

УДК 517.5

А. Н. АДАМОВ

## О ПРОИЗВОДНЫХ СОПРЯЖЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В $L_0$

A. N. Adamov. *On derivatives of conjugate trigonometric polynomials in  $L_0$* , Mat. Stud. **37** (2012), 147–154.

We consider Szegő type inequality, where the norm of the derivatives of the conjugate trigonometric polynomials is measured by the norm of the polynomial itself in  $L_0$  space. We improve the estimate of the constant in it, which was got by V. V. Arestov before.

А. Н. Адамов. *О производных сопряженных тригонометрических полиномов в  $L_0$*  // Мат. Студії. – 2012. – Т.37, №2. – С.147–154.

Рассматривается неравенство типа Сеге, оценивающее норму производных сопряжённого тригонометрического полинома через норму самого полинома в пространстве  $L_0$ . Улучшается полученная ранее В. В. Арестовым оценка постоянной в этом неравенстве.

**1. Введение.** Пусть  $\mathbf{T}_n$  множество тригонометрических полиномов

$$T_n(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}$$

порядка  $n$  с коэффициентами  $a_k$  из поля  $\mathbb{C}$  комплексных чисел. Полином

$$\tilde{T}_n(t) = i \left( \sum_{k=1}^n a_k e^{ikt} - \sum_{k=1}^n a_{-k} e^{-ikt} \right)$$

называют *сопряженным* для  $T_n$ . Определим функционал  $\|f\|_p$  на отрезке при  $0 \leq p \leq \infty$  обычным образом

$$\|f\|_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty, \quad (1)$$

$$\|f\|_0 = \lim_{p \rightarrow +0} \|f\|_p = \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(t)| dt \right), \quad (2)$$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_C = \operatorname{ess\,sup} \{|f(t)| : 0 \leq t \leq 2\pi\}. \quad (3)$$

Следуя Малеру ([1]), функционал  $\|f\|_0$  будем называть *мерой функции*  $f$ .

Один из первых вопросов который возникает в связи с изучением сопряженных тригонометрических полиномов — о связи нормы сопряженного полинома с нормой исходного полинома. Если обозначить

$$B_{n,p} = \sup \left\{ \|\tilde{T}_n\|_p / \|T_n\|_p : T_n \in \mathbf{T}_n \right\},$$

2010 *Mathematics Subject Classification*: 26D10.

*Keywords*: derivatives of the polynomials, conjugate trigonometric polynomial,  $L_0$  space, Szegő inequality.  
doi:10.30970/ms.37.2.147-154

то давно известна асимптотическая оценка  $B_{n,\infty} = \frac{2}{\pi} \ln n + O(1)$  [2, т. I, глава II, §12]. В 1990 г. Л. В. Тайков ([3]) определил значение

$$B_{n,\infty} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} \operatorname{ctg} \frac{2k+1}{2(n+1)}.$$

Относительно других значений  $p$ ,  $0 \leq p < \infty$ , В. В. Арестов ([4]) доказал, что  $B_{n,0} \geq B_{n,p}$ . Поэтому принципиально важным является нахождение постоянной  $B_{n,0}$ . Результат В. В. Арестова выглядит так

$$\frac{1}{n} C_{2n}^{n+1} \leq B_{n,0} \leq 2C_{2n}^{n+1}.$$

В работе автора ([5]) получено уточнение этой двусторонней оценки, которое приводит к выводу, что

$$\frac{B_{n,0}}{C_{2n}^{n+1}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Дальнейшее исследование свойств сопряженных тригонометрических полиномов  $\tilde{T}_n$  относится к их производным  $\tilde{T}_n^{(r)}$ , а именно к оценке их норм через нормы самих полиномов. История начинается с 1928 г., когда Г. Сеге ([6]) доказал такую оценку

$$\|T'_n \cos \alpha + \tilde{T}'_n \sin \alpha\|_\infty \leq n \|T_n\|_\infty, \quad T_n \in \mathbf{T}_n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

а А. Зигмунд распространил (1959 г. — [2, т. II, глава X, (3.25)]) (4) на нормы  $\|\cdot\|_p$  при  $1 \leq p \leq \infty$

$$\|T'_n \cos \alpha + \tilde{T}'_n \sin \alpha\|_\infty \leq n \|T_n\|_\infty, \quad T_n \in \mathbf{T}_n, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (5)$$

Из (5) вытекает, что

$$\|\tilde{T}_n^{(r)}\|_p \leq n^r \|T_n\|_p, \quad T_n \in \mathbf{T}_n, \quad r \geq 1, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (6)$$

Неравенства (5) и (6) точные и обращаются в равенства на полиномах  $T_n(t) = c \cos n(t - t_0)$ . Для  $p = 0$  В. В. Арестовым доказано ([4]), что постоянная в неравенстве типа (6) является мерой некоторого полинома

$$u_{n,r}(t) = \begin{cases} 2 \sum_{k=1}^n k^r C_{2n}^k \sin kt, & r \text{ чётное,} \\ 2 \sum_{k=1}^n k^r C_{2n}^k \cos kt, & r \text{ нечётное,} \end{cases} \quad (7)$$

и

$$\|\tilde{T}_n^{(r)}\|_0 \leq \|u_{n,r}\|_0 \cdot \|T_n\|_0, \quad r \geq 1. \quad (8)$$

Для  $0 < p < 1$  неравенство (8) остается верным  $\|\tilde{T}_n^{(r)}\|_p \leq \|u_{n,r}\|_0 \cdot \|T_n\|_p$ , но уже не является точным. Для  $\|u_{n,r}\|_0$  получены следующие оценки

$$\|u_{n,r}\|_0 = n^r, \quad r \geq n \ln 2n, \quad (9)$$

$$\|u_{n,r}\|_0 \leq 2n^r C_{2n}^{n+1}, \quad 1 \leq r < n \ln 2n. \quad (10)$$

В настоящей работе оценка (10) уточняется. При разбиении промежутка  $1 \leq r < n \ln 2n$  на два промежутка, были получены следующие оценки

$$\|u_{n,r}\|_0 \leq C(r) C_{2n}^{n+1}, \quad 1 \leq r \leq \frac{n}{2} \text{ и } C(r) \text{ зависит только от } r, \quad (11)$$

$$\|u_{n,r}\|_0 \leq 4 \left( \max \left\{ n, \sqrt{\frac{nr}{2}} \right\} \right)^r C_{2n}^{m+k_0}, \quad \frac{n}{2} < r < n \ln 2n, \text{ и } k_0 = \left[ \frac{\sqrt{r^2 + 8nr} - r}{4} \right]. \quad (12)$$

Автор благодарен своему научному руководителю проф. Э. А. Стороженко за ценные советы и замечания при обсуждении полученных результатов.

**2. Вспомогательные леммы и факты.** Пусть  $a_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , некоторая последовательность. Как обычно, обозначим

$$\Delta^0 a_k = a_k, \quad \Delta^m a_k = \Delta^{m-1} a_k - \Delta^{m-1} a_{k+1} = \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j a_{k+j}, \quad \text{где } a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0.$$

**Лемма 1.** Пусть  $W_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \sin kt$  и  $V_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \cos kt$  — тригонометрические полиномы порядка  $n$ . Тогда для любого  $0 \leq m \leq n-1$  справедливы неравенства

$$\|W_n\|_0 \leq \sum_{j=0}^{m-1} 2^{m-1-j} |\Delta^j a_1| + \sum_{k=1}^n |\Delta^m a_k|, \quad \|V_n\|_0 \leq \sum_{j=0}^{m-1} 2^{m-1-j} |\Delta^j a_1| + \sum_{k=1}^n |\Delta^m a_k|. \quad (13)$$

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть полином  $W_n$ , для  $V_n$  рассуждения аналогичны. Применим преобразование типа Абеля, для чего обозначим  $z = e^{it}$ ,  $|z| = 1$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  и умножим полином  $W_n$  на  $(z-1)^m$ . Покажем, что

$$\begin{aligned} i(z-1)^m W_n(t) &= - \sum_{k=0}^{m-1} \Delta^k a_1 \left( \frac{z^m + (-1)^k}{2} \right) (z-1)^{m-1-k} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \Delta^m a_k \left( \frac{z^{k+m} - (-1)^m z^{-k}}{2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Действительно, при  $m=0$ ,  $W_n(t) = \sum_{k=1}^n \Delta^0 a_k \left( \frac{z^k - z^{-k}}{2i} \right)$ . При  $m=1$  имеем

$$i(z-1) W_n(t) = -a_1 \left( \frac{z+1}{2} \right) + \sum_{k=1}^n \Delta^1 a_k \left( \frac{z^{k+1} + z^{-k}}{2} \right).$$

По индукции легко получаем (14). Так как  $|z-1| = 2 \sin \frac{t}{2} \leq 2$  и  $|z| = 1$ , то

$$\left| \left( 2 \sin \frac{t}{2} \right)^m W_n(t) \right| \leq \sum_{k=0}^{m-1} 2^{m-1-k} |\Delta^k a_1| + \sum_{k=1}^n |\Delta^m a_k|.$$

Отсюда следуют соответствующие неравенства для меры функции  $(2 \sin \frac{t}{2})^m W_n(t)$  по определению (2)

$$\left\| \left( 2 \sin \frac{t}{2} \right)^m W_n(t) \right\|_0 \leq \sum_{j=0}^{m-1} 2^{m-1-j} |\Delta^j a_1| + \sum_{k=1}^n |\Delta^m a_k|.$$

Мера функций мультипликативна, и, так как  $\|2 \sin \frac{t}{2}\|_0 = 1$ , то из этих неравенств следует (13).  $\square$

Для оценки меры полинома  $u_{n,r}$  (7) воспользуемся леммой 1, где  $a_k = k^r C_{2n}^{m+k}$ . Чтобы исследовать поведение  $\Delta^m a_k$ , выразим биномиальные коэффициенты через гамма-функцию и перейдем от натуральных  $k$  к непрерывному аргументу. В результате возникают функции  $f$  и  $g$

$$f(x) = \frac{x^r \Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+x+1) \Gamma(n-x+1)} = x^r g(x), \quad g(x) = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+x+1) \Gamma(n-x+1)},$$

и  $a_k = f(k)$ . Тогда возможно конечные разности  $\Delta^m a_k$  выразить через производные функции  $f$ . Сначала получим два вспомогательных соотношения.

**Лемма 2.** Пусть  $n \geq 3$  и  $0 \leq x \leq \frac{n}{\sqrt{2}}$ . Тогда справедливо неравенство

$$g(x) \leq g(0) \cdot \exp\left(\frac{1}{18} - \frac{2x^2}{3n}\right). \quad (15)$$

*Доказательство.* Записывая для гамма-функции формулу Стирлинга  $\ln \Gamma(\alpha + 1) = \ln \sqrt{2\pi} + (\alpha - \frac{1}{2}) \ln \alpha - \alpha + \frac{\theta}{12\alpha}$ ,  $0 < \theta < 1$ , получим

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{g(x)}{g(0)}\right) &= \ln\left(\frac{(\Gamma(n+1))^2}{\Gamma(n+x+1)\Gamma(n+x-1)}\right) \leq 2\left(\frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln n + n \ln n - n\right) + \\ &+ \frac{1}{6n} - \left(\frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln(n+x) + (n+x) \ln(n+x) - (n+x)\right) - \\ &- \left(\frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln(n-x) + (n-x) \ln(n-x) - (n-x)\right) = \\ &= \ln n - \frac{1}{2} (\ln(n+x) + \ln(n-x)) + 2n \ln n - \\ &- (n+x) \ln(n+x) - (n-x) \ln(n-x) + \frac{1}{6n} = \\ &= \ln n - \frac{1}{2} \left(\ln n + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) + \ln n + \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) + 2n \ln n - \\ &- n \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(\ln n + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) - n \left(1 - \frac{x}{n}\right) \left(\ln n + \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) + \frac{1}{6n}. \end{aligned}$$

Обозначим для удобства записи  $v = \frac{x}{n}$ , тогда

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{g(x)}{g(0)}\right) &\leq -\frac{1}{2} \ln(1-v^2) + 2n \ln n - n(1+v)(\ln n + \ln(1+v)) - \\ &- n(1-v)(\ln n + \ln(1-v)) + \frac{1}{6n} = \\ &= -\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(1-v^2) - nv(\ln(1+v) - \ln(1-v)) + \frac{1}{6n} = \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(v^2 + \frac{v^4}{2} + \frac{v^6}{3} + \dots + \frac{v^{2k}}{k} + \dots\right) - \\ &- nv \left(2v + \frac{2v^3}{3} + \dots + \frac{2v^{2k+1}}{2k+1} + \dots\right) + \frac{1}{6n} \leq \\ &\leq nv^2 + n \frac{v^4}{2} + \frac{v^2}{2} + n \left(\frac{v^6}{3} + \frac{v^8}{3} \dots + \frac{v^{2k}}{3} + \dots\right) + \frac{1}{6n} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{v^4}{2} + \frac{v^6}{2} + \dots + \frac{v^{2k}}{2} + \dots\right) - 2nv^2 - \frac{2nv^4}{3} = \\ &= -nv^2 - \frac{nv^4}{6} + \frac{v^2}{2} + \frac{nv^4}{3} \cdot \frac{v^2}{1-v^2} + \frac{v^2}{4} \cdot \frac{v^2}{1-v^2} + \frac{1}{6n}. \end{aligned}$$

Так как  $v^2 = \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{1}{2}$ , то возвращаясь к прежним обозначениям имеем

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{g(x)}{g(0)}\right) &\leq -\frac{x^2}{n} - \frac{x^4}{6n^3} + \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^4}{3n^3} \cdot 1 + \frac{x^2}{4n^2} \cdot 1 + \frac{1}{6n} = \\ &= -\frac{x^2}{n} + \frac{1}{12n} \left(2 + 9\frac{x^2}{n} + 2\frac{x^4}{n^2}\right) = \\ &= \frac{1}{6n} - \frac{x^2}{n} \left(1 - \frac{3}{4n} - \frac{x^2}{6n^2}\right) \leq \frac{1}{18} - \frac{x^2}{n} \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{18} - \frac{2x^2}{3n}. \end{aligned}$$

Отсюда и следует (15).  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $0 \leq x \leq \frac{n}{\sqrt{2}}$  и  $m > 0$ . Тогда  $|g^{(m)}(x)| \leq \frac{Cx^m}{n^m} |g(x)|$ , где коэффициент  $C$  зависит только от  $m$ .

*Доказательство.* Найдем первую производную  $g$

$$g'(x) = g(x) \left( \frac{\Gamma'(n-x+1)}{\Gamma(n-x+1)} - \frac{\Gamma'(n+x+1)}{\Gamma(n+x+1)} \right).$$

Обозначим  $\varphi(x) = \frac{\Gamma'(n-x+1)}{\Gamma(n-x+1)} - \frac{\Gamma'(n+x+1)}{\Gamma(n+x+1)}$ ,  $0 \leq x \leq n$ . Тогда  $g'(x) = \varphi(x)g(x)$ ,  $g''(x) = (\varphi'(x) + \varphi^2(x))g(x)$ ,  $g'''(x) = (\varphi''(x) + 3\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi^3(x))g(x)$ , и в итоге по индукции имеем

$$g^{(m)}(x) = g(x) \sum_{\alpha_j \in \mathbb{Z}_+ : \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j(j+1)=m} C_{k,\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1}} \prod_{j=0}^{m-1} (\varphi^{(j)}(x))^{\alpha_j}, \quad (16)$$

где  $C_{k,\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1}}$  — некие целочисленные коэффициенты. В сумму (16) входят члены вида  $\varphi^m$ ,  $\varphi^{(m-1)}$ ,  $\varphi\varphi^{(m-2)}$ ,  $\varphi^2\varphi^{(m-3)}$ , и другие. Каждый из них при дифференцировании, очевидно, что представляется суммой некоторого числа членов более высокого порядка  $m+1$ , и, так как для  $m=1, 2, 3$  формула (16) верна, в общем случае имеем

$$\begin{aligned} g^{(m+1)}(x) &= g'(x) \sum_{\sum \alpha_j(j+1)=m} C_{k,\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1}} \prod_{j=0}^{m-1} (\varphi^{(j)}(x))^{\alpha_j} + \\ &+ g(x) \left( \sum_{\sum \alpha_j(j+1)=m} C_{k,\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1}} \prod_{j=0}^{m-1} (\varphi^{(j)}(x))^{\alpha_j} \right)' = \\ &= g(x) \sum_{\sum \alpha_j(j+1)=m} C_{k,\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1}} \varphi(x) \prod_{j=0}^{m-1} (\varphi^{(j)}(x))^{\alpha_j} + \\ &+ g(x) \sum_{\sum \alpha_j(j+1)=m} C_{k,\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1}} \left( \prod_{j=0}^{m-1} (\varphi^{(j)}(x))^{\alpha_j} \right)' = \\ &= g(x) \sum_{\sum \alpha_j(j+1)=m+1} C_{k,\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1},\alpha_m} \prod_{j=0}^m (\varphi^{(j)}(x))^{\alpha_j}. \end{aligned}$$

Для оценки производных функции  $\varphi$  выразим ее через пси-функцию

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

следующим образом:  $\varphi(x) = \psi(n-x+1) - \psi(n+x+1)$ . Нам понадобятся соотношения 6.354 и 6.356 из монографии [7]

$$\psi(z) - \psi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{y+k} - \frac{1}{z+k} \right) \text{ и } \psi^{(j)}(z) = (-1)^{j+1} j! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^{j+1}}.$$

Тогда имеем

$$\varphi(x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n-x+1+k} - \frac{1}{n+x+1+k} \right). \quad (17)$$

Отсюда несложно увидеть, что  $\varphi(x)$  монотонна при  $0 \leq x \leq n$ , и для дальнейшей оценки  $\varphi$  заметим, что при целых значениях  $x$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & - \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \left( \frac{1}{n-x+1+k} - \frac{1}{n+x+1+k} \right) = - \sum_{k=0}^{2x-1} \frac{1}{n-x+1+k} + \\ & + \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=m-2x+1}^m \frac{1}{n+x+1+k} = - \sum_{k=0}^{2x-1} \frac{1}{n-x+1+k}. \end{aligned}$$

И соответственно

$$\frac{2x}{n} \leq |\varphi(x)| \leq \frac{2x}{n-x} \leq \frac{Cx}{n}. \quad (18)$$

С учетом монотонности  $\varphi$  (18) распространяется на все  $0 \leq x \leq \frac{n}{\sqrt{2}}$ . Аналогично из (17) имеем

$$\varphi^{(j)}(x) = (-1)^{j+1} j! \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(n-x+1+k)^{j+1}} - \frac{1}{(n+x+1+k)^{j+1}} \right)$$

и

$$|\varphi^{(j)}(x)| \leq j! \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(n-x+1+k)^{j+1}} - \frac{1}{(n+x+1+k)^{j+1}} \right) \leq \frac{2Cx}{n^{j+1}},$$

где  $C$  зависит только от  $j$ . Последнее неравенство так же справедливо не только для целых  $x$ . Подставляя эти соотношения в (16), получаем требуемое неравенство.  $\square$

**Лемма 4.** Для  $a_k = k^r C_{2n}^{m+k}$  и  $0 \leq r \leq \frac{n}{2}$  выполняется неравенство  $|\Delta^{r+4} a_k| \leq C \frac{C_{2n}^{n+1}}{n^2}$ .

*Доказательство.* Так как  $a_k = f(k)$ , то, пользуясь выражением конечной разности через производную в промежуточной точке [8, с. 159, следствие 1], получаем

$$\Delta^m a_k = \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j f(k+j) = (-1)^m \Delta_1^m f(x) = (-1)^m f^{(m)}(k+\theta m), \quad 0 < \theta < 1. \quad (19)$$

Полагая  $m = r+4$  имеем в (19)  $|\Delta^{r+4} a_k| = |f^{(r+4)}(k+\theta(r+4))|$ ,  $0 < \theta < 1$ . Представляя  $f(x) = x^r g(x)$  имеем

$$f^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{\min(m,r)} \frac{C_m^j r!}{(r-j)!} x^{r-j} g^{(m-j)}(x), \quad \text{и} \quad f^{(r+4)}(x) = \sum_{j=0}^r \frac{C_{r+4}^j r!}{(r-j)!} x^{r-j} g^{(r+4-j)}(x).$$

Пользуясь леммой 3 при  $0 \leq x \leq \frac{n}{\sqrt{2}}$  получаем

$$|f^{(r+4)}(x)| \leq \sum_{j=0}^r \frac{C_{r+4}^j r!}{(r-j)!} x^{r-j} |g^{(r+4-j)}(x)| \leq \frac{1}{n^2} |g(x)| \sum_{k=1}^{r+2} C_k \left( \frac{x^2}{n} \right)^k,$$

где  $C_k$  некоторые коэффициенты, зависящие только от  $r$  и  $k$ . Для удобства обозначая  $y = \frac{x^2}{n}$  и  $P(y) = \sum_{k=1}^{r+2} C_k y^k$ , при помощи леммы 2 получаем

$$|f^{(r+4)}(x)| \leq \frac{1}{n} |g(0)| |P(y)| \exp \left( \frac{1}{18} - \frac{2y}{3} \right).$$

Так как  $|P(y)| \exp \left( \frac{1}{18} - \frac{2y}{3} \right)$  очевидно стремится к 0 при  $y \rightarrow +\infty$ , то эта величина ограничена на  $0 \leq y \leq +\infty$  некоторой величиной  $C$ , зависящей только от  $r$ . Отсюда

следует, что лемма справедлива при  $k + (r + 4) \leq \frac{n}{\sqrt{2}}$ . При  $k + (r + 4) \geq \frac{n}{\sqrt{2}}$  очевидно  $a_k = k^r C_{2n}^{n+k}$  монотонно убывают, и  $|\Delta^{r+4} a_k| \leq a_k$ . Как несложно заметить, тогда  $a_k \leq C \frac{C_{2n}^{n+1}}{n^2}$ , и лемма справедлива при таких  $k$ .  $\square$

**Замечание.** При выборе  $m = r + 4$  второе слагаемое в правой части (13) меньше первого по порядку. При меньших  $m$  такого добиться этим методом нельзя, большее  $m$  ничего не изменяет по-существу во втором слагаемом, но увеличивает первое.

### 3. Основной результат.

**Теорема.** Пусть  $T_n$  — тригонометрический полином порядка  $n$ ,  $\tilde{T}_n$  — сопряженный к нему,  $1 \leq r < n \ln 2n$ . Тогда

$$\left\| \tilde{T}_n^{(r)} \right\|_0 \leq C_{2n}^{n+1} \left( \sum_{k=1}^{r+4} 2^{r+5-k} k^r + \frac{C_r}{n} \right) \cdot \|T_n\|_0, \quad 1 \leq r \leq \frac{n}{2}, \quad (20)$$

$$\left\| \tilde{T}_n^{(r)} \right\|_0 \leq 4 \left( \max \left( n, \sqrt{\frac{nr}{2}} \right) \right)^r C_{2n}^{n+k_0} \cdot \|T_n\|_0, \quad \frac{n}{2} \leq r < n \ln 2n, \quad (21)$$

где  $C_r$  — коэффициент зависящий только от  $r$ , а  $k_0 = \left\lfloor \frac{\sqrt{r^2 + 8nr} - r}{4} \right\rfloor$ .

*Доказательство.* Из (8), следует, что для получения (20) и (21) необходимо оценить меру полинома  $u_{n,r}$ . При  $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$  воспользуемся первой леммой, считая  $m = r + 4$ ,

$$\|u_{n,r}\|_0 \leq \sum_{j=0}^{r+3} 2^{r+4-j} |\Delta^j a_1| + 2 \sum_{k=1}^n |\Delta^{r+4} a_k|. \quad (22)$$

Для первого слагаемого в (22), учитывая, что  $|\Delta^j a_1| \leq a_{j+1}$ , получаем

$$\sum_{j=0}^{r+3} 2^{r+4-j} |\Delta^j a_1| \leq \sum_{k=1}^{r+4} 2^{r+5-k} a_k = \sum_{k=1}^{r+4} 2^{r+5-k} k^r C_{2n}^{n+k} \leq C_{2n}^{n+1} \sum_{k=1}^{r+4} 2^{r+5-k} k^r.$$

Для второго слагаемого в (22), пользуясь леммой 4, имеем

$$2 \sum_{k=1}^n |\Delta^{r+4} a_k| \leq 2 \sum_{k=1}^n C \frac{C_{2n}^{n+1}}{n^2} = C \frac{C_{2n}^{n+1}}{n}.$$

Отсюда сразу следует (20).

При  $\frac{n}{2} \leq r < n \ln 2n$  применим к  $u_{n,r}$  первую лемму с  $m = 1$

$$\|u_{n,r}\|_0 \leq 2 |a_1| + 2 \sum_{k=1}^n |\Delta a_k|. \quad (23)$$

Так как  $|\Delta a_k| = f'(k + \theta)$ ,  $0 < \theta < 1$ , имеем

$$f'(x) = r x^{r-1} g(x) + x^r g'(x) = r x^{r-1} g(x) + x^r \varphi(x) g(x) = x^{r-1} g(x) (r + x \varphi(x)).$$

Так как последовательность  $a_k$  монотонно возрастает только при  $r \geq n \ln 2n$  (см. [4]), то  $f'(x)$  обращается в 0 на  $0 \leq x \leq n$ . Так как на этом промежутке  $\varphi(x)$  монотонно убывает, то ноль у  $f'(x)$  только 1, который обозначим  $x_0$ . Для оценки  $x_0$  воспользуемся неравенством (18). Тогда

$$\frac{\sqrt{r^2 + 8nr} - r}{4} \leq x_0 \leq \sqrt{\frac{nr}{2}}, \quad \frac{n}{2} \leq r \leq 2n, \quad \frac{\sqrt{r^2 + 8nr} - r}{4} \leq x_0 \leq n, \quad 2n \leq r < n \ln 2n.$$

Соответственно  $\Delta a_k$  сначала отрицательны, потом положительны, и

$$\sum_{k=1}^n |\Delta a_k| \leq 2 \sup_k a_k - a_1 \leq 2f(x_0) - a_1.$$

Тогда из (23) следует, что  $\|u_{n,r}\|_0 \leq 4f(x_0)$ . При  $\frac{n}{2} \leq r \leq 2n$  имеем

$$\|u_{n,r}\|_0 \leq 4x_0^r \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+x_0+1)\Gamma(n-x_0+1)} \leq 4 \left( \sqrt{\frac{nr}{2}} \right)^r \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+\tilde{x}+1)\Gamma(n-\tilde{x}+1)},$$

и при  $2n \leq r < n \ln 2n$

$$\|u_{n,r}\|_0 \leq 4x_0^r \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+x_0+1)\Gamma(n-x_0+1)} \leq 4n^r \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+\tilde{x}+1)\Gamma(n-\tilde{x}+1)}.$$

Очевидно, что

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+\tilde{x}+1)\Gamma(n-\tilde{x}+1)} \leq C_{2n}^{n+k_0}, \quad \text{где } k_0 = [\tilde{x}] = \left[ \frac{\sqrt{r^2 + 8nr} - r}{4} \right].$$

Отсюда следует (21). □

## ЛИТЕРАТУРА

1. Mahler K. *On the zeros of the derivative of a polynomial*// Proc. Roy. Soc. London Ser. A. – 1961. – V.264, №1317. – P. 145–154.
2. Zigmund A. *Trigonometric series*. V.1,2. Cambridge Univ. Press, 1959.
3. Taikov L.V. *On conjugate trigonometric polynomials*// Mat. Notes. – 1990. – V.48, №4. – P. 110–114. (in Russian)
4. Arestov V.V. *The Szegő inequality for derivatives of a conjugate trigonometric polynomial in  $L_0$* // Mat. Notes. – 1994. – V.56, №6. – P. 10–26. (in Russian)
5. Adamov A.N. *About conjugate trigonometric polynomials in  $L_0$* // Donetsk national university journal, ser. A: nat. sciences. – 2011. – V.2. (in Russian)
6. Szegő G. *Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein*// Schrift. Königsberg. Gelehrten Gesellschaft. – 1928. – V.5, №4. – P. 59–70.
7. Ryzhik I. M., Gradshteyn I.S. *Tables of integrals, sums, series and products*. Moscow, Leningrad 1951. (in Russian)
8. Dzyadyk V.K. *Introduction to the theory uniform approximation of functions by polynomials*. – М.:Наука, 1977. – 512 p. (in Russian)

Одесский национальный университет им. И.И.Мечникова  
alex.1985@mail.ru

Поступило 30.01.2012