УДК 517.982

В. В. Михайлюк

БУЛЕВО НЕЗАЛЕЖНІ ПОСЛІДОВНОСТІ І ОДНА ТЕОРЕМА БУРГЕЙНА-РОЗЕНТАЛЯ

V. V. Mykhaylyuk. *Boolean independent sequences and Bourgain-Rosenthal's theorem*, Mat. Stud. **37** (2012), 174–178.

A property of boolean independent sequences of pairs of sets is obtained. This completes the proof of Bourgain-Rosenthal's theorem on narrow operators.

В. В. Михайлюк. *Булево независимые последовательности и одна теорема Бургейна-Розенталя* // Мат. Студії. – 2012. – Т.37, №2. – С.174–178.

Установлено одно свойство булево независимых последовательностей пар множеств, которое заполняет пробел в доказательстве теоремы Бургейна-Розенталя об узких операторах.

1. Вступ. Поняття вузького оператора запроваджено в роботі [1] як узагальнення поняття компактного оператора. У цій же роботі проведено перше систематичне дослідження класу вузьких операторів, проте окремі результати про вузькі оператори фактично були отримані різними математиками раніше (сучасний огляд теорії вузьких операторів опублікований у недавній статті [2]). Одним з найглибших результатів про вузькі оператори є наступна теорема Дж. Бургейна і Г. Розенталя ([3]).

Теорема 1 ([3]). *Нехай X — банахів простір і $T\colon L_1 \to X$ — лінійний обмежений оператор, який не є ізоморфним вкладенням при звуженні на жодний підпростір, ізоморфний до ℓ_1. Тоді T — вузький.*

Один з важливих кроків у доведенні цієї теореми в [3] сформульований у вигляді такої теореми (див. теорема 3.5 в [3]).

Теорема 2 ([3]). *Нехай S — деяка множина, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — рівномірно обмежена послідовність функцій $f_n\colon S \to \mathbb{R}$, $0 < a < b < \infty$, $A_n = \{s \in S\colon |f_n(s)| < a\}$ і $B_n = \{s \in S\colon |f_n(s)| > b\}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, причому послідовність $((A_n, B_n)\colon n \in \mathbb{N})$ булево незалежна. Тоді існує підпослідовність $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ послідовності $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ така, що для довільних $n \in \mathbb{N}$ і набору дійсних скалярів $(c_k)_{k=1}^{n}$ виконується нерівність*

$$\sup_{s\in S}\left|\sum_{k=1}^{n} c_k g_k(s)\right| \geq \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}|c_k|.$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46B20, 46B25.
Keywords: boolean independent sequence, narrow operator.

Замість доведення цього факту автори посилаються на статтю Г. Розенталя [4], вказуючи, що з результатів розділу 2 цієї статті легко отримати доведення даної теореми. Слід зауважити, що зазначений розділ містить 6 результатів, з яких, зокрема, випливає лише слабший варіант теореми 2 для додатних функцій. На це звернув увагу автора даної статті професор М.М. Попов. В даній статті за допомогою однієї властивості булево незалежних послідовностей пар множин дамо повне доведення теореми 2 (теореми 3.5 з [3]).

2. Булево незалежні послідовності. Нехай $\alpha = ((A_n, B_n)\colon n \in \mathbb{N})$, $I, J \subseteq \mathbb{N}$ — скінченні множини такі, що $I \cap J = \varnothing$. Позначимо

$$C_\alpha(I,J) = \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big).$$

Нехай $\alpha = ((A_n, B_n)\colon n \in \mathbb{N})$ — послідовність множин $A_n, B_n \subseteq S$ таких, що $A_n \cap B_n = \varnothing$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, і $T \subseteq S$. Послідовність α називатимемо *булево незалежною на* T, якщо $C_\alpha(I,J) \cap T \neq \varnothing$ для довільних скінченних множин $I, J \subseteq \mathbb{N}$, $I \cap J = \varnothing$.

З означень випливає такий факт.

Твердження 1. *Нехай послідовність* $\alpha = ((A_n, B_n)\colon n \in \mathbb{N})$ — *булево незалежна на* S *і* $I, J \subseteq \mathbb{N}$ — *скінченні множини з* $I \cap J = \varnothing$. *Тоді послідовність* $\alpha' = ((A_n, B_n)\colon n \in \mathbb{N} \setminus (I \cup J))$ *булево незалежна на* $S \cap C_\alpha(I,J)$.

Твердження 2. *Нехай* $\alpha = ((A_n, B_n)\colon n \in \mathbb{N})$ — *булево незалежна на* S *і* $S = S_1 \cup S_2$. *Тоді існує номер* N *такий, що послідовність* $\alpha' = ((A_n, B_n)\colon n > N)$ *булево незалежна на* S_1 *або булево незалежна на* S_2.

Доведення. Припустимо, що послідовність α не є булево незалежною на S_1. Тоді існують скінченні множини $I_1, J_1 \subseteq \mathbb{N}$, $I_1 \cap J_1 = \varnothing$ такі, що $C_\alpha(I_1, J_1) \cap S_1 = \varnothing$. Позначимо $N = \max(I_1 \cap J_2)$. Тоді для довільних скінченних множин натуральних чисел $I_2, J_2 \subseteq (N, +\infty)$, $I_2 \cap J_2 = \varnothing$ маємо

$$C'_\alpha(I_2, J_2) \cap S_2 \supseteq C_\alpha(I_1 \cup I_2, J_1 \cup J_2) \cap S_2 = C_\alpha(I_1 \cup I_2, J_1 \cup J_2) \cap S \neq \varnothing.$$

Тому послідовність α' булево незалежна на S_2. □

Твердження 3. *Нехай* $\alpha = ((A_n, B_n)\colon n \in \mathbb{N})$ — *булево незалежна на* S, $(n_k)_{k=1}^\infty$ — *строго зростаюча послідовність номерів* $n_k \in \mathbb{N}$, $(I_k)_{k=1}^\infty$ *і* $(J_k)_{k=1}^\infty$ — *послідовності скінченних множин* $I_k, J_k \subseteq \mathbb{N} \cap (n_k, n_{k+1})$, $I_k \cap J_k = \varnothing$. *Тоді послідовність* $\alpha' = ((A'_k, B'_k)\colon k \in \mathbb{N})$ *пар* (A'_k, B'_k) *множин* $A'_k = A_{n_k} \cap C_\alpha(I_k, J_k)$ *і* $B'_k = B_{n_k}$ *також булево незалежна на* S.

Доведення. Нехай $I', J' \subseteq \mathbb{N}$ — скінченні множини такі, що $I' \cap J' = \varnothing$. Покладемо $I = \bigcup_{k\in I'} I_k$ і $J = \bigcup_{k\in J'} J_k$. Множини I та J неперетинні і $C_{\alpha'}(I', J') \cap S = C_\alpha(I,J) \cap S \neq \varnothing$. □

3. Поділ множин булево незалежних послідовностей. Наступна властивість булево незалежних послідовностей заповнює прогалину у доведенні теореми 2.

Твердження 4. *Нехай* $\alpha = ((A_n, B_n)\colon n \in \mathbb{N})$ — *булево незалежна на* S *і* $A_n = U_n \cup V_n$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді існують строго зростаюча послідовність* $(n_k)_{k=1}^\infty$ *номерів* $n_k \in \mathbb{N}$ *і послідовність* $(A'_k)_{k=1}^\infty$ *множин* $A'_k \in \{U_{n_k}, V_{n_k}\}$ *такі, що послідовність* $\alpha' = ((A'_k, B'_k)\colon k \in \mathbb{N})$, *де* $B'_k = B_{n_k}$, *також булево незалежна на* S.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли виконується така умова:

(1) існують множина $T \subseteq S$ і булево незалежна на T підпослідовність $\beta = ((A_{i_n}, B_{i_n})\colon n \in \mathbb{N})$ послідовності α такі, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ існують $n > m$ і $A \in \{U_{i_n}, V_{i_n}\}$ такі, що послідовність $((A_{i_k}, B_{i_k})\colon k > n)$ не є булево незалежною на $A \cap T$.

Зауважимо, що без обмеження загальності міркувань ми можемо вважати, що $\beta = \alpha$ і $T = S$, тобто

(2) для кожного $m \in \mathbb{N}$ існують $n = n(m) > m$, $A = A(m) \in \{U_n, V_n\}$ і скінченні множини $I = I(m), J = J(m) \in \mathbb{N} \cap (n, +\infty)$ з $I \cap J = \varnothing$ такі, що $(S \cap A) \cap C_\alpha(I, J) = \varnothing$.

Використовуючи умову (2) побудуємо зростаючі послідовності $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ і $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ номерів $m_k, n_k \in \mathbb{N}$ такі, що

$$1 = m_1 < n_1 = n(m_1) < m_2 = \max(I(m_1) \cup J(m_1)) < n_2 = n(m_2) <$$
$$< m_3 = \max(I(m_2) \cup J(m_2)) < n_3 = n(m_3) < \ldots$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ покладемо $I_k = I(m_k)$, $J_k = J(m_k)$, $A'_k = U_{n_k}$, якщо $A(m_k) = V_{n_k}$, і $A'_k = V_{n_k}$, якщо $A(m_k) = U_{n_k}$. Зауважимо, що за умовою (2),

$$P_k = S \cap A'_k \cap C_\alpha(I_k, J_k) = S \cap A'_k \cap C_\alpha(I_k, J_k)$$

для кожного $k \in \mathbb{N}$. З твердження 3 випливає, що послідовність $((P_k, B'_k)\colon k \in \mathbb{N})$ булево незалежна на S. Тому послідовність $((A'_k, B'_k)\colon k \in \mathbb{N})$ також булево незалежна на S.

Тепер нехай (1) не виконується, тобто виконується умова:

(3) для довільних множини $T \subseteq S$ і булево незалежної на T підпослідовності $\beta = ((A_{i_n}, B_{i_n})\colon n \in \mathbb{N})$ послідовності α існує номер $m \in \mathbb{N}$ такий, що для довільних $n > m$ і $A \in \{U_{i_n}, V_{i_n}\}$ послідовність $((A_{i_k}, B_{i_k})\colon k > n)$ булево незалежна на $A \cap T$.

Індукцією за k побудуємо строго зростаючу послідовність $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ номерів $n_k \in \mathbb{N}$ і послідовність $(A'_k)_{k=1}^{\infty}$ множин $A'_k \in \{U_{n_k}, V_{n_k}\}$ такі, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ послідовність $\alpha_k = ((P_i^{(k)}, Q_i^{(k)}) : i \in \mathbb{N})$ пар

$$(P_i^{(k)}, Q_i^{(k)}) = \begin{cases} (A'_i, B'_i), & i \le k, \\ (A_{i+n_k-k}, B_{i+n_k-k}), & i > k, \end{cases}$$

булево незалежна на S.

За умовою (3), застосованою до послідовності і α множини S, виберемо номер n_1 і множину $A'_1 \in \{U_{n_1}, V_{n_1}\}$ так, що послідовність $((A_n, B_n)\colon n > n_1)$ булево незалежна на $A'_1 \cap S$. Тоді послідовність

$$\alpha_1 = ((A'_1, B'_1), (A_{n_1+1}, B_{n_1+1}), (A_{n_1+2}, B_{n_1+2}), \ldots)$$

булево незалежна на S.

Припустимо, що скінченні послідовності $(n_i)_{i=1}^{k}$ і $(A'_i)_{i=1}^{k}$ такі, що послідовності $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ булево незалежні на множині S. Позначимо через $\mathcal{T}$ систему всіх множин $T = (\bigcap_{i \in I} A'_i) \cap (\bigcap_{j \in J} B'_j)$, де $\{1, 2, \ldots, k\} = I \sqcup J$. Зауважимо, що система $\mathcal{T}$ скінченна і, тому, за твердженням 1 послідовність $\beta_k = ((A_n, B_n)\colon n > n_k)$ булево незалежна на кожній множині $T \in \mathcal{T}$. Застосовуючи умову (3) до послідовності β_k і кожної множини $T \in \mathcal{T}$ знайдемо номер $n_{k+1} > n_k$ такий, що послідовність $\beta_{k+1} = ((A_n, B_n)\colon n > n_{k+1})$ булево незалежна на кожній множині $A \cap T$, де $A \in \{U_{n_{k+1}}, V_{n_{k+1}}\}$ і $T \in \mathcal{T}$. Виберемо довільно $A'_{k+1} \in \{U_{n_{k+1}}, V_{n_{k+1}}\}$. Зауважимо також, що за твердженням 1 послідовність β_{k+1}

булево незалежна на кожній множині $B_{n_{k+1}} \cap T$, де $T \in \mathcal{T}$. Врахувавши, що $B'_{k+1} = B_{n_{k+1}}$, одержимо, що послідовність

$$\alpha_{k+1} = ((A'_1, B'_1), \ldots, (A'_{k+1}, B'_{k+1}), (A_{n_{k+1}+1}, B_{n_{k+1}+1}), (A_{n_{k+1}+2}, B_{n_{k+1}+2}), \ldots)$$

булево незалежна на S.

Тепер зауважимо, що для будь-яких скінченних множин $I, J \subseteq \mathbb{N}$, $I \cap J = \varnothing$ і $\max(I \cup I) \leq k$ маємо $C'_\alpha(I, J) = C_{\alpha_k}(I, J)$. Тому послідовність α' булево незалежна на S. $\square$

4. Доведення теореми Бургейна-Розенталя.

Доведення теореми 2. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $A_n^{(1)} = \{s \in S\colon 0 \leq f_n(s) < a\}$, $A_n^{(0)} = \{s \in S\colon 0 < -f_n(s) < a\}$, $B_n^{(1)} = \{s \in S\colon f_n(s) > b\}$ і $B_n^{(0)} = \{s \in S\colon -f_n(s) > b\}$. За допомогою твердження 4 побудуємо булево незалежну на S послідовність пар $((A'_k, B'_k)\colon k \in \mathbb{N})$ множин $A'_k \in \{A_{n_k}^{(1)}, A_{n_k}^{(0)}\}$ і $B'_k \in \{B_{n_k}^{(1)}, B_{n_k}^{(0)}\}$. Тепер виберемо $i, j \in \{0, 1\}$ так, що множина $N_1 = \{k \in \mathbb{N}\colon A'_k = A_{n_k}^{(i)}, B'_k = B_{n_k}^{(j)}\}$ нескінченна. Без обмеження загальності можна вважати, що $N_1 = \mathbb{N}$.

Покладемо $g_k = f_{n_k}$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ і покажемо, що підпослідовність $(g_k)_{k=1}^\infty$ шукана. Нехай $(c_k)_{k=1}^n$ — фіксований набір дійсних скалярів. Покладемо $I = \{k \leq n\colon c_k \geq 0\}$ і $J = \{k \leq n\colon c_k < 0\}$ і візьмемо довільні точки $s_1 \in C_\alpha(I, J)$ і $s_2 \in C_\alpha(J, I)$, де $\alpha = ((A'_k, B'_k)\colon k \in \mathbb{N})$. Спочатку розглянемо випадок, коли $i = j = 1$, тобто $g_k(s) \geq 0$ для довільних $k \in \mathbb{N}$ і $s \in A'_k \cup B'_k$. Тепер маємо

$$\left|\sum_{k=1}^n c_k g_k(s_1)\right| + \left|\sum_{k=1}^n c_k g_k(s_2)\right| \geq \left(-\sum_{k\in J} c_k g_k(s_1) - \sum_{k\in I} c_k g_k(s_1)\right) +$$
$$+ \left(\sum_{k\in I} c_k g_k(s_2) + \sum_{k\in J} c_k g_k(s_2)\right) \geq \left(-b\sum_{k\in J} c_k - a\sum_{k\in I} c_k\right) + \left(b\sum_{k\in I} c_k + a\sum_{k\in J} c_k\right) =$$
$$= (b-a)\left(\sum_{k\in I} c_k - \sum_{k\in J} c_k\right).$$

Подібна оцінка одержується у випадку, коли $i = j = 0$, тобто $g_k(s) < 0$ для будь-яких $k \in \mathbb{N}$ і $s \in A'_k \cup B'_k$.

Тепер нехай $i = 0$ та $j = 1$, тобто $g_k(s') < 0$ і $g_k(s'') \geq 0$ для будь-яких $k \in \mathbb{N}$, $s' \in A'_k$ і $s'' \in B'_k$. Тоді маємо

$$\left|\sum_{k=1}^n c_k g_k(s_1)\right| + \left|\sum_{k=1}^n c_k g_k(s_2)\right| = \left(\sum_{k\in J} c_k g_k(s_1) + \sum_{k\in I} c_k g_k(s_1)\right) -$$
$$- \left(\sum_{k\in I} c_k g_k(s_2) + \sum_{k\in J} c_k g_k(s_2)\right) \geq \left(-b\sum_{k\in J} c_k + a\sum_{k\in I} c_k\right) + \left(b\sum_{k\in I} c_k - a\sum_{k\in J} c_k\right) =$$
$$= (b+a)\left(\sum_{k\in I} c_k - \sum_{k\in J} c_k\right).$$

Подібно міркуємо у випадку, коли $i = 1$ і $j = 0$. Отже, так чи інакше, маємо

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k g_k(s_1)\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} c_k g_k(s_2)\right| \geq (b-a)\left(\sum_{k\in I} c_k - \sum_{k\in J} c_k\right) = (b-a)\sum_{k=1}^{n} |c_k|,$$

тому

$$\sup_{s\in S}\left|\sum_{k=1}^{n} c_k g_k(s)\right| \geq \frac{1}{2}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} c_k g_k(s_1)\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} c_k g_k(s_2)\right|\right) \geq \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} |c_k|. \qquad \square$$

На завершення висловлюю щиру подяку професору М. М. Попову за цінні поради і допомогу при написанні цієї статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. A.M. Plichko, M.M. Popov, *Symmetric function spaces on atomless probability spaces,* Diss. Math. (Rozpr. mat.), **306** (1990), 1–85.
2. M. Popov, *Narrow operators (a survey),* Function Spaces IX, Banach Center Publ., Warszawa, **92** (2011), 299–326.
3. J. Bourgain, H. Rosenthal, *Applications of the theory of semi-embeddings to Banach space theory,* J. Func. Anal., **52** (1983), 149–188.
4. H. Rosenthal, *Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach spaces,* Bull. Amer. Math. Soc., **84** (1971), 13–36.

Чернівецький національний університет
факультет прикладної математики
кафедра математичного аналізу
vmykhaylyuk@ukr.net

Надійшло 27.12.2011