УДК 517.5

В. І. Суділовська

ПРО ОДИН МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ C-СИМЕТРІЙ

V. I. Sudilovskaya. *On one method of construction of symmetry operator C*, Mat. Stud. **37** (2012), 184–192.

The new method of construction of symmetry operator C, which is one of the principal notions of the pseudo-Hermitian quantum mechanics, is proposed. The method is based on solving Riccati operator equations. The theorem on the boundedness/unboundedness of operator C in terms of solutions of the Riccati equation is established. Sufficient conditions for the existence of the operator C are determined.

В. И. Судиловская. *Об одном методе нахождения C-симметрий* // Мат. Студії. – 2012. – Т.37, №2. – С.184–192.

В роботе предложен, базирующийся на решении операторных уравнений Риккати, новый метод нахождения оператора симметрии C, являющегося одним из ключевых понятий псевдо-эрмитовой квантовой механики. Доказана теорема об ограниченности/неограниченности оператора симметрии C в терминах решений уравнения Риккати, определены достаточные условия для существования оператора C.

1. Вступ. В останні роки в працях з теоретичної фізики активно розвивається, так звана, псевдо-ермітова квантова механіка (див., наприклад, статті [4, 14] та списки літератури у них). Принципова відмінність такої механіки від стандартної полягає у використанні несамоспряжених гамільтоніанів з додатковими (фізичними) властивостями симетрії, які дозволяють отримати самоспряженість гамільтоніана за рахунок спеціального вибору скалярного добутку $(\cdot,\cdot)$. Такий підхід відзначається більшою гнучкістю, оскільки він дозволяє не фіксувати апріорі скалярний добуток (який визначає “самоспряженість”) і, отже, дає можливість розглядати ширші класи гамільтоніанів.

Як правило, несамоспряжені гамільтоніани можна інтерпретувати як самоспряжені оператори в просторах Крейна (див. означення в наступному розділі), тобто такі оператори є самоспряженими відносно індефінітної метрики $[\cdot,\cdot]$. При цьому, згадувана вище додаткова властивість (фізичної) симетрії, дозволяє у багатьох випадках модифікувати індефінітну метрику $[\cdot,\cdot]$, перетворивши її в скалярний добуток. Таке перетворення здійснюється за допомогою спеціального оператора C (так званої C-симетрії).

Як приклад, розглянемо оператор, породжений диференціальним виразом

$$A=-\frac{d^2}{dx^2}+x^2(ix)^{\epsilon},\qquad 0\le\epsilon<2. \tag{1}$$

У гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$ оператор A не є самоспряженим через недійсність потенціалу $x^2(ix)^{\epsilon}$, але цей оператор має так звану властивість $\mathcal{PT}$-симетрії, тобто A комутує з оператором $\mathcal{PT}$

$$A\mathcal{PT}=\mathcal{PT}A, \tag{2}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 47A55, 47A57, 47B25.
Keywords: Krein spaces, indefinite metrics, operator C, operator Riccati equation.

де оператор парності $\mathcal{P}$ і оператор комплексного спряження $\mathcal{T}$ визначені так:

$$(\mathcal{P}f)(x) = f(-x) \text{ та } (\mathcal{T}f)(x) = \overline{f(x)}.$$

Оператор A в (1) тепер можна інтерпретувати як самоспряжений відносно індефінітної метрики

$$[f,g]_{\mathcal{P}} := (\mathcal{P}f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\overline{g(x)}dx, \qquad f,g \in L_2(\mathbb{R}). \tag{3}$$

Термін "індефінітний" підкреслює, що півторалінійна форма $[f,f]_{\mathcal{P}}$ набуває як додатних (на парних функціях), так і від'ємних (на непарних функціях) значень. Простір $L_2(\mathbb{R})$ з індефінітною метрикою (3) є прикладом простору Крейна, і оператор A є самоспряженим у цьому просторі Крейна. Чисельними методами ([5]) було показано, що спектр оператора A є дискретним. Відповідний оператор C будується в термінах власних функцій оператора A так, щоб півторалінійна форма $(\cdot,\cdot)_C = [C\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}C\cdot,\cdot)$ визначала новий скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_C$, відносно якого оператор A ставав би самоспряженим.

Знаходження оператора C для даного несамоспряженого гамільтоніана з додатковою властивістю симетрії (наприклад, $\mathcal{PT}$-симетрії (2)) є одним з ключових моментів псевдо-ермітової квантової механіки. Подібно, як і в [4], означення C-симетрії у просторах Крейна можна сформульовати так.

Означення 1. Оператор A в просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$ *має властивість C-симетрії*, якщо існує лінійний оператор C в $\mathfrak{H}$ такий, що: (i) $C^2 = I$; (ii) оператор JC є додатним в $\mathfrak{H}$; (iii) рівність $ACf = CAf$ має сенс для всіх f з області визначення $\mathcal{D}(A)$ оператора A.

Зауважимо, що в означенні 1 оператор C не обов'язково є обмеженим і, отже, виконання рівності $ACf = CAf$ означає, що

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C),\ C\colon \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(A) \ \text{ і } \ A\colon \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(C).$$

Слід зазначити, що властивість обмеженості/необмеженості C як оператора в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ є надзвичайно важливою. Справді, якщо A є самоспряженим оператором у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$ з *обмеженою* C-симетрією, то A є самоспряженим *на тій же множині елементів* $\mathfrak{H}$, але відносно нового скалярного добутку

$$(\cdot,\cdot)_C := [C\cdot,\cdot]_J = (JC\cdot,\cdot), \tag{4}$$

що еквівалентний до початкового $(\cdot,\cdot)$. Це означає, що псевдо-ермітовий гамільтоніан A можна реалізувати як самоспряжений на тій самій множині векторів $\mathfrak{H}$ за допомогою "правильного" вибору обмеженого метричного оператора JC в (4).

Ситуація зовсім інша, якщо C є *необмежений* в $\mathfrak{H}$. У цьому випадку метричний оператор JC визначений тільки на множині $\mathcal{D}(C)$ в $\mathfrak{H}$ і новий скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_C$ не є еквівалентним до початкового скалярного добутку $(\cdot,\cdot)$. Це призводить до самоспряженої реалізації A в новому гільбертовому просторі $\mathfrak{H}'$, який не збігається з[1] $\mathfrak{H}$.

Було багато спроб обчислити оператор C ([6]–[10], [15]) для різних $\mathcal{PT}$-симетричних моделей, що становлять інтерес для фізичних застосувань. Через складність проблеми не дивно, що більшість отриманих формул є наближеними і зазвичай виражаються в термінах теорії збурень.

[1][12] дає фізичну дискусію цього феномену.

Мета даної статті — розвиток одного математичного методу знаходження оператора C, який базується на розв'язанні операторних рівнянь Ріккаті. Звичайно, знаходження розв'язків рівняння Ріккаті теж є далеко не тривіальною задачею, але встановлення зв'язку

$$\text{розв'язок рівняння Ріккаті} \ \leftrightarrow \ \text{оператор } C$$

дозволяє застосувати відомі результати з теорії рівнянь Ріккаті до дослідження оператора C. Зокрема, на цьому шляху, ми характеризуємо обмеженість/необмеженість оператора C в термінах розв'язків рівняння Ріккаті (теорема 2, наслідок 1), та встановлюємо достатні умови для існування оператора C (наслідок 2).

2. Оператори C в просторах Крейна. Загальні властивості. Нагадаємо деякі відомі властивості просторів Крейна (див наприклад [3]).

Нехай $\mathfrak{H}$ — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$. Обмежений оператор J в $\mathfrak{H}$ називається *фундаментальною симетрією*, якщо $J^2 = I$ і $J = J^*$, де J^* є спряженим до J відносно скалярного добутку $(\cdot,\cdot)$.

Фундаментальна симетрія J визначена фундаментальним розкладом простору $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_-, \qquad \mathfrak{H}_- = P_-\mathfrak{H}, \quad \mathfrak{H}_+ = P_+\mathfrak{H}, \tag{5}$$

де $P_+ = \frac{1}{2}(I+J)$ і $P_- = \frac{1}{2}(I-J)$.

Простір $\mathfrak{H}$, наділений індефінітним скалярним добутком (індефінітною метрикою) $[\cdot,\cdot]_J := (J\cdot,\cdot)$, називається *простором Крейна* $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$, якщо $\dim \mathfrak{H}_+ = \dim \mathfrak{H}_- = \infty$.

(Замкнутий) підпростір $\mathfrak{L}$ в просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$ називається *додатним, рівномірно додатним*, якщо, відповідно, $[f,f]_J > 0$, $\quad [f,f]_J \geq \alpha\|x\|^2$ $(\alpha > 0)$ для всіх $f \in \mathfrak{L} \setminus \{0\}$.

Додатний (рівномірно додатний) підпростір $\mathfrak{L}$ називається *максимальним*, якщо $\mathfrak{L}$ не є власним підпростором додатного (відповідно рівномірно додатного) підпростору в $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$. Від'ємний, рівномірно від'ємний підпростори та властивості їх максимальності вводяться подібно.

Нехай $\mathfrak{L}_+$ — максимальний додатний підпростір у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$. Тоді його J-ортогональне доповнення

$$\mathfrak{L}_- = \mathfrak{L}_+^{[\perp]} = \{f \in \mathfrak{H} \mid [f,g]_J = 0, \ \forall g \in \mathfrak{L}_+\}$$

є максимальним від'ємним підпростором простору $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$ і пряма J-ортогональна сума[2]

$$\mathcal{D} = \mathfrak{L}_+ [\dot{+}] \mathfrak{L}_- \tag{6}$$

є *щільною лінійною множиною* в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. Множина $\mathcal{D}$ збігається з $\mathfrak{H}$ тоді й тільки тоді, коли $\mathfrak{L}_+$ є максимальним рівномірно додатним підпростором. У цьому випадку $\mathfrak{L}_- = \mathfrak{L}_+^{[\perp]}$ є максимальним рівномірно від'ємним підпростором.

Наступна теорема характеризує властивості (i), (ii) оператора C в означенні 1, які не залежать від вибору оператора A.

Теорема 1. *Нехай C — лінійний оператор у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$. Наступні твердження еквівалентні:*

(i) *оператор JC є додатним і $C^2 = I$;*

[2] дужки $[\dot{+}]$ означають ортогональність відносно індефінітної метрики.

(ii) область визначення C задається формулою (6) при деякому виборі максимального додатного підпростору $\mathfrak{L}_+$ в $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$ і C діє як одиничний оператор I і мінус одиничний оператор $-I$ на підпросторах $\mathfrak{L}_+$ та $\mathfrak{L}_-$, відповідно;
(iii) оператор C має вигляд

$$C = Je^{Q} = e^{-Q/2}Je^{Q/2}, \tag{7}$$

де Q — самоспряжений оператор в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ такий, що $JQ = -QJ$.

Доведення. (ii)→(i). Властивість $C^2 = I$ є очевидною. Повторюючи міркування з [3], де оператор C визначався умовами (ii), отримаємо, що C є самоспряженим і додатним відносно індефінітної метрики $[\cdot,\cdot]_J$. Це еквівалентне до умови (i).

(ii)→(iii). "Відхилення" прямої суми (6) від фундаментального розкладу (5) можна описати строго стискуючим оператором T (тобто, $\|Tx\| < \|x\|$, $\forall x(\neq 0) \in \mathfrak{H}$), який крім того є самоспряженим оператором в $\mathfrak{H}$ і антикомутує з J. Точніше, підпростори $\mathfrak{L}_\pm$ з (6) можна записати у вигляді

$$\mathfrak{L}_+ = (I+T)\mathfrak{H}_+, \qquad \mathfrak{L}_- = (I+T)\mathfrak{H}_-, \tag{8}$$

та проектори $P_{\mathfrak{L}_\pm} : \mathcal{D} = \mathfrak{L}_+[\dot{+}]\mathfrak{L}_- \to \mathfrak{L}_\pm$ мають вигляд ([13])

$$P_{\mathfrak{L}_-} = (I-T)^{-1}(P_- - TP_+), \qquad P_{\mathfrak{L}_+} = (I-T)^{-1}(P_+ - TP_-), \tag{9}$$

де ортогональні проектори $P_+ = \frac{1}{2}(I+J)$ і $P_- = \frac{1}{2}(I-J)$ відповідають фундаментальному розкладу (5).

Якщо C визначається умовами (ii), тоді $\mathcal{D}(C) = \mathcal{D}$ та $Cf = P_{\mathfrak{L}_+}f - P_{\mathfrak{L}_-}f$ для всіх $f \in \mathcal{D}$. Використовуючи (9) і взявши до уваги антикомутативне співвідношення $TJ = -JT$, отримуємо

$$C = P_{\mathfrak{L}_+} - P_{\mathfrak{L}_-} = (I-T)^{-1}(I+T)J = J(I-T)(I+T)^{-1}. \tag{10}$$

Позаяк T є самоспряженим оператором і строгим стиском, спектр T міститься в сегменті $\mathrm{I} = [-1,1]$. Це означає, що $(I-T)(I+T)^{-1} = e^{Q}$, де

$$Q = f(T), \quad f(\lambda) = \ln\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

є самоспряженим оператором.

Антикомутативне співвідношення $JT = -TJ$ означає, що спектральна функція E_δ оператора T задовольняє співвідношення $JE_\delta = E_{-\delta}J$ для будь-якої борелевої множини δ ([16]). Використовуючи це співвідношення, а також беручи до уваги, що $f(\lambda) = \ln\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ є непарною функцією на I, отримуємо

$$JQ = J\int_{\mathrm{I}} f(\lambda)dE_\lambda = \int_{\mathrm{I}} f(\lambda)dE_{-\lambda}J = -QJ.$$

Використовуючи (10), отримуємо формулу (7), де самоспряжений оператор Q антикомутує з T.

(i)→(ii). З того, що оператор $\Theta = JC$ є додатним, випливає, що оператор

$$T = (I-\Theta)(I+\Theta)^{-1} \tag{11}$$

коректно визначений самоспряжений оператор і

$$\|Tx\| < \|x\|, \qquad x \neq 0 \quad \text{(строгий стиск)}.$$

Останнє означає, що існує обернений оператор $(I+T)^{-1}$ до оператора $I+T$ і

$$C = J\Theta = J(I-T)(I+T)^{-1}. \tag{12}$$

Крім того, умова $C^2 = I$ означає, що $C = J\Theta = \Theta^{-1}J$. Поєднуючи це співвідношення з (11), отримуємо $JT = -TJ$.

Отже, T — самоспряжений строго стискуючий оператор, який антикомутує з J. Беручи це до уваги і порівнюючи (12) з (10), робимо висновок, що: оператор T визначає максимальний додатний підпростір $\mathfrak{L}_+$ і максимальний від'ємний $\mathfrak{L}_-$ за формулами (8). Більше того, повторюючи доведення (ii)→(iii) з оператором T, визначеним за формулою (11), отримаємо, що $\mathcal{D}(C) = \mathfrak{L}_+[\dot{+}]\mathfrak{L}_-$ і $C\restriction_{\mathfrak{L}_\pm} = \pm I$. Тому, (i)→(ii).

Для завершення доведення досить встановити, що (iii)→(i). Але це твердження очевидне. □

Зауваження 1. Як випливає з пункту *(ii)* теореми 1, оператори C характеризуються різноманітними розкладами типу (6), відносно яких вони задаються формулою

$$C = I\restriction_{\mathcal{L}_+} \dot{+} (-I)\restriction_{\mathcal{L}_-}. \tag{13}$$

З [3] і (13) одержуємо, що C є замкненим оператором в $\mathfrak{H}$. Цей оператор є обмеженим тоді і тільки тоді, коли розклад (6) є розкладом простору $\mathfrak{H}$, тобто тоді, коли підпростір $\mathfrak{L}_+$ є *максимальним рівномірно додатним* підпростором простору Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$.

3. Побудова операторів C в термінах розв'язків рівняння Ріккаті. Оператор A, що діє в просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$, називається *самоспряженим в цьому просторі,* якщо A є самоспряженим відносно індефінітної метрики $[\cdot,\cdot]_J$. Ця умова є еквівалентною до операторного співвідношення

$$A^*J = JA, \tag{14}$$

де A^* є спряженим до оператора A в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ (тобто спряженим відносно початкового скалярного добутку $(\cdot,\cdot)$).

Розглянемо оператор

$$A = A' + V, \tag{15}$$

де "незбурена" частина A' є необмеженим самоспряженим оператором у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ і комутує з J (тобто, $A'J = JA'$), а "потенціал" V є обмеженим оператором в $\mathfrak{H}$ і антикомутує з J (тобто, $JV = -VJ$). Тоді оператор A допускає наступне матричне зображення відносно розкладу (5)

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & V_0 \\ V_1 & A_1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = P_+A'P_+, \quad A_1 = P_-A'P_-, \quad V_0 = P_+VP_-, \quad V_1 = P_-VP_+. \tag{16}$$

Легко бачити, що оператори A_0 і A_1 є самоспряженими в просторах $\mathfrak{H}_+$ і $\mathfrak{H}_-$, відповідно, та $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_0) \dot{+} \mathcal{D}(A_1)$.

В подальшому будемо припускати, що потенціал V задовольняє співвідношення

$$V^* = -V. \tag{17}$$

У цьому випадку оператори V_0 та V_1 в (16) задовольняють співвідношення

$$V_1 = -V_0^*, \tag{18}$$

а з леми 3.3 в [11] випливає, що оператор A є самоспряженим у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$ (тобто, виконується операторна рівність (14)).

Наступні два операторних рівняння Ріккаті природно асоційовані з оператором A, визначеним формулою (16)

$$KA_0 - A_1K + KV_0K = V_1, \qquad GA_1 - A_0G + GV_1G = V_0. \tag{19}$$

Через $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-)$ позначимо множину обмежених операторів, які відображають простір $\mathfrak{H}_+$ в простір $\mathfrak{H}_-$.

Оператор $K \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-)$ називається *сильним розв'язком першого рівняння Ріккаті в* (19), якщо K відображає область визначення $\mathcal{D}(A_0)$ оператора A_0 в область визначення $\mathcal{D}(A_1)$ оператора A_1 і

$$KA_0x - A_1Kx + KV_0Kx = V_1x, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A_0).$$

Подібно, оператор $G \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_-, \mathfrak{H}_+)$ називається *сильним розв'язком другого рівняння Ріккаті,* якщо G відображає область визначення $\mathcal{D}(A_1)$ оператора A_1 в область визначення $\mathcal{D}(A_0)$ оператора A_0 і

$$GA_1y - A_0Gy + GV_1Gy = V_0y, \qquad \forall y \in \mathcal{D}(A_1).$$

Теорема 2. *Оператор A, визначений рівністю (15) з умовами (17) на потенціал V, має C-симетрію в сенсі означення 1 тоді і тільки тоді, коли рівняння Ріккаті*

$$KA_0 - A_1K + KV_0K = V_1 \tag{20}$$

має сильний розв'язок $K \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-)$ такий, що $\|Kx_+\| < \|x_+\|$ для всіх ненульових елементів $x_+ \in \mathfrak{H}_+$. Ця симетрія C є обмеженою тоді й лише тоді, коли $\|K\| < 1$.

Зв'язок між оператором C і розв'язком K рівняння Ріккаті має вигляд

$$C = Je^Q, \quad \text{де} \quad Q = \ln\frac{1-T}{1+T} \quad \text{і} \quad T = KP_+ + K^*P_-. \tag{21}$$

Доведення. Якщо A має C-симетрію, то за пунктом (ii) теореми 1 область визначення C визначена за формулою (6) при деякому виборі максимального додатного підпростору $\mathfrak{L}_+$ в $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$. Відповідні підпростори $\mathfrak{L}_\pm$ в (6) є інваріантними відносно дії оператора A і $A = A\restriction_{\mathfrak{L}_+} \dot{+} A\restriction_{\mathfrak{L}_-}$ відносно розкладу (6).

Оскільки $\mathfrak{L}_+$ і $\mathfrak{L}_-$ є J-ортогональними максимальним додатним та максимальним від'ємним підпросторами, відповідно, то правильна формула (8), де самоспряжений оператор T є строгим стиском і антикомутує з J. Такий набір властивостей оператора T еквівалентний до зображення

$$T = KP_+ + K^*P_-, \tag{22}$$

де $K \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-)$ є строгим стиском. Отже, формули (8) можна переписати так

$$\mathfrak{L}_+ = (I + K)\mathfrak{H}_+, \qquad \mathfrak{L}_- = (I + K^*)\mathfrak{H}_-. \tag{23}$$

Зауважимо, що оператор A має зображення (16). У цьому випадку, з формул (23) одержуємо, що

$$\mathcal{D}(A\restriction_{\mathfrak{L}_+}) = (I + K)\mathcal{D}(A_0), \quad \mathcal{D}(A\restriction_{\mathfrak{L}_-}) = (I + K^*)\mathcal{D}(A_1) \quad \text{і} \quad K : \mathcal{D}(A_0) \to \mathcal{D}(A_1). \tag{24}$$

Беручи до уваги (24) та використовуючи [2, Lemma 2.4], приходимо до висновку, що A-інваріантність підпростору $\mathfrak{L}_+$ означає, що оператор K в (23) є сильним розв'язком рівняння Ріккаті (20). (Так само, інваріантність $\mathfrak{L}_-$ означає, що спряжений оператор K^* є сильним розв'язком другого рівняння Ріккаті в (19)). Оператор K є строгим стиском (тобто $\|Kx_+\| < \|x_+\|$ для всіх ненульових $x_+ \in \mathfrak{H}_+$). Якщо, крім того, $\|K\| < 1$, то підпростір $\mathfrak{L}_+$ в (23) є максимальним рівномірно додатним — ця додаткова умова характеризує випадок обмеженого оператора C (див. зауваження 1).

Навпаки, нехай $K \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-)$ — сильний розв'язок рівняння Ріккаті (20). Тоді його спряжений оператор $K^* \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_-, \mathfrak{H}_+)$ є слабким розв'язком рівняння

$$K^*A_1 - A_0K^* - K^*B^*K^* = V_1^*,$$

яке називають спряженим до рівняння (20) (див. відповідну термінологію в [2]). У нашому випадку, з (18) випливає, що це спряжене рівняння збігається з другим рівнянням Ріккаті в (19). Це означає, що $K^* \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_-, \mathfrak{H}_+)$ є слабким розв'язком другого рівняння Ріккаті. Але тоді оператор K^* є й сильним розв'язком (див. [1, Lemma 5.2], [2, Lemma 2.3]).

З означення сильного розв'язку одержуємо, що

$$K\colon \mathcal{D}(A_0) \to \mathcal{D}(A_1), \qquad K^*\colon \mathcal{D}(A_1) \to \mathcal{D}(A_0).$$

Враховуючи ці співвідношення і [2, Lemma 2.4], приходимо до висновку, що підпростори $\mathfrak{L}_\pm$ визначені в (23) є інваріантними відносно A і

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A\restriction_{\mathfrak{L}_+}) \dotplus \mathcal{D}(A\restriction_{\mathfrak{L}_-}),$$

де $\mathcal{D}(A\restriction_{\mathfrak{L}_\pm})$ — області визначення звужень $A\restriction_{\mathfrak{L}_\pm}$ оператора A на підпростори $\mathfrak{L}_\pm$.

За умовами теореми розв'язок K є строгим стиском (тобто, $\|Kx_+\| < \|x_+\|$ для всіх ненульових $x_+ \in \mathfrak{H}_+$). Це означає, що підпростір $\mathfrak{L}_+ = (I+K)\mathfrak{H}_+$ є максимальним додатним підпростором простору Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$. Його ортогональне доповнення відносно індефінітної метрики $[\cdot,\cdot]_J$ збігається з підпростором $\mathfrak{L}_- = (I+K^*)\mathfrak{H}_-$ [11, Твердження 2.6].

Відомо ([3]), що у просторі Крейна $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_J)$ ортогональне доповнення (відносно індефінітної метрики $[\cdot,\cdot]_J$) довільного максимального додатного підпростору є максимальним від'ємним підпростором. Отже, $\mathfrak{L}_-$ є максимальним від'ємним підпростором і пряма сума (6) за допомогою формули (13) визначає C-симетрію для оператора A. Ця C-симетрія є обмеженим оператором тоді і тільки тоді, коли підпростір $\mathfrak{L}_+$ — максимальний рівномірно додатний (Зауваження 1) або, що еквівалентно, коли строгий стиск K задовольняє умову $\|K\| < 1$.

Рівність (21) випливає з доведення теореми 1 та формул (7), (12) і (22). $\square$

Зв'язок між оператором C та відповідним розв'язком рівняння Ріккаті можна зробити прозорішим за допомогою рівнянь (12) і (21). Справді, оскільки

$$(I-T)(I+T)^{-1} = JC = e^Q,$$

то

$$T = (I-e^Q)(I+e^Q)^{-1} = \frac{e^{-Q/2}-e^{Q/2}}{2}\left(\frac{e^{Q/2}+e^{-Q/2}}{2}\right)^{-1} = -\frac{\operatorname{sh}(Q/2)}{\operatorname{ch}(Q/2)} = -\operatorname{th}\frac{Q}{2}.$$

Тоді рівняння Ріккаті (20) набуває вигляду

$$A_1\Big(\operatorname{th}\frac{Q}{2}\Big) - \Big(\operatorname{th}\frac{Q}{2}\Big)A_0 = V_1 - \Big(\operatorname{th}\frac{Q}{2}\Big)V_0\Big(\operatorname{th}\frac{Q}{2}\Big). \qquad (25)$$

Пригадуючи теореми 1 та 2, одержуємо такий наслідок.

Наслідок 1. *Оператор A, визначений в (15) з умовами (17) на потенціал V, має C-симетрію в сенсі означення 1 тоді й тільки тоді, коли рівняння Ріккаті (25) має розв'язок $\operatorname{th}\frac{Q}{2}$. У такому випадку $C = e^{-Q/2}Je^{Q/2}$.*

Використовуючи відомий результат про єдиність розв'язків рівняння Ріккаті ([2, Theorem 5.8]) та теорему 2, отримуємо достатні умови, за яких існує обмежений оператор C.

Наслідок 2. *Нехай оператор A визначений формулою (15) з умовами (17) на потенціал V. Якщо спектри операторів A_0 і A_1 в матричному зображенні (16) оператора A не перетинаються і*

$$d = dist(\sigma(A_0), \sigma_1(A_1)) \ (> 0),$$

а норма потенціалу V задовольняє оцінку $\|V\| < d/\pi$, то оператор A має обмежену C-симетрію.

Доведення. Якщо оператори A_0, A_1 та V задовольняють умови наслідку 2, то з [2, Theorem 5.8] випливає, що існує сильний розв'язок K рівняння Ріккаті K такий, що $\|K\| < 1$. За теоремою 2, це означає існування обмеженої C-симетрії для оператора A. □

4. Приклад. Нехай

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + ir(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

де $r(x)$ є дійсною непарною функцією. Оператор A можна записати у вигляді (15), де

$$A' = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$$

є необмеженим самоспряженим оператором в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$, який комутує з оператором фундаментальної симетрії $J = \mathcal{P}$ (див. означення цього оператора у Вступі), а потенціал $V = ir(x)$ антикомутує з $\mathcal{P}$ і задовольняє умову (17).

Оператор A є самоспряженим у просторі Крейна $(L_2(\mathbb{R}), [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}})$. Фундаментальним розкладом (5) простору Крейна $(L_2(\mathbb{R}), [\cdot,\cdot]_{\mathcal{P}})$ є розклад на простори $\mathfrak{H}_+ = L_2^{even}(\mathbb{R})$ та $\mathfrak{H}_- = L_2^{odd}(\mathbb{R})$, відповідно, простори парних та непарних функцій.

Звуження

$$A_0 = \Big(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\Big)\restriction_{L_2^{even}(\mathbb{R})}, \qquad A_1 = \Big(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\Big)\restriction_{L_2^{odd}(\mathbb{R})}$$

мають дискретний спектр

$$\sigma(A_0) = \Big\{n + \frac{1}{2} \colon n = 0, 2, 4, \dots\Big\}, \qquad \sigma(A_1) = \Big\{n + \frac{1}{2} \colon n = 1, 3, 5, \dots\Big\}.$$

Зрозуміло, що у цьому випадку, $d = \operatorname{dist}(\sigma(A_0), \sigma_1(A_1)) = 1$.

Припустимо, що

$$\operatorname*{essup}_{x\in\mathbb{R}} |r(x)| < \frac{1}{\pi}.$$

Оскільки потенціал V є оператором множення на функцію $ir(x)$ в $L_2(\mathbb{R})$, його норма (як оператора в $L_2(\mathbb{R})$) дорівнює $\operatorname{essup}_{x\in\mathbb{R}} |r(x)|$. Тому, оператор A задовольняє всі умови наслідку 2 і, отже, для нього існує обмежена C-симетрія.

Автор щиро дякує Рецензенту за увагу до роботи і зауваження, які дозволили покращити виклад отриманих результатів.

ЛІТЕРАТУРА

1. S. Albeverio, A.K. Motovilov, Operator integrals with respect to a spectral measure and solutions to some operator equations, Fundamental and Applied Mathematics (to appear); arXiv: math.SP/0410577 v2.
2. S. Albeverio, A. Motovilov, A. Shkalikov, *Bounds on variation of spectral subspaces under J-self-adjoint perturbations*, Integr. equ. oper. theory, **64** (2009), 455–486.
3. T.Ya. Azizov, I.S. Iokhvidov, Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric. Wiley, Chichester, 1989.
4. C.M. Bender, *Making sense of non-Hermitian Hamiltonians*, Rep. Progr. Phys., **70** (2007), №6, 947–1018.
5. C.M. Bender, S. Boettcher, *Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having $\mathcal{PT}$-symmetry*, Phys. Rev. Lett., **80** (1998), 5243–5246.
6. C.M. Bender, D.C. Brody, H.F. Jones, *Complex Extension of Quantum Mechanics*, Phys. Rev. Lett., **89** (2002), №27, 401–405.
7. C.M. Bender, H.F. Jones, *Semiclassical Calculation of the C Operator in $\mathcal{PT}$-Symmetric Quantum Mechanics*, Phys. Lett. A, **328** (2004), 102–109.
8. C.M. Bender, S.P. Klevansky, *Nonunique C operator in PT quantum mechanics*, Phys. Lett. A, **373** (2009), №31, 2670–2674.
9. C.M. Bender, Barnabas Tan, *Calculation of the hidden symmetry operator for a PT-symmetric square well*, J. Phys. A, **39** (2006), №8, 1945–1953.
10. H.F. Jones, J. Mateo, *Equivalent Hermitian Hamiltonian for the non-Hermitian $-x^4$ potential*, Physical Review, D, **73** (2006), 085002.
11. A. Grod, S. Kuzhel, V. Sudilovskaya, *On operators of transition in Krein spaces*, Opuscula Mathematica, **31** (2011), №1, 49–59.
12. R. Kretschmer, L. Szymanowski, *Quasi-Hermiticity in infinite-dimensional Hilbert space*, Physics Letters A, **325** (2004), 112–117.
13. S. Kuzhel, *On pseudo-Hermitian operators with generalized $\mathcal{C}$-symmetries*, Modern Analysis and Applications. The Mark Krein Centenary Conference, Vol. 1: Operator theory and related topics, 375–385, Oper. Teory Adv. Appl., 190, (2009).
14. A. Mostafazadeh, *Pseudo-Hermitian Representation of Quantum Mechanics*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., **7** (2010), 1191–1306.
15. A. Mostafazadeh, *Pseudo-Hermiticity and Generalized PT- and CPT-Symmetries*, J. Math. Phys., **44** (2003), 974–989.
16. S. Pedersen, *Anticommuting self-adjoint operators*, J. Funct. Analysis, **89** (1990), 428–443.

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
veronik@gala.net

Надійшло 23.09.2011
Після переробки 14.02.2012