-1\})$ за допомогою (9) і розв'язати отримане рівняння відносно $\Phi_m(k)$. □

Якщо система починає працювати в момент надходження першої групи замовлень, то для всіх $k \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$ за допомогою формули повної ймовірності отримаємо такі рівності

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi(t) = k, \tau(m) > t\}dt = \sum\nolimits_{n=1}^{m} a_n \Phi_n(k) + \overline{a}_{m+1}\Phi_{m+1}(k). \tag{12}$$

Враховуючи, що

$$\varphi_{m+1}(t,k) = \int_0^t \varphi_m(t-x,k)dF_{m+1}(x) + I\{k = m+1\}\overline{F}_{m+1}(t);$$
$$\Phi_{m+1}(k) = \Phi_m(k) + I\{k = m+1\}M_{m+1},$$

і використовуючи співвідношення (9), можемо детально розписати праву частину (12)

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi(t) = k, \tau(m) > t\}dt = \Phi_m(k) - \sum\nolimits_{n=1}^{m-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni} f_{(n+i)}(k) +$$
$$+ \overline{a}_{m+1} I\{k = m+1\}M_{m+1}. \tag{13}$$

Для відшукання $\int_0^\infty \mathbf{P}\{\tau(m) > t\}dt = \mathbf{M}\,\tau(m)$ необхідно додати всі рівності (13) для k від 1 до $m+1$. Враховуючи (3), неважко переконатись, що

$$\sum\nolimits_{k=1}^{m+1} f_{(n)}(k) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} q_{nk} = M_n \quad (1 \in \{1, 2, \ldots, m\}).$$

Отже, з (13) і (10) випливає таке твердження.

Теорема 2. *Середня тривалість періоду зайнятості системи* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_{m+1}/1/\mathrm{m}$ *визначається у вигляді*

$$\mathbf{M}\,\tau(m) = R_{1,1}\left(M_1 + \sum\nolimits_{i=1}^{m-1} \mathcal{R}_{1i} M_{i+1} - \sum\nolimits_{j=1}^{m-1} p_{1,j-1} \sum\nolimits_{i=1}^{m-j} \mathcal{R}_{ji} M_{j+i}\right) +$$
$$+ \overline{a}_{m+1} M_{m+1} - \sum\nolimits_{n=1}^{m-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni} M_{n+i}. \tag{14}$$

Для виведення формул для стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_{m+1}/1/\mathrm{m}$ позначимо через $\tau_i(m)$ $(i \in \mathbb{Z}_+)$, $\tau_0(m) = 0$, послідовні моменти часу звільнення системи від замовлень. Зрозуміло, що $\tau_1(m) = \tau(m)$. Нехай ξ_i $(i \in \mathbb{Z}_+)$, $\xi_0 = 0$ — послідовні інтервали простою системи після моментів $\tau_i(m)$ до часу прибуття чергової групи замовлень. Очевидно, що ξ_i — показниково розподілені випадкові величини з параметром λ, і моменти $\xi_i + \tau_i(m)$ $(i \in \mathbb{Z}_+)$ утворюють процес відновлення. Використовуючи функцію відновлення, що відповідає цьому процесу, та вузлову теорему відновлення (див. доведення теореми 2 статті [10]), обчислимо границі

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\xi(t) = k\} = \frac{\lambda}{1 + \lambda\,\mathbf{M}\,\tau(m)} \int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi(u) = k, \tau(m) \geq u\}du \quad (k \in \{1, 2, \ldots, m+1\});$$
$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\xi(t) = 0\} = \frac{\lambda}{1 + \lambda\,\mathbf{M}\,\tau(m)} \int_0^\infty \mathbf{P}\{\tau(m) < u, \tau(m) + \xi_1 \geq u\}du = \frac{1}{1 + \lambda\,\mathbf{M}\,\tau(m)}. \tag{15}$$

З (15) і (13) після нескладних перетворень отримуємо таке твердження.

Теорема 3. *Стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\dots,\mathrm{G}_{\mathrm{m+1}}/1/\mathrm{m}$ *визначається за формулами*

$$\rho_0(m)=\frac{1}{1+\lambda\,\mathbf{M}\,\tau(m)};\quad \rho_k(m)=\frac{\lambda}{1+\lambda\,\mathbf{M}\,\tau(m)}\Big(R_{1,1}\Big(q_{1,k-1}+\sum\nolimits_{i=1}^{k-1}\mathcal{R}_{1i}q_{i+1,k-i-1}-$$
$$-\sum\nolimits_{j=1}^{k-1}p_{1,j-1}\sum\nolimits_{i=1}^{k-j}\mathcal{R}_{ji}q_{j+i,k-j-i}\Big)-\sum\nolimits_{n=1}^{k-1}a_n\sum\nolimits_{i=1}^{k-n}\mathcal{R}_{ni}q_{n+i,k-n-i}\Big),\tag{16}$$

де $k\in\{1,2,\dots,m\}$.

$$\rho_{m+1}(m)=\frac{\lambda}{1+\lambda\,\mathbf{M}\,\tau(m)}\Big(R_{1,1}\Big(\overline{q}_{1,m}+\sum\nolimits_{i=1}^{m-1}\mathcal{R}_{1i}\overline{q}_{i+1,m-i}-\sum\nolimits_{j=1}^{m-1}p_{1,j-1}\times$$
$$\times\sum\nolimits_{i=1}^{m-j}\mathcal{R}_{ji}\overline{q}_{j+i,m+1-j-i}\Big)-\sum\nolimits_{n=1}^{m-1}a_n\sum\nolimits_{i=1}^{m-n}\mathcal{R}_{ni}\overline{q}_{n+i,m+1-n-i}+\overline{a}_{m+1}M_{m+1}\Big).$$

4. Визначення стаціонарних характеристик. Для системи з обмеженою чергою та груповим надходженням замовлень деякі замовлення, які прибувають у момент часу, коли вхідний потік не блокується, можуть бути втрачені (якщо сумарна кількість замовлень перевищує число $m+1$). Тому, якщо $a_1<1$, то для нашої системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\dots,\mathrm{G}_{\mathrm{m+1}}/1/\mathrm{m}$ формула $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)=1-\rho_{m+1}(m)$ для обчислення ймовірності обслуговування невірна.

Спираючись на властивість ергодичності процесу, який описує зміну кількості замовлень у системі, формулу для $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)$ одержимо як відношення N_{sv}/N. Тут $N=\lambda b_1$ — середня кількість замовлень, які прибувають на вхід системи за одиницю часу, а $N_{\mathrm{sv}}=\big(1-\rho_0(m)\big)/\overline{M}$ — середня кількість обслужених замовлень за одиницю часу, де $\overline{M}$ — середній час обслуговування одного замовлення, який можна визначити за формулою

$$\frac{1}{\overline{M}}=\frac{1}{\mathbf{M}\,\tau(m)}\sum\nolimits_{n=1}^{m+1}\frac{\mathbf{M}\,\omega_n(m)}{M_n}.$$

Тут $\mathbf{M}\,\omega_n(m)$ — середня тривалість частини періоду зайнятості, якій відповідає функція розподілу $F_n(x)$ часу обслуговування одного замовлення. Використовуючи співвідношення (14) для $\mathbf{M}\,\tau(m)$, отримаємо таку формулу для ймовірності обслуговування

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)=\frac{1}{b_1\big(1+\lambda\,\mathbf{M}\,\tau(m)\big)}\Big(R_{1,1}\Big(1+\sum\nolimits_{i=1}^{m-1}\mathcal{R}_{1i}-\sum\nolimits_{j=1}^{m-1}p_{1,j-1}\sum\nolimits_{i=1}^{m-j}\mathcal{R}_{ji}\Big)+$$
$$+\overline{a}_{m+1}-\sum\nolimits_{n=1}^{m-1}a_n\sum\nolimits_{i=1}^{m-n}\mathcal{R}_{ni}\Big).\tag{17}$$

Стаціонарні характеристики черги — середню довжину черги $\mathbf{M}\,Q(m)$ і середній час очікування $\mathbf{M}\,w(m)$ знаходимо за формулами

$$\mathbf{M}\,Q(m)=\sum\nolimits_{k=1}^{m}k\rho_{k+1}(m);\quad \mathbf{M}\,w(m)=\frac{\mathbf{M}\,Q(m)}{\lambda b_1\,\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)}.\tag{18}$$

Приклад 1. Припустимо, що $m=4$, $\lambda=2$, замовлення можуть надходити групами кількістю від одного до п'яти з ймовірностями $a_i=0,2$ $(i\in\{1,2,\dots,5\})$, а час обслуговування визначається відповідно до кількості замовлень n у системі на початок обслуговування замовлення і розподілений рівномірно на проміжках $[0,2]$ $(n=1)$; $[0,1]$

$(n = 2)$; $[0; 0,5]$ $(n = 3)$; $[0; 0,25]$ $(n = 4)$; $[0; 0,125]$ $(n = 5)$ відповідно. Отже, $M_1 = 1$; $M_2 = 0,5$; $M_3 = 0,25$; $M_4 = = 0,125$; $M_5 = 0,0625$; $b_1 = 3$. Ввівши позначення

$$S_{ni} = \frac{1}{2\lambda M_n}\left(1 - \sum\nolimits_{k=0}^{i} \frac{(2\lambda M_n)^k}{k!} e^{-2\lambda M_n}\right), \ n \in \mathbb{N}, \ i \in \mathbb{Z}_+,$$

за формулами (1) отримуємо

$$p_{n,-1} = S_{n0}, \quad p_{n0} = a_1 S_{n1}, \quad p_{n1} = a_1^2 S_{n2} + a_2 S_{n1}, \quad p_{n2} = a_1^3 S_{n3} + 2a_1 a_2 S_{n2} + a_3 S_{n1}.$$

Тепер можна скористатися рівностями (2) (або (4)), (5) і (11) для обчислення q_{ni}, R_{ni} та $\mathcal{R}_{ni}$.

Середня тривалість періоду зайнятості $\mathbf{M}\,\tau(m)$, знайдена за формулою (14), становить 13,517.

У стрічці “$\rho_k(m)$” табл. 1 записано ймовірності $\rho_k(m)$, обчислені за формулами (16). У цій же таблиці для порівняння наведено значення відповідних ймовірностей, отриманих за допомогою системи імітаційного моделювання GPSS World ([12]) для значення часу $t = 100\,000$. Значення стаціонарних характеристик системи, знайдені за формулами (17) і (18), а також за допомогою GPSS World, наведено у табл. 2.

Таблиця 1

Стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі ($\mathbf{m = 4}$).

Кількість замовлень (k)	0	1	2	3	4	5
$\rho_k(m)$	0,0357	0,1097	0,1975	0,2017	0,1540	0,3014
$\rho_k(m)$ (GPSS World, $t = 10^5$)	0,0370	0,1136	0,1955	0,1986	0,1525	0,3028

Таблиця 2

Стаціонарні характеристики системи ($\mathbf{m = 4}$).

Характеристика	$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)$	$\mathbf{M}\,Q(m)$	$\mathbf{M}\,w(m)$
Аналітичне значення	0,4756	2,2687	0,7951
Значення згідно з GPSS World ($t = 10^5$)	0,4710	2,2610	0,8030

5. Стаціонарний розподіл для системи з одним порогом. Розглянемо частковий випадок системи обслуговування $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_{\mathrm{m}+1}/1/\mathrm{m}$, для якої час обслуговування визначається в момент початку обслуговування замовлення і залежить від співвідношення між кількістю замовлень у системі та заданим пороговим рівнем h $(h \in \{1, 2, \ldots, m-1\})$.

Нехай $\xi(t)$ — кількість замовлень у системі в момент часу t, а β_i — час обслуговування i–го замовлення. Якщо t — момент початку обслуговування i–го замовлення, і $\xi(t) \le h$, то $\mathbf{P}\{\beta_i < x\} = F(x)$ $(x \ge 0)$, $F(0) = 0$. Якщо ж $\xi(t) > h$, то $\mathbf{P}\{\beta_i < x\} = \widetilde{F}(x)$ $(x \ge 0)$, $\widetilde{F}(0) = 0$. Позначимо описану систему обслуговування через $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$. Поклавши $F_n(x) = F(x)$ $(n \in \{1, 2, \ldots, h\})$, $F_n(x) = \widetilde{F}(x)$ $(n \in \{h+1, h+2, \ldots, m+1\})$, бачимо, що ця система є частковим випадком системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_{\mathrm{m}+1}/1/\mathrm{m}$.

Отже, твердження теорем 1–3 переносяться на випадок системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$, якщо у відповідних формулах підставити

$$
\begin{gathered}
f_n(s) = f(s), \quad M_n = M, \quad p_{ni} = p_i, \quad q_{ni} = q_i, \quad R_{ni} = R_i, \\
f_{(n)}(k) = f_n(k) = q_{k-n} + I\{k = m+1\}\overline{q}_{m+2-n} \quad (n =\in \{1, 2, \ldots, h\}); \\
f_n(s) = \widetilde{f}(s), \quad M_n = \widetilde{M}, \quad p_{ni} = \widetilde{p}_i, \quad q_{ni} = \widetilde{q}_i, \quad R_{ni} = \widetilde{R}_i, \\
f_{(n)}(k) = \widetilde{f}_n(k) = \widetilde{q}_{k-n} + I\{k = m+1\}\overline{\widetilde{q}}_{m+2-n} \quad (n \in \{h+1, h+2, \ldots, m+1\}).
\end{gathered}
$$

Нижче ми отримаємо формули для $\mathbf{M}\,\tau(m)$ та стаціонарного розподілу $\rho_k(m)$ ($k \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$) у вигляді, зручному для перходу до границі при $m \to \infty$.

Для системи обслуговування $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$ система рівнянь (7) для визначення функцій $\Phi_n(k)$ набуває вигляду

$$
\Phi_n(k) = \sum\nolimits_{j=0}^{m-n} p_{j-1}\Phi_{n+j-1}(k) + \overline{p}_{m-n}\Phi_m(k) + f_n(k) \quad (n \in \{1, 2, \ldots, h\}), \tag{19}
$$

$$
\Phi_n(k) = \sum\nolimits_{j=0}^{m-n} \widetilde{p}_{j-1}\Phi_{n+j-1}(k) + \overline{\widetilde{p}}_{m-n}\Phi_m(k) + \widetilde{f}_n(k) \quad (n \in \{h+1, h+2, \ldots, m\}). \tag{20}
$$

Розглянемо (20) як поки що окрему систему рівнянь відносно функцій $\Phi_n(k)$ ($n \in \{h, h+1, \ldots, m\}$). Її розв'язки, використовуючи теорему 2 статті [7] про розв'язки рівняння на відрізку, можна записати у вигляді

$$
\Phi_n(k) = \Phi_m(k) - \sum\nolimits_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i \widetilde{f}_{n+i}(k) \quad (n \in \{h, h+1, \ldots, m\}). \tag{21}
$$

Систему рівнянь (19) запишемо так

$$
\Phi_n(k) - \sum\nolimits_{j=-1}^{h-n-1} p_j\Phi_{n+j}(k) = \sum\nolimits_{j=h-n}^{m-n-1} p_j\Phi_{n+j}(k) + \overline{p}_{m-n}\Phi_m(k) + f_n(k) \quad (1 \le n \le h). \tag{22}
$$

Використовуючи знову теорему 2 ([7]), з (22) для $n \in \{1, 2, \ldots, h\}$ отримаємо

$$
\Phi_n(k) = R_{h-n}\Phi_h(k) - \sum\nolimits_{i=1}^{h-n} R_i\Big(\sum\nolimits_{j=h}^{m-1} p_{j-n-i}\Phi_j(k) + \overline{p}_{m-n-i}\Phi_m(k) + f_{n+i}(k)\Big). \tag{23}
$$

Виразивши за допомогою (21) всі $\Phi_n(k)$ для $n \in \{h, h+1, \ldots, m-1\}$ і підставивши їх у (23), одержимо співвідношення

$$
\Phi_n(k) = \Phi_m(k) - D_n(k) \quad (n \in \{1, 2, \ldots, h-1\}), \tag{24}
$$

де

$$
\begin{gathered}
D_n(k) = p_{-1}R_{h+1-n}\sum\nolimits_{i=1}^{m-h} \widetilde{R}_i\widetilde{f}_{h+i}(k) - \\
- \sum\nolimits_{u=1}^{h-n} R_u \sum\nolimits_{j=h+1}^{m-1} p_{j-n-u} \sum\nolimits_{i=1}^{m-j} \widetilde{R}_i\widetilde{f}_{j+i}(k) + \sum\nolimits_{i=1}^{h-n} R_i f_{n+i}(k).
\end{gathered}
$$

Поклавши в (24) $n = 0$, за допомогою граничної умови (8) знайдемо

$$
\Phi_m(k) = D_0(k). \tag{25}
$$

Отже, рівності (21), (24) і (25) визначають функції $\Phi_n(k)$ ($n \in \{1, 2, \ldots, m\}$) для системи обслуговування $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$. Використовуючи ці функції і міркуючи так само, як у доведеннях теорем 2 і 3, одержимо таке твердження.

Теорема 4. *Середня тривалість періоду зайнятості та стаціонарний розподіл кількості замовлень для системи* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G},\widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$ *визначаються у вигляді*

$$\mathbf{M}\,\tau(m) = M\left(\sum\nolimits_{i=1}^{h} R_i - \sum\nolimits_{n=1}^{h-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{h-n} R_i\right) + \widetilde{M}\left(p_{-1}R(h)\sum\nolimits_{i=1}^{m-h}\widetilde{R}_i - \right.$$
$$\left. - \sum\nolimits_{j=h+1}^{m-1} r_j(h)\sum\nolimits_{i=1}^{m-j}\widetilde{R}_i - \sum\nolimits_{n=h}^{m-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i + \overline{a}_{m+1}\right), \tag{26}$$
$$\rho_0(m) = \frac{1}{1+\lambda\,\mathbf{M}\,\tau(m)};$$
$$\rho_k(m) = \frac{\lambda}{1+\lambda\,\mathbf{M}\,\tau(m)}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum\nolimits_{n=1}^{k-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i}\right) \quad (k\in\{1,2,\dots,h\});$$
$$\rho_k(m) = \frac{\lambda}{1+\lambda\,\mathbf{M}\,\tau(m)}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{h} R_i q_{k-i} - \sum\nolimits_{n=1}^{h-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{h-n} R_i q_{k-n-i} + \right.$$
$$+ p_{-1}R(h)\sum\nolimits_{i=1}^{k-h}\widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-h-i} - \sum\nolimits_{j=h+1}^{k-1} r_j(h)\sum\nolimits_{i=1}^{k-j}\widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-j-i} -$$
$$\left. - \sum\nolimits_{n=h}^{k-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{k-n}\widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-n-i}\right) \quad (k\in\{h+1,h+2,\dots,m\}); \tag{27}$$
$$\rho_{m+1}(m) = \frac{\lambda}{1+\lambda\,\mathbf{M}\,\tau(m)}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{h} R_i \overline{q}_{m+1-i} - \sum\nolimits_{n=1}^{h-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{h-n} R_i \overline{q}_{m+1-n-i} + \right.$$
$$+ p_{-1}R(h)\sum\nolimits_{i=1}^{m-h}\widetilde{R}_i\overline{\widetilde{q}}_{m+1-h-i} - \sum\nolimits_{j=h+1}^{m-1} r_j(h)\sum\nolimits_{i=1}^{m-j}\widetilde{R}_i\overline{\widetilde{q}}_{m+1-j-i} -$$
$$\left. - \sum\nolimits_{n=h}^{m-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i\overline{\widetilde{q}}_{m+1-n-i} + \widetilde{M}\overline{a}_{m+1}\right),$$

де

$$R(h) = R_{h+1} - \sum\nolimits_{n=1}^{h-1} a_n R_{h+1-n};\ r_k(h) = \sum\nolimits_{i=1}^{h} R_i p_{k-i} - \sum\nolimits_{n=1}^{h-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{h-n} R_i p_{k-n-i}. \tag{28}$$

6. Система з одним порогом без обмежень на довжину черги. Розглянемо систему обслуговування $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G},\widetilde{\mathrm{G}}/1$, для якої знімається обмеження на довжину черги. Введемо позначення: $\rho = \lambda M b_1$, $\widetilde{\rho} = \lambda\widetilde{M} b_1$. Для послідовності $\{\widetilde{R}_n\}$ безпосередньо з теореми 1.5 ([8, с. 38]) випливає таке твердження.

Лема 1. *Якщо* $\widetilde{\rho} < 1$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{R}_n = \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}. \tag{29}$$

Якщо ж $\widetilde{\rho} \ge 1$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{R}_n = \infty$.

Лема 2. *Для послідовностей* $\{p_n\}$ *і* $\{a_n\}$ *виконуються граничні співвідношення*

$$\lim_{m\to\infty} m\overline{p}_m = \lim_{m\to\infty} m\overline{a}_m = 0. \tag{30}$$

Доведення. Відомо, що $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)p_k = \rho$, $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k = b_1$. Оскільки $m\overline{p}_m = \sum_{k=m}^{\infty} m p_k \le \sum_{k=m}^{\infty} k p_k$, то $\lim\limits_{m\to\infty} m\overline{p}_m = 0$, бо

$$\lim_{m\to\infty} m\overline{p}_m \le \lim_{m\to\infty}\sum_{k=m}^{\infty} k p_k = 0.$$

Аналогічно доводимо, що $\lim\limits_{m\to\infty} m\overline{a}_m = 0$. □

Лема 3. *Для послідовності (28) виконується рівність*

$$\sum\nolimits_{k=h+1}^{\infty} r_k(h) = p_{-1}R(h) - \overline{a}_h. \tag{31}$$

Доведення. Використовуючи рівності ([10])

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} R_k\overline{p}_{n-k} = R_n - 1 \ (n \in \mathbb{N}) \tag{32}$$

і співвідношення

$$\sum\nolimits_{k=1}^{h} R_k p_{n-k} = R_h - p_{-1}R_{h+1}, \tag{33}$$

яке випливає з (5), для послідовності (28) одержимо

$$\sum\nolimits_{k=h+1}^{\infty} r_k(h) = \sum\nolimits_{i=1}^{h} R_i\overline{p}_{h-i} - \sum\nolimits_{n=1}^{h-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{h-n} R_i\overline{p}_{h-n-i} - r_h(h) =$$
$$= R_h - 1 - \sum\nolimits_{n=1}^{h-1} a_n(R_{h-n} - 1) - R_h + p_{-1}R_{h+1} + \sum\nolimits_{n=1}^{h-1} a_n(R_{h-n} - p_{-1}R_{h+1-n}) =$$
$$= \sum\nolimits_{n=1}^{h-1} a_n - 1 + p_{-1}R_{h+1} - p_{-1}\sum\nolimits_{n=1}^{h-1} a_n R_{h+1-n} = p_{-1}R(h) - \overline{a}_h. \qquad \square$$

Лема 4. *Для послідовності* $r_k(h)$

$$\sum\nolimits_{k=h+1}^{\infty} k r_k(h) = (\rho - 1 + p_{-1})\sum\nolimits_{i=1}^{h} R_i\overline{a}_{h+1-i} + \sum\nolimits_{i=1}^{h} R_i\Big(i\overline{p}_{h+1-i} -$$
$$- \sum\nolimits_{k=1}^{h-i} kp_k\Big) - \sum\nolimits_{n=1}^{h-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{h-n} R_i\Big((n+i)\overline{p}_{h+1-n-i} - \sum\nolimits_{k=1}^{h-n-i} kp_k\Big). \tag{34}$$

Якщо $a_1 = 1$, *то*

$$\sum\nolimits_{k=h+1}^{\infty} k r_k(h) = 1 + (\rho - 1)R_h + hp_{-1}(R_{h+1} - R_h). \tag{35}$$

Доведення. Враховуючи, що $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)p_k = \rho$, матимемо

$$\sum\nolimits_{k=h+1}^{\infty} kp_{k-i} = \sum\nolimits_{k=h+1}^{\infty}(k-i+1)p_{k-i} + (i-1)\sum\nolimits_{k=h+1}^{\infty} p_{k-i} =$$
$$= \rho - \sum\nolimits_{k=0}^{h-i}(k+1)p_k + (i-1)\overline{p}_{h+1-i} = \rho - 1 + p_{-1} + i\overline{p}_{h+1-i} - \sum\nolimits_{k=1}^{h-i} kp_k. \tag{36}$$

Оскільки

$$\sum\nolimits_{k=h+1}^{\infty} k r_k(h) = \sum\nolimits_{i=1}^{h} R_i \sum\nolimits_{k=h+1}^{\infty} kp_{k-i} - \sum\nolimits_{n=1}^{h-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{h-n} R_i \sum\nolimits_{k=h+1}^{\infty} kp_{k-n-i},$$

то за допомогою (36) одержимо (34). Якщо $a_1 = 1$, то знову використовуючи рівності (32) і (33), з (34) отримаємо співвідношення (35). $\square$

Позначимо через $\tau(\infty) = \inf\{t \geq 0\colon \xi(t) = 0\}$ перший період зайнятості для системи $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1$, а через $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ його середню тривалість.

Теорема 5. *Якщо* $\widetilde{\rho} < 1$, *то*

$$\mathbf{M}\,\tau(\infty) = M \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i} + \frac{\widetilde{M}}{1-\widetilde{\rho}}\Big(b_1 - \sum_{k=1}^{h-1} k a_k - h p_{-1} R(h) + \\ +(\rho - 1 + p_{-1}) \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i} + \sum_{i=1}^{h} R_i \Big(i \overline{p}_{h+1-i} - \\ - \sum_{k=1}^{h-i} k p_k \Big) - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \Big((n+i) \overline{p}_{h+1-n-i} - \sum_{k=1}^{h-n-i} k p_k \Big) \Big). \qquad (37)$$

Якщо $\widetilde{\rho} < 1$ *і* $a_1 = 1$, *то*

$$\mathbf{M}\,\tau(\infty) = M R_h + \frac{\widetilde{M}}{1-\widetilde{\rho}}\Big(1 - (1-\rho) R_h \Big). \qquad (38)$$

Доведення. Виконаємо перетворення, які дадуть змогу перейти в (26) до границі при $m \to \infty$. Маємо

$$S(m) = p_{-1} R(h) \sum_{i=1}^{m-h} \widetilde{R}_i - \sum_{k=h+1}^{m-1} r_k(h) \sum_{i=1}^{m-k} \widetilde{R}_i - \sum_{n=h}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i = \\ = \sum_{k=0}^{m-h-1} \widetilde{R}_{m-h-k} \Big(p_{-1} R(h) - \sum_{i=h+1}^{h+k} r_i(h) - \sum_{n=h}^{h+k} a_n \Big) = \\ = \widetilde{R}_{m-h} \Big((m-h) p_{-1} R(h) - \sum_{k=h+1}^{m-1} (m-k) r_k(h) - \sum_{k=h}^{m-1} (m-k) a_k \Big) + \\ + \big(\widetilde{R}_{m-h} - \widetilde{R}_{m-h-1} \big) \big(r_{h+1}(h) + a_h + a_{h+1} - p_{-1} R(h) \big) + \\ + \big(\widetilde{R}_{m-h} - \widetilde{R}_{m-h-2} \big) \big(r_{h+1}(h) + r_{h+2}(h) + a_h + a_{h+1} + a_{h+2} - p_{-1} R(h) \big) + \\ + \ldots + \big(\widetilde{R}_{m-h} - \widetilde{R}_2 \big) \Big(\sum_{k=h+1}^{m-2} r_k(h) + \sum_{k=h}^{m-2} a_k - p_{-1} R(h) \Big) + \\ + \big(\widetilde{R}_{m-h} - \widetilde{R}_1 \big) \Big(\sum_{k=h+1}^{m-1} r_k(h) + \sum_{k=h}^{m-1} a_k - p_{-1} R(h) \Big). \qquad (39)$$

З рівностей (29) і (31) випливає, що всі доданки у сумі (39), крім першого, при $m \to \infty$ прямують до нуля, тобто

$$\lim_{m\to\infty} S(m) = \lim_{m\to\infty} \widetilde{R}_{m-h} \Big((m-h) p_{-1} R(h) - \sum_{k=h+1}^{m-1} (m-k) r_k(h) - \\ - \sum_{k=h}^{m-1} (m-k) a_k \Big) = \frac{1}{1-\widetilde{\rho}} \Big(b_1 - \sum_{k=1}^{h-1} k a_k - h p_{-1} R(h) + \sum_{k=h+1}^{\infty} k r_k(h) \Big) + \\ + \lim_{m\to\infty} m \widetilde{R}_{m-h} \Big(p_{-1} R(h) - \sum_{k=h+1}^{m-1} r_k(h) - \sum_{k=h}^{m-1} a_k \Big). \qquad (40)$$

Оскільки

$$p_{-1} R(h) - \sum_{k=h+1}^{m-1} r_k(h) - \sum_{k=h}^{m-1} a_k = p_{-1} R(h) - \sum_{k=h+1}^{\infty} r_k(h) - \\ - \overline{a}_h + \sum_{k=m}^{\infty} r_k(h) + \overline{a}_m = \sum_{k=m}^{\infty} r_k(h) + \overline{a}_m,$$

то використовуючи співвідношення (28)–(30), одержимо

$$\lim_{m\to\infty} m\widetilde{R}_{m-h}\left(p_{-1}R(h) - \sum\nolimits_{k=h+1}^{m-1} r_k(h) - \sum\nolimits_{k=h}^{m-1} a_k\right) =$$
$$= \frac{1}{1-\widetilde{\rho}} \lim_{m\to\infty} m\left(\sum\nolimits_{k=m}^{\infty} r_k(h) + \overline{a}_m\right) =$$
$$= \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{h} R_i \lim_{m\to\infty} m\overline{p}_{m-i} - \sum\nolimits_{n=1}^{h-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{h-n} R_i \lim_{m\to\infty} m\overline{p}_{m-n-i}\right) = 0.$$

Враховуючи (40), (34) і (35), після переходу до границі при $m \to \infty$ у рівності (26) отримаємо співвідношення (37) і (38). □

Теорема 6. *Якщо* $\widetilde{\rho} < 1$, *то стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G},\widetilde{\mathrm{G}}/1$ *визначається за формулами*

$$\rho_0(\infty) = \frac{1}{1+\lambda\,\mathbf{M}\,\tau(\infty)};$$
$$\rho_k(\infty) = \frac{\lambda}{1+\lambda\,\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum\nolimits_{n=1}^{k-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i}\right) \quad (k \in \{1,2,\ldots,h\});$$
$$\rho_k(\infty) = \frac{\lambda}{1+\lambda\,\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\Bigg(\sum\nolimits_{i=1}^{h} R_i q_{k-i} - \sum\nolimits_{n=1}^{h-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{h-n} R_i q_{k-n-i} +$$
$$+ p_{-1}R(h) \sum\nolimits_{i=1}^{k-h} \widetilde{R}_i \widetilde{q}_{k-h-i} -$$
$$- \sum\nolimits_{j=h+1}^{k-1} r_j(h) \sum\nolimits_{i=1}^{k-j} \widetilde{R}_i \widetilde{q}_{k-j-i} - \sum\nolimits_{n=h}^{k-1} a_n \sum\nolimits_{i=1}^{k-n} \widetilde{R}_i \widetilde{q}_{k-n-i}\Bigg) \qquad (k \in \{h+1, h+2, \ldots\}). \tag{41}$$

Доведення. Якщо $\widetilde{\rho} < 1$, то згідно з (37) $\mathbf{M}\,\tau(\infty) < \infty$, тому після граничного переходу при $m \to \infty$ у формулах (27) одержимо рівності (41). □

Приклад 2. Припустимо, що замовлення можуть надходити лише по одному або по двоє ($a_1 + a_2 = 1$), час обслуговування основного режиму розподілений рівномірно на проміжку $[a,b]$, а час обслуговування післяпорогового режиму розподілений за законом Ерланга другого порядку з параметром $\widetilde{\mu}$. Середні значення часу обслуговування становлять $M = (a+b)/2$ та $\widetilde{M} = 2/\widetilde{\mu}$ відповідно.

Ввівши позначення $S_n(a,b) = \frac{1}{\lambda(b-a)} \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(a\lambda)^k}{k!}e^{-a\lambda} - \frac{(b\lambda)^k}{k!}e^{-b\lambda}\right)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, за формулами (1) отримуємо

$$p_{-1} = S_0(a,b), \quad p_0 = a_1 S_1(a,b), \quad p_1 = a_1^2 S_2(a,b) + a_2 S_1(a,b);$$
$$p_2 = a_1^3 S_3(a,b) + 2a_1a_2 S_2(a,b), \quad p_3 = a_1^4 S_4(a,b) + 3a_1^2 a_2 S_3(a,b) + a_2^2 S_2(a,b);$$
$$p_4 = a_1^5 S_5(a,b) + 4a_1^3 a_2 S_4(a,b) + 3a_1 a_2^2 S_3(a,b);$$
$$p_5 = a_1^6 S_6(a,b) + 5a_1^4 a_2 S_5(a,b) + 6a_1^2 a_2^2 S_4(a,b) + a_2^3 S_3(a,b);$$
$$p_6 = a_1^7 S_7(a,b) + 6a_1^5 a_2 S_6(a,b) + 10a_1^3 a_2^2 S_5(a,b) + 4a_1 a_2^3 S_4(a,b);$$
$$p_7 = a_1^8 S_8(a,b) + 7a_1^6 a_2 S_7(a,b) + 15a_1^4 a_2^2 S_6(a,b) + 10a_1^2 a_2^3 S_5(a,b) + a_2^4 S_4(a,b);$$
$$\widetilde{p}_{-1} = \frac{\widetilde{\mu}^2}{(\lambda+\widetilde{\mu})^2}; \quad \widetilde{p}_0 = \frac{2a_1\widetilde{\mu}^2\lambda}{(\lambda+\widetilde{\mu})^3}; \quad \widetilde{p}_1 = \frac{3a_1^2\widetilde{\mu}^2\lambda^2}{(\lambda+\widetilde{\mu})^4} + \frac{2a_2\widetilde{\mu}^2\lambda}{(\lambda+\widetilde{\mu})^3};$$
$$\widetilde{p}_2 = \frac{4a_1^3\widetilde{\mu}^2\lambda^3}{(\lambda+\widetilde{\mu})^5} + \frac{6a_1a_2\widetilde{\mu}^2\lambda^2}{(\lambda+\widetilde{\mu})^4}; \quad \widetilde{p}_3 = \frac{5a_1^4\widetilde{\mu}^2\lambda^4}{(\lambda+\widetilde{\mu})^6} + \frac{12a_1^2a_2\widetilde{\mu}^2\lambda^3}{(\lambda+\widetilde{\mu})^5} + \frac{3a_2^2\widetilde{\mu}^2\lambda^2}{(\lambda+\widetilde{\mu})^4};$$

$$\widetilde{p}_4 = \frac{6a_1^5\widetilde{\mu}^2\lambda^5}{(\lambda+\widetilde{\mu})^7} + \frac{20a_1^3a_2\widetilde{\mu}^2\lambda^4}{(\lambda+\widetilde{\mu})^6} + \frac{12a_1a_2^2\widetilde{\mu}^2\lambda^3}{(\lambda+\widetilde{\mu})^5}.$$

Розглянемо приклад з такими числовими даними: $a_1 = 0,75$; $a_2 = 0,25$; $h = 5$; $\lambda = 1$; $a = 1/3$; $b = 1$; $\widetilde{\mu} = 6$. Тоді $M = 2/3$; $\widetilde{M} = 1/3$; $b_1 = 1,25$; $\rho = 5/6$; $\widetilde{\rho} = 5/12$, і середня тривалість періоду зайнятості $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$, знайдена за формулою (37), становить 3,794.

У стрічці "$\rho_k(\infty)$" табл. 3 записані ймовірності ρ_k, обчислені за формулами (41). У цій же таблиці для порівняння наведені значення відповідних ймовірностей, отримані за допомогою системи імітаційного моделювання GPSS World.

Таблиця 3

Стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі ($\mathbf{h = 5}$).

Кількість замовлень (k)	0	1	2	3	4
$\rho_k(\infty)$	0,2086	0,1902	0,1754	0,1411	0,1128
$\rho_k(\infty)$ (GPSS World, $t = 10^5$)	0,2093	0,1900	0,1756	0,1413	0,1126
Кількість замовлень (k)	5	6	7	8	...
$\rho_k(\infty)$	0,0891	0,0437	0,0218	0,0097	...
$\rho_k(\infty)$ (GPSS World, $t = 10^5$)	0,0898	0,0429	0,0218	0,0093	...

ЛІТЕРАТУРА

1. M. Finneran, *Problems of the high-quality voice over IP-based networks: compression, delay and echo. Part 1*, Elektronnyie Komponenty, **11** (2008), 83–85. (in Russian)
2. K. Sriram, D.M. Lucantoni, *Traffic smoothing effects of bit dropping in a packet voice multiplexer*, IEEE Trans. Comm., **37** (1989), №7, 703–712.
3. J.H. Dshalalow, *Queueing systems with state dependent parameters*, In: Frontiers in Queueing: Models and Appl. in Science and Eng., CRC Press, Boca Raton, FL, (1997), 61–116.
4. B.D. Choi, Y.Ch. Kim, Y. Shin, Ch.E.M. Pearce, *The $M^X/G/1$ queue with length dependent service times*, J. of Appl. Math. and Stoch. Anal., **14** (2001), №4, 399–419.
5. V.S. Korolyuk, Boundary Problems for Compound Poisson Processes, Naukowa Dumka, Kyiv, 1975. (in Russian)
6. V.S. Korolyuk, M.S. Bratiychuk, B. Pirdzhanov, Boundary Problems for Random Walks, Ylym, Ashgabat, 1987. (in Russian)
7. M.S. Bratiychuk, B. Borowska, *Explicit formulae and convergence rate for the system $M^\alpha/G/1/N$ as $N \to \infty$*, Stochastic Models, **18** (2002), №1, 71–84.
8. A.M. Bratiychuk, The Study of Systems with Limited Queue, PhD thesis, Kyiv, 2008. (in Ukrainian)
9. M. Bratiychuk, Yu. Zhernovyi, *Study of M/G/1/m and M/G/1 queues with group arrivals and threshold blocking of an input flow*, Visnyk Lviv. Univ., Ser.Mech-Math., **71** (2010), 26–39. (in Ukrainian)
10. K.Yu. Zhernovyi, *Investigation of the $M^\theta/G/1/m$ system with service regime switchings and threshold blocking of the input flow*, J. of Communicat. Technology and Electronics, **56** (2011), №12, 1570–1584.
11. K.Yu. Zhernovyi, *Stationary characteristics of the $M^\theta/G/1/m$ system with the threshold functioning strategy*, J. of Communicat. Technology and Electronics, **56** (2011), №12, 1585–1596.
12. Yu.V. Zhernovyi, Simulation of Queueing Systems, Lviv. Nats. Univ., 2007. (in Ukrainian)

Львівський національний університет ім. Івана Франка,
k_zhernovyi@yahoo.com

Надійшло 30.12.2011