

УДК 519.63 + 519.64

В. Г. ВАВРИЧУК, Р. С. ХАПКО

ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ В ОБЛАСТІ З РОЗРІЗОМ

V. G. Vavrychuk, R. S. Chapko. *On the numerical solution of parabolic Cauchy problem in a domain with cut*, Mat. Stud. **37** (2012), 209–218.

Cauchy problem is numerically solved with help of iterative regularization procedure at every step of which mixed nonstationary Dirichlet-Neumann problems for parabolic equation arise. Using Rothe's method mixed problems are reduced to the boundary integral equations which have three kinds of singularities: square root, logarithmic and hypersingularity. Special techniques are employed to cope with them so that in the case of analytic input data solution of boundary integral equations have exponential error decay.

В. Г. Вавричук, Р. С. Хапко. *О численном решении параболической задачи Коши в области с разрезом* // Мат. Студії. – 2012. – Т.37, №2. – С.209–218.

Задача Коши численно решается с помощью итерационной регуляризирующей процедуры, на каждом шагу которой возникают смешанные нестационарные задачи Дирихле-Неймана для параболического уравнения. Используя метод Ротэ, смешанные задачи сводятся к граничным интегральным уравнениям, которые имеют три типа особенностей: квадратного корня, логарифмическую и гиперсингулярную. Применяются специальные техники для учитывания каждой из них так, что в случае аналитических входных данных решение граничных интегральных уравнений имеет экспоненциально спадающую погрешность.

1. Постановка задачі. Нехай $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ однозв'язна обмежена область з границею $\Gamma_2 = \partial\tilde{D}$ з класу C^3 , яка містить розріз Γ_1 — гладку криву з класу C^2 без самоперетинів з кінцями x_{-1}^* і x_{+1}^* , причому $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Позначимо $D = \tilde{D} \setminus \Gamma_1$.

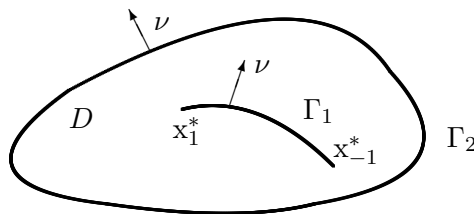


Рис. 1: Обмежена область D з розрізом Γ_1

2010 *Mathematics Subject Classification*: 65M32, 65M50, 65M70, 65M80.

Keywords: heat equation, Cauchy problem, Ladweber method, mixed boundary value problems, single- and double layer potentials, integral equation of the first kind, trigonometrical quadrature method.

У прикладних застосуваннях зовнішня межа Γ_2 є доступною для проведення вимірювань, а внутрішній розріз Γ_1 є недосяжним. Припустимо, що на Γ_2 виміряно температуру і потік та ставиться завдання реконструювати температуру на Γ_1 . Математична модель такої проблеми полягає у розв'язуванні лінійної параболічної задачі Коші

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{для } (x, t) \in D \times (0, T), \\ u = f_1 \quad \text{і} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 & \text{для } (x, t) \in \Gamma_2 \times (0, T), \\ u(x, 0) = 0 & \text{для } x \in D, \end{cases} \quad (1)$$

де $f_\ell \in L^2(\Gamma_2 \times (0, T))$, $\ell = 1, 2$ і $T > 0$.

Якщо $x_\ell(s)$ – деяке параметричне зображення Γ_ℓ , $\ell = 1, 2$, тоді одиничний вектор дотичної до Γ_ℓ задається як $\theta(x_\ell(s)) = |x'_\ell(s)|^{-1} x'_\ell(s)$, а одиничний вектор нормалі позначимо $\nu = \theta^\perp = (\theta_2, -\theta_1)$. Криву Γ_2 вважатимемо орієнтованою в додатному напрямку відносно внутрішності області D , а Γ_1 будемо обходити від x_{-1}^* до x_{+1}^* . Для граничних значень функцій на Γ_1 використовуватимемо стандартний запис

$$u^\pm(t, x) = \lim_{h \rightarrow +0} u(t, x \pm h\nu(x)),$$

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial \nu}(t, x) = \lim_{h \rightarrow +0} \nu(x) \cdot \text{grad}_x u(t, x \pm h\nu(x))$$

для $x \in \Gamma_1$. Також, для функцій визначених на Γ_1 введемо позначення $[u] := u^+ - u^-$.

Зазначимо, що питання єдиності розв'язку параболічної задачі Коші досліджено достатньо повно (див., наприклад, [12]). Вважатимемо також, що дані Коші є такими, при яких розв'язок задачі (1) існує. Однак цей розв'язок не є неперервно залежним від вхідних даних, тобто задача є некоректною і наближене розв'язування потребує застосування регуляризуючих методів.

Існує велика кількість публікацій стосовно чисельного розв'язування стаціонарних задач Коші, частина з яких ґрунтується на ітераційних методах у поєднанні з граничними інтегральними рівняннями ([1, 2]). Відзначимо статтю [2], де розглянуто випадок обмеженої області з розрізом, а чисельне розв'язування здійснено альтернуючим методом з використанням інтегральних рівнянь. В [3] побудовано чисельний розв'язок для параболічної задачі Коші у двозв'язній області за допомогою ітераційного методу та інтегральних рівнянь. Нашою метою в даній роботі є поширення методів такого типу для нестационарної задачі Коші в області з розрізом.

2. Ітераційний метод. Запропонований в [7, 8] підхід до розв'язування задачі Коші у нерегулярних областях полягає у побудові ітераційної процедури, збіжної у нормі простору з певною вагою, яка враховує наявність кутових точок. Випадок розрізу можна трактувати як границю з кутами величиною 2π в точках x_{-1}^* , x_{+1}^* . Простір L_β^2 складається з функцій, для яких

$$\|u\|_{L_\beta^2(D \times (0, T))} = \left(\int_0^T \int_D r^{2\beta} |u|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

де $r(x) = |x - x_{-1}^*| |x - x_{+1}^*|$, β – дійсне число, тоді $L_0^2 = L^2$ – стандартний простір Лебега. Надалі під $L_\beta^2(\Gamma_1 \times (0, T))$ розуміємо $L_\beta^2(\Gamma_1^+ \times (0, T)) \times L_\beta^2(\Gamma_1^- \times (0, T))$ зі скалярним добутком

$$\langle f^\pm, g^\pm \rangle = \int_0^T \int_{\Gamma_1} r^{2\beta} (f^+ g^+ + f^- g^-) ds dt.$$

На кожному кроці ітераційного методу потрібно розв'язувати такі мішані початково-крайові задачі

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{в } D \times (0, T), \\ u^\pm = \eta^\pm, & \text{на } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2, & \text{на } \Gamma_2 \times (0, T), \\ u(x, 0) = 0, & \text{для } x \in D, \end{cases} \quad (2)$$

де $[\eta](x_{\pm 1}^*) = 0$, $\eta^\pm \in L^2_{\beta-3/2}(\Gamma_1 \times (0, T))$, $u \in L^2_{\beta-2}(D \times (0, T))$ і

$$\begin{cases} \partial_t v + \Delta v = 0, & \text{в } D \times (0, T), \\ v^\pm = 0, & \text{на } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \zeta, & \text{на } \Gamma_2 \times (0, T), \\ v(x, T) = 0, & \text{для } x \in D, \end{cases} \quad (3)$$

де $\zeta \in L^2(\Gamma_2 \times (0, T))$, $v \in L^2_{\beta-2}(D \times (0, T))$. Коректність обох задач випливає з результатів наведених в [7, 8].

Вибираючи сталу β з проміжку $1/2 < \beta < 3/2$, будуватимемо наближення за таким алгоритмом:

- Задаємо довільне початкове наближення $\eta_0^\pm \in L^2_{\beta-3/2}(\Gamma_1 \times (0, T))$, для якого виконується $[\eta_0](x_{\pm 1}^*) = 0$.
- Першу апроксимацію u_0 розв'язку задачі Коші одержуємо, як розв'язок (2) з граничною умовою $u_0^\pm = \eta_0^\pm$ на $\Gamma_1 \times (0, T)$.
- Далі знаходимо v_0 , розв'язуючи (3) з другою граничною умовою заміненою на

$$\frac{\partial v_0}{\partial \nu} = \zeta_0 = u_0 - f_1 \quad \text{на } \Gamma_2 \times (0, T).$$

- Якщо u_{k-1} і v_{k-1} знайдені, то апроксимацію u_k знаходимо розв'язуючи (2) при $u_k^\pm = \eta_k^\pm$ на $\Gamma_1 \times (0, T)$, де

$$\eta_k^\pm = u_{k-1}^\pm \mp \gamma_L r^{2(3/2-\beta)} \frac{\partial v_{k-1}^\pm}{\partial \nu},$$

а $\gamma_L > 0$ — деяка стала.

- Далі, v_k знаходиться з (3) з граничною умовою

$$\frac{\partial v_k}{\partial \nu} = \zeta_k = u_k - f_1 \quad \text{на } \Gamma_2 \times (0, T).$$

Для дослідження збіжності ітераційного процесу визначимо оператор

$$K_\beta: L^2_{\beta-3/2}(\Gamma_1 \times (0, T)) \rightarrow L^2(\Gamma_2 \times (0, T))$$

формулою

$$K_\beta \eta^\pm = u|_{\Gamma_2 \times (0, T)} \quad \text{для } \eta^\pm \in L^2_{\beta-3/2}(\Gamma_1 \times (0, T)),$$

тут u має задовольняти (2) з $f_2 = 0$.

Лема 1. Для спряженого до K_β оператора маємо зображення

$$K_\beta^* \zeta = \pm r^{2(3/2-\beta)} \frac{\partial v^\pm}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1 \times (0, T)} \quad \text{для } \zeta \in L^2(\Gamma_2 \times (0, T)),$$

де v — розв'язок задачі (3).

Доведення. Застосуємо формулу Гріна до u та v з задач (2) та (3) відповідно

$$\int_0^T \int_D v(\Delta u - \partial_t u) - u(\Delta v + \partial_t v) dx dt = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left[v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] - \left[u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right] ds dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds dt.$$

Далі твердження леми одержуємо, врахувавши граничні умови в означеннях операторів K_β і K_β^* . \square

Теорема 1. Нехай $1/2 < \beta < 3/2$, припустимо що параметр γ_L задовольняє умову $0 < \gamma_L < \|K_\beta\|^{-2}$. Тоді при точних вхідних даних для розв'язку задачі Коші $u \in L^2_{\beta-2}(D \times (0, T))$ і наближення u_k справджується рівність

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\|_{L^2_{\beta-2}(D \times (0, T))} = 0$$

для будь-якого початкового наближення $\eta_0 \in L^2_{\beta-3/2}(\Gamma_1 \times (0, T))$.

Доведення. Справді, описаний алгоритм є ітераціями Ландвебера

$$\eta_k = \eta_{k-1} - \gamma_L K_\beta^*(K_\beta \eta_{k-1} + G f_2 - f_1)$$

для операторного рівняння $K_\beta \eta = f_1 - G f_2$, де G — відомий лінійний обмежений оператор. Тепер твердження випливає з класичних результатів про метод Ландвебера ([6]). \square

Якщо вхідні дані задані з похибкою, за критерій зупинки ітераційного процесу можна використати принцип нев'язки Морозова.

3. Чисельне розв'язування мішаних задач. Як бачимо з попереднього розділу на кожному кроці ітераційного методу необхідно розв'язувати коректні мішані початково-крайові задачі (2)–(3). Скористаємося для цього підходом запропонованим в [4, 5]. Введемо на інтервалі $[0, T]$ рівновіддалений поділ $t_n = (n + 1)h$ для $n = -1, 0, \dots, N - 1$, $h = T/(N + 1)$ і замінимо похідну за часом скінченно-різницевою апроксимацією, наприклад, $\partial_t u(x, t_n) \approx (u(x, t_n) - u(x, t_{n-1}))/h$. В результаті отримаємо послідовність еліптичних рівнянь

$$\Delta u_n - \varkappa^2 u_n = -\varkappa^2 u_{n-1} \quad \text{в } D \tag{4}$$

з граничними умовами

$$u_n^\pm = g_{n1}^\pm = g_1^\pm(\cdot, t_n) \quad \text{на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u_n}{\partial \nu} = g_{n2} = g_2(\cdot, t_n) \quad \text{на } \Gamma_2 \tag{5}$$

для $n = 0, \dots, N - 1$. Тут $\varkappa^2 = 1/h$, $u_{-1} = 0$ і $u_n \approx u(\cdot, t_n)$. Зауважимо, що порядок апроксимації похідної за часом може бути підвищений ([5]). Єдиність розв'язку отриманої послідовності можна довести за індукцією, використовуючи формулу Гріна.

Для зведення стаціонарних задач (4)–(5) до граничних інтегральних рівнянь подамо розв'язку у такій інтегральній формі

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^n \int_{\Gamma_1} \Phi_{n-m}(x, y) \varphi_{m1}(y) ds(y) + \sum_{m=0}^n \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \Phi_{n-m}(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi_{m2}(y) ds(y) + \chi_n(x), \quad x \in D, \tag{6}$$

де φ_{n1} , φ_{n2} — невідомі густини, а χ_n — потенціал подвійного шару

$$\chi_n(x) = \sum_{m=0}^n \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \Phi_{n-m}(x, y)}{\partial \nu(y)} [g_{m1}](y) ds(y). \quad (7)$$

У наведених потенціалах використано фундаментальний розв'язок рівнянь (4)

$$\Phi_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \{K_0(\varkappa|x-y|)v_n(|x-y|) + K_1(\varkappa|x-y|)w_n(|x-y|)\},$$

де K_0 , K_1 — модифіковані функції Бесселя другого роду і v_n , w_n — відомі поліноми з коефіцієнтами a_{nk} . Вигляд поліномів v_n , w_n можна знайти в праці [4], єдина відмінність полягає в тому, що значення коефіцієнта a_{n0} полінома v_n ми задаємо через символ Кронекера $a_{n0} = \delta_{n0}$.

Як і в [11] припускаємо, що густина φ_{n1} має вигляд

$$\varphi_{n1}(x) = \frac{\tilde{\varphi}_{n1}(x)}{\sqrt{|x-x_{-1}^*||x-x_{+1}^*|}}, \quad \tilde{\varphi}_{n1} \in C(\Gamma_1). \quad (8)$$

Підставимо розв'язок у вигляді (6) в граничні умови та застосуємо теорему про неперервне продовження відповідних потенціалів на границю. Одержимо послідовність систем інтегральних рівнянь першого роду для $n = 0, \dots, N-1$

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_1} \Phi_0(x, y) \varphi_{n1}(y) ds(y) + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi_{n2}(y) ds(y) = G_{n1}(x), & x \in \Gamma_1, \\ \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi_{n1}(y) ds(y) + \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi_{n2}(y) ds(y) = G_{n2}(x), & x \in \Gamma_2 \end{cases} \quad (9)$$

з логарифмічною особливістю в інтегралах по головній діагоналі та гіперсингулярною особливістю в інтегральному операторі по Γ_2 у другому рівнянні. Праві частини G_{n1} , G_{n2} системи (9) визначаються рекурентно через густини з попередніх часових шарів

$$\begin{aligned} G_{n1}(x) &= \frac{1}{2} [g_{n1}^+(x) + g_{n1}^-(x)] - \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\Gamma_1} \Phi_{n-m}(x, y) \varphi_{m1}(y) ds(y) - \\ &- \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \Phi_{n-m}(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi_{m2}(y) ds(y) - \frac{1}{2} [\chi_n^+(x) + \chi_n^-(x)], \quad x \in \Gamma_1, \\ G_{n2}(x) &= g_{n2}(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \Phi_{n-m}(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi_{m1}(y) ds(y) - \\ &- \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial^2 \Phi_{n-m}(x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)} \varphi_{m2}(y) ds(y) - \frac{\partial \chi_n}{\partial \nu}(x), \quad x \in \Gamma_2, \end{aligned}$$

тут наявна логарифмічна особливість у випадку, коли точка спостереження збігається з точкою інтегрування. Для послаблення гіперсингулярної особливості скористаємось перетворенням типу Має ([10, 11])

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi_{n2}(y) ds(y) &= \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \theta(x)} \frac{\partial \varphi_{n2}}{\partial \theta}(y) ds(y) - \\ - \varkappa^2 \int_{\Gamma_2} \Phi_0(x, y) \langle \theta(x), \theta(y) \rangle \varphi_{n2}(y) ds(y), & \quad x \in \Gamma_2, \quad n = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

З метою розробки чисельної схеми розв'язування інтегральних рівнянь припустимо, що криві Γ_ℓ , $\ell = 1, 2$ задані такими параметричними зображеннями

$\Gamma_1 = \{\tilde{x}_1(s) = (\tilde{x}_{11}(s), \tilde{x}_{12}(s)): s \in [-1, 1]\}$, $\Gamma_2 = \{x_2(s) = (x_{21}(s), x_{22}(s)): s \in [0, 2\pi]\}$, при цьому внаслідок гладкості відповідних кривих $|\tilde{x}'_1(s)| > 0$ для $s \in [-1, 1]$ та $|x'_2(s)| > 0$ для $s \in [0, 2\pi]$.

Для врахування кореневої особливості в φ_{n1} при підході до кінців розрізу виконаємо запропоновану у [13] \cos -заміну $x_1(s) = \tilde{x}_1(-\cos s)$. Більше того, завдяки \cos -перетворенню в подальшому всі підінтегральні функції будуть 2π -періодичними, що є передумовою високої точності квадратур з рівновіддаленими вузлами.

Введемо ряд позначень для фундаментального розв'язку та його похідних

$$H_n^{\ell\ell}(1; s, \sigma) = 2\pi\Phi_n(x_i(s), x_\ell(\sigma)), \quad H_n^{\ell\ell}(2; s, \sigma) = 2\pi \frac{\partial\Phi_n(x_i(s), x_\ell(\sigma))}{\partial\nu(x_\ell(\sigma))} |x'_\ell(\sigma)|,$$

$$H_n^{\ell\ell}(3; s, \sigma) = 2\pi \frac{\partial^2\Phi_n(x_i(s), x_\ell(\sigma))}{\partial\nu(x_i(s))\partial\nu(x_\ell(\sigma))} |x'_i(s)||x'_\ell(\sigma)| - \frac{1}{4\sin^2 \frac{s-\sigma}{2}} \delta_{n0}\delta_{i2}\delta_{\ell 2},$$

де $n = 0, \dots, N-1$; $i, \ell = 1, 2$; $s, \sigma \in [0, 2\pi]$. Виділимо логарифмічну особливість в ядрах $H_n^{\ell\ell}$ у вигляді спеціальних вагових функцій

$$H_n^{11}(k; s, \sigma) = H_{n1}^1(k; s, \sigma) \ln \frac{2}{e} |\cos s - \cos \sigma| + H_{n2}^1(k; s, \sigma), \quad k = 1, 2, \quad (10)$$

$$H_n^{22}(k; s, \sigma) = H_{n1}^2(k; s, \sigma) \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} + H_{n2}^2(k; s, \sigma), \quad k = 1, 2, 3, \quad (11)$$

де неперервні функції H_{n1}^ℓ задаються такими співвідношеннями

$$H_{n1}^\ell(1; s, \sigma) = \frac{1}{\ell} [-I_0(\varkappa r_{\ell\ell}(s, \sigma))v_n(r_{\ell\ell}(s, \sigma)) + I_1(\varkappa r_{\ell\ell}(s, \sigma))w_n(r_{\ell\ell}(s, \sigma))],$$

$$H_{n1}^\ell(2; s, \sigma) = \frac{1}{\ell} [-I_0(\varkappa r_{\ell\ell}(s, \sigma))v_n^1(r_{\ell\ell}(s, \sigma)) + I_1(\varkappa r_{\ell\ell}(s, \sigma))w_n^1(r_{\ell\ell}(s, \sigma))] \times \\ \times \langle \mathbf{r}_{\ell\ell}(\sigma, s), x'_\ell(\sigma)^\perp \rangle,$$

$$H_{n1}^2(3; s, \sigma) = \frac{1}{2} I_0(\varkappa r_{22}(s, \sigma)) [v_n^1(r_{22}(s, \sigma)) \langle x'_2(s), x'_2(\sigma) \rangle + v_n^2(r_{22}(s, \sigma))h(s, \sigma)] - \\ - \frac{1}{2} I_1(\varkappa r_{22}(s, \sigma)) [w_n^1(r_{22}(s, \sigma)) \langle x'_2(s), x'_2(\sigma) \rangle + w_n^2(r_{22}(s, \sigma))h(s, \sigma)],$$

тут I_0 , I_1 — модифіковані функції Бесселя першого роду, $\mathbf{r}_{i\ell}(s, \sigma) = x_i(s) - x_\ell(\sigma)$, $r_{i\ell}(s, \sigma) = |\mathbf{r}_{i\ell}(s, \sigma)|$, $h(s, \sigma) = \langle \mathbf{r}_{22}(s, \sigma), x'_2(s)^\perp \rangle \langle \mathbf{r}_{22}(s, \sigma), x'_2(\sigma)^\perp \rangle |\mathbf{r}_{22}(s, \sigma)|^{-2}$, а v_n^1 , w_n^1 , v_n^2 , w_n^2 — відомі поліноми. Неважко знайти наступні діагональні значення

$$H_{02}^\ell(1; s, s) = \ln \frac{2}{\sqrt{e}\varkappa|x'_\ell(s)|} + \delta_{\ell 1} \ln \frac{2|\sin s|}{\sqrt{e}} - C_E, \quad H_{02}^\ell(2; s, s) = \frac{\langle x'_\ell(s), x''_\ell(s)^\perp \rangle}{-2|x'_\ell(s)|^2},$$

$$H_{n1}^2(3; s, s) = \left(\frac{\varkappa^2}{4} a_{n0} - \frac{\varkappa}{2} a_{n1} + a_{n2} \right) |x'_2(s)|^2, \quad n \geq 0,$$

$$H_{n2}^2(3; s, s) = \left(-\frac{1}{12} + \frac{\langle x'_2(s), x'''_2(s) \rangle}{6|x'_2(s)|^2} - \frac{\langle x'_2(s), x''_2(s) \rangle^2}{4|x'_2(s)|^4} + \frac{\langle x'_2(s), x''_2(s)^\perp \rangle^2}{4|x'_2(s)|^4} \right) \delta_{n0} +$$

$$+ \left(\ln \frac{\sqrt{e}\varkappa|x'_2(s)|}{2} + C_E \right) \left(\frac{\varkappa^2}{2} a_{n0} - \varkappa a_{n1} + 2a_{n2} \right) |x'_2(s)|^2 - \left(\frac{\varkappa^2}{4} a_{n0} - a_{n2} + \frac{2}{\varkappa} a_{n3} \right) |x'_2(s)|^2,$$

$n \geq 0$, де C_E — стала Ейлера, а для $n \geq 1$ має місце $H_{n2}^\ell(1; s, s) = a_{n1}/\varkappa$, $H_{n2}^\ell(2; s, s) = 0$. Зауважимо, що хоча деякі з даних виразів є невизначеними в кутах і центрі квадрата

$[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, необхідності обчислювати там їхні значення не буде. Також, за допомогою розкладу в ряд Тейлора можна пересвідчитися, що гладкість ядер H_{nk}^ℓ при $\ell = 1, 2$, $n = 0, \dots, N-1$, $k = 1, 2$ обмежується лише тим, наскільки гладкими є граничні криві.

Для того, щоб записати систему (9) в операторному вигляді введемо такі інтегральні оператори

$$(T\mu)(s) := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \mu'(\sigma) d\sigma, \quad (S\mu)(s) := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) \mu(\sigma) d\sigma,$$

$$(S_n^\ell \mu)(s) := \frac{1}{2(3 - \ell)\pi} \int_0^{2\pi} H_{n1}^\ell(\ell + \delta_{\ell 2}; s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) \mu(\sigma) d\sigma,$$

$$(A_n^\ell \mu)(s) := \frac{1}{2(3 - \ell)\pi} \int_0^{2\pi} H_{n2}^\ell(\ell + \delta_{\ell 2}; s, \sigma) \mu(\sigma) d\sigma$$

та

$$(B_n^{12} \mu)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_n^{12}(2; s, \sigma) \mu(\sigma) d\sigma, \quad (B_n^{21} \mu)(s) := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} H_n^{12}(2; \sigma, s) \mu(\sigma) d\sigma,$$

тут $\ell = 1, 2$, $s \in [0, 2\pi]$. Після серії додаткових перетворень (див. наприклад [2, 9, 10]), а також врахування співвідношення

$$\frac{\partial^2 \Phi_0(x, y)}{\partial \theta(x) \partial \theta(y)} + \frac{\partial^2 \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)} = -\varkappa^2 \Phi_0(x, y) \langle \theta(x), \theta(y) \rangle$$

та проведення заміни $\mu_{n1}(\sigma) = \varphi_{n1}(x_1(\sigma)) |x_1'(\sigma)|$, $\mu_{n2}(\sigma) = \varphi_{n2}(x_2(\sigma))$, $g_{n1}(s) = g_{n1}(x_1(s))$, $g_{n2}(s) = g_{n2}(x_2(s)) |x_2'(s)|$ одержимо еквівалентну (9) систему інтегральних рівнянь в операторному вигляді

$$(\mathcal{U} + \mathcal{B}_0) \tilde{\mu}_n = \tilde{g}_n - \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{B}_{n-m} \tilde{\mu}_m - \tilde{\chi}_n, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (12)$$

тут вживаються такі позначення для векторів

$$\tilde{\mu}_n := (\mu_{n1}, \mu_{n2})^\top, \quad \tilde{g}_n := (g_{n1}, g_{n2})^\top, \quad \tilde{\chi}_n := (\chi_n(x_1(s)), \frac{\partial \chi_n}{\partial \nu}(x_2(s)) |x_2'(s)|)^\top$$

і для матриць

$$\mathcal{U} := \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_n := \begin{pmatrix} S_n^1 + A_n^1 - \delta_{n0} S & B_n^{12} \\ B_n^{21} & S_n^2 + A_n^2 \end{pmatrix}$$

для $n = 0, \dots, N-1$. Тепер можемо довести коректність систем інтегральних рівнянь (12). Через $H^m[0, 2\pi]$ позначимо простір Соболева 2π -періодичних функцій з показником $m \geq 0$ і через $H_e^m[0, 2\pi]$ — підпростір парних функцій з $H^m[0, 2\pi]$.

Теорема 2. Для $m \in \mathbb{N}$, $m \leq p$, де p характеризує гладкість кривих Γ_1 і Γ_2 , $g_{n1} \in H_e^m[0, 2\pi]$, $g_{n2} \in H^{m-1}[0, 2\pi]$ кожна система інтегральних рівнянь послідовності (12) має єдиний розв'язок $\mu_{n1} \in H_e^{m-1}[0, 2\pi]$, $\mu_{n2} \in H^m[0, 2\pi]$.

Доведення. Оскільки оператори $S: H_e^{m-1}[0, 2\pi] \rightarrow H_e^m[0, 2\pi]$, $T: H^m[0, 2\pi] \rightarrow H^{m-1}[0, 2\pi]$ обмежені та мають обмежені обернені, подіявши на перше рівняння послідовності (12) матрицею $\text{diag}(S^{-1}, T^{-1})$, одержимо операторне рівняння другого роду з компактним оператором. У результаті на основі теорії Ріса-Шаудера ([11]) отримуємо коректність цього рівняння. Далі твердження теореми слідує за індукцією. \square

Для виконання повної дискретизації застосовується метод квадратур з вузлами

$$s_j = \frac{(j + 1/2)\pi}{M}, \quad j = 0, \dots, 2M - 1. \quad (13)$$

Незважаючи на дещо інший вибір s_j , тим не менше є правильними наведені в [11] квадратурні формули (14), які отримуються шляхом тригонометричної інтерполяції гладкої частини підінтегральної функції і подальшого точного інтегрування. Одержимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma &\approx \frac{1}{2M} \sum_{j=0}^{2M-1} f(s_j), \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s_k - \sigma}{2} d\sigma &\approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_{|k-j|} f(s_j), \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(\sigma) \cot \frac{\sigma - s_k}{2} d\sigma &\approx \sum_{j=0}^{2M-1} T_{|k-j|} f(s_j) \end{aligned} \quad (14)$$

з відомими вагами R_k і T_k ([11]). Застосування цих квадратур у відповідних інтегралах системи (12) і подальша колокація з використанням вузлів (13) в якості точок колокації приводить до послідовності систем лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{M-1} \mu_{n1}^{(j)} \left\{ \frac{R_{|k-j|} + R_{k+j+1}}{2} H_{01}^1(1; s_k, s_j) + \frac{1}{2M} H_{02}^1(1; s_k, s_j) \right\} + \\ + \sum_{j=0}^{2M-1} \mu_{n2}^{(j)} \frac{1}{2M} H_0^{12}(2; s_k, s_j) = G_{n1}^{(k)}, & k = 0, \dots, M-1, \\ \sum_{j=0}^{2M-1} \mu_{n2}^{(j)} \left\{ \frac{1}{2} T_{|k-j|} + R_{|k-j|} H_{01}^2(3; s_k, s_j) + \frac{1}{2M} H_{02}^2(3; s_k, s_j) \right\} + \\ + \sum_{j=0}^{M-1} \mu_{n1}^{(j)} \frac{1}{2M} H_0^{12}(2; s_j, s_k) = G_{n2}^{(k)}, & k = 0, \dots, 2M-1, \end{cases}$$

де $\mu_{n\ell}^{(j)} \approx \mu_{n\ell}(s_j)$, $\ell = 1, 2$, а $G_{n1}^{(k)}$, $G_{n2}^{(k)}$ — праві частини, що обчислюються послідовно для $n = 0, \dots, N-1$ за аналогічним принципом. Зважаючи на парність густин μ_{n1} , розмірність системи була понижена до $3M \times 3M$, крім того матриця одержаної системи є симетричною. У випадку аналітичних вхідних даних такий метод забезпечує експоненційну швидкість збіжності чисельних розв'язків систем інтегральних рівнянь.

На основі властивостей потенціалів у зображенні (6) одержимо наступні співвідношення для знаходження граничних значень, необхідних для реалізації ітераційного алгоритму (див. п. 2)

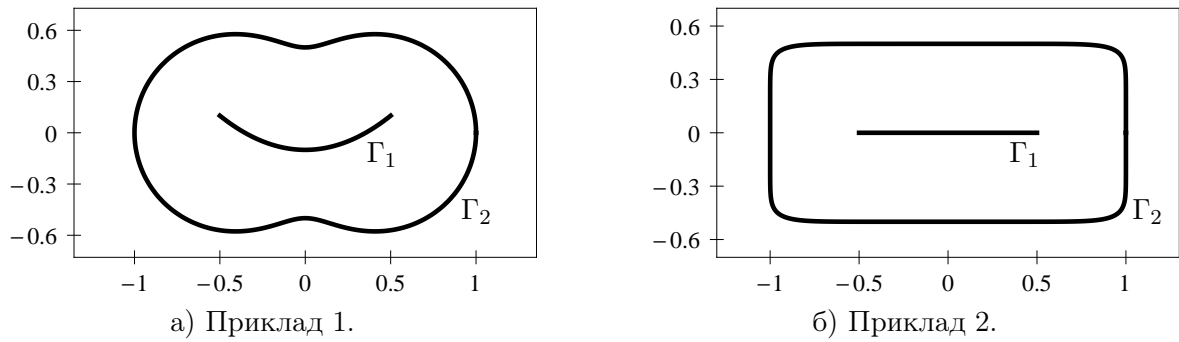
$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n^\pm}{\partial \nu}(x_1(s)) |x_1'(s)| &= \mp \frac{1}{2} \mu_{n1}(s) + \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^n \int_0^{2\pi} H_{n-m}^{11}(2; \sigma, s) \mu_{m1}(\sigma) d\sigma + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^n \int_0^{2\pi} H_{n-m}^{12}(3; s, \sigma) \mu_{m2}(\sigma) d\sigma + \frac{\partial \chi_n}{\partial \nu}(x_1(s)) |x_1'(s)|, & s \in (0, \pi) \end{aligned}$$

і

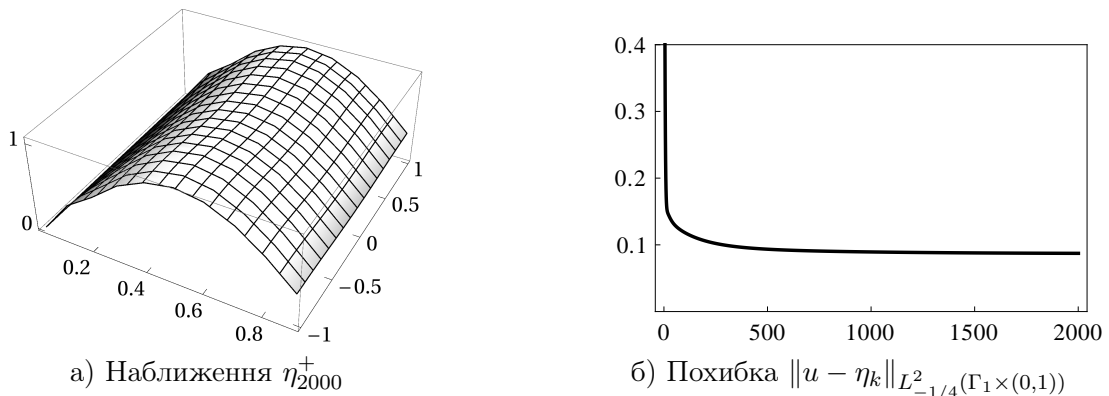
$$\begin{aligned} u_n(x_2(s)) &= -\frac{1}{2} \mu_{n2}(s) + \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^n \int_0^{2\pi} H_{n-m}^{21}(1; s, \sigma) \mu_{m1}(\sigma) d\sigma + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^n \int_0^{2\pi} H_{n-m}^{22}(2; s, \sigma) \mu_{m2}(\sigma) d\sigma + \chi_n(x_2(s)), & s \in [0, 2\pi], \\ \chi_n(x_2(s)) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^n \int_0^{2\pi} H_{n-m}^{21}(2; s, \sigma) [g_{m1}](\sigma) \text{sign}(\sin \sigma) d\sigma, & s \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Очевидно, що при розв'язуванні задачі (3) виконується $\frac{\partial \chi_n}{\partial \nu} = 0$. Далі у наведених виразах виділяється логарифмічна особливість (11) і застосовуються квадратурні формули (14).

4. Чисельні експерименти.

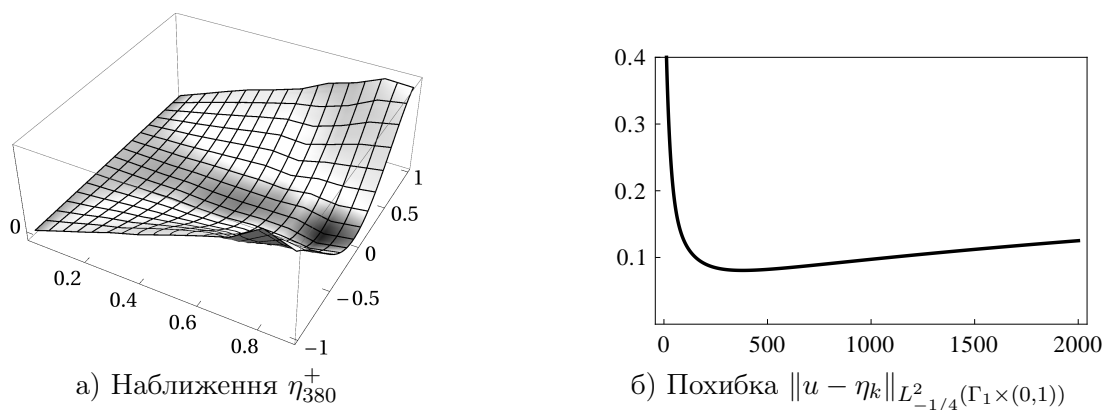
Рис. 2: Вигляд області D .

Приклад 1. Розглянемо задачу Коші в області, зображеній на рисунку 2а. Необхідні нам дані Коші синтезуємо, використовуючи пряму задачу (4–5), для цього виберемо $T = 1$, $N = 19$, $M = 128$, і на Γ_1 задамо $g_{n1}^{\pm} = \sin(\pi t_n)$, а на Γ_2 — $g_{n2} = 1$. Тепер, знайшовши наближений розв'язок u_n^M задачі (4–5), можна покласти $f_1(\cdot, t_n) = u_n^M|_{\Gamma_2}$ та $f_2 = 1$. Параметри ітераційного методу вибиралися $\gamma_L = 1$, $\beta = 1.25$, а параметри дискретизації при розв'язуванні прямих задач рівні $N = 9$, $M = 64$. Результати роботи алгоритму зображені на рис. 3. Зауважимо, що для генерування “точних” вхідних даних Коші була використана густіша сітка для того, щоб уникнути ефекту “inverse crime”.

Рис. 3: Реконструкція $u|_{\Gamma_1 \times (0,1)}$ з прикладу 1.

Приклад 2. Нехай \tilde{D} , утворена кривою Ляме, містить розріз — відрізок $[-0.5, 0.5]$ осі абсцис (див. рис. 2б). Використаємо вже описаний підхід для синтезу даних Коші за допомогою задачі Діріхле-Неймана. Таким чином при “точному” розв'язку задачі Коші $u(t, x)|_{\Gamma_1} = 4tx_2^2$ та параметрах дискретизації $N = 9$, $M = 64$, матимемо деякі вхідні дані $f_1(\cdot, t_n) = u_n^M|_{\Gamma_2}$ та $f_2(\cdot, t_n) = t_n$, де u_n^M — наближений розв'язок відповідної прямої задачі. Для симуляції похибки вимірів у значення f_1 поточково вносився 5% випадковий шум. При незмінних інших параметрах результати обчислень зображені на рисунку 4.

Таким чином, для наближеного розв'язування параболічної задачі Коші в плоскій обмеженій області з розрізом запропоновано ітераційний метод типу Ландвєбера у поєднанні з методом граничних інтегральних рівнянь. Проведені чисельні експерименти підтверджують застосовність і ефективність розробленого алгоритму.

Рис. 4: Реконструкція $u|_{\Gamma_1 \times (0,1)}$ з прикладу 2.

ЛІТЕРАТУРА

1. Chapko R., Johansson B.T. *An alternating boundary integral based method for a Cauchy problem for Laplace equation in semi-infinite domains*// Inverse Probl. Imaging – 2008. – V.3. – P. 317–333.
2. Chapko R., Johansson B.T. *An alternating potential based approach for a Cauchy problem for the Laplace equation in a planar domain with a cut*// Comp. Methods in Appl. Math. – 2008. – №8. – P. 315–335.
3. Chapko R., Johansson B.T., Vavrychuk V. *Recovering boundary data in planar heat conduction using a boundary integral equation method*// Electronic Journal of Boundary Elements – 2011. – №9. – P. 1–15.
4. Chapko R., Kress R. *Rothe's method for the heat equation and boundary integral equations*// J. Integral Equations Appl. – 1997. – V.1. – P. 47–69.
5. Chapko R., Vavrychuk V. *On the numerical solution of a mixed initial boundary value problem for the heat equation in a double-connected planar domain*// Journal of Numerical and Applied Mathematics – 2009. – V.97. – P. 26–38.
6. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic Publishers, London, 1996.
7. Johansson B.T. *An iterative method for a Cauchy problem for the heat equation*// IMA Journal of Applied Mathematics – 2006. – V.71. – P. 262–286.
8. Johansson B.T. *Determining the temperature from Cauchy data in corner domains*// International Journal of Computing Science and Mathematics. – 2010. – V.3. – P. 122–131.
9. Kress R. *Inverse scattering from an open arc*// Math. Meth. in the Appl. Sci. – 1995. – V.18. – P. 267–293.
10. Kress R. *On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory*// J. Comput. Appl. Math. – 1995. – V.61. – P. 345–360.
11. Kress R. *Linear Integral Equations*, second ed. – Springer-Verlag, 1999.
12. Saut J.-C., Scheurer B. *Unique continuation for some evolution equations*// J. Differential Equations – 1987. – V.66. – P. 118–139.
13. Yan Y., Sloan I.H. *On integral equations of the first kind with logarithmic kernels*// J. Integral Equations Appl. – 1988. – V.1. – P. 549–579.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Факультет прикладної математики та інформатики

Надійшло 23.01.2012