УДК 517.5

А. Н. Адамов

О ПРОИЗВОДНЫХ СОПРЯЖЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В L_0

A. N. Adamov. *On derivatives of conjugate trigonometric polynomials in* L_0, Mat. Stud. **37** (2012), 147–154.

We consider Szegő type inequality, where the norm of the derivatives of the conjugate trigonometric polynomials is measured by the norm of the polynomial itself in L_0 space. We improve the estimate of the constant in it, which was got by V. V. Arestov before.

А. Н. Адамов. *О производных сопряженных тригонометрических полиномов в* L_0 // Мат. Студії. – 2012. – Т.37, №2. – С.147–154.

Рассматривается неравенство типа Сеге, оценивающее норму производных сопряжённого тригонометрического полинома через норму самого полинома в пространстве L_0. Улучшается полученная ранее В. В. Арестовым оценка постоянной в этом неравенстве.

1. Введение. Пусть $\mathbf{T}_n$ множество тригонометрических полиномов

$$T_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$$

порядка n с коэффициентами a_k из поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Полином

$$\widetilde{T}_n(t) = i\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikt} - \sum_{k=1}^{n} a_{-k} e^{-ikt}\right)$$

называют *сопряженным* для T_n. Определим функционал $\|f\|_p$ на отрезке при $0 \le p \le \infty$ обычным образом

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty, \tag{1}$$

$$\|f\|_0 = \lim_{p\to+0} \|f\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(t)|\,dt\right), \tag{2}$$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_C = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| : 0 \le t \le 2\pi\}. \tag{3}$$

Следуя Малеру ([1]), функционал $\|f\|_0$ будем называть *мерой функции* f.

Один из первых вопросов который возникает в связи с изучением сопряженных тригонометрических полиномов — о связи нормы сопряженного полинома с нормой исходного полинома. Если обозначить

$$B_{n,p} = \sup\left\{\|\widetilde{T}_n\|_p / \|T_n\|_p \colon T_n \in \mathbf{T}_n\right\},$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 26D10.
Keywords: derivatives of the polynomials, conjugate trigonometric polynomial, L_0 space, Szegő inequality.

то давно известна асимптотическая оценка $B_{n,\infty} = \frac{2}{\pi}\ln n + O\left(1\right)$ [2, т. I, глава II, §12]. В 1990 г. Л. В. Тайков ([3]) определил значение

$$B_{n,\infty} = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} \operatorname{ctg}\frac{2k+1}{2\left(n+1\right)}.$$

Относительно других значений p, $0 \le p < \infty$, В. В. Арестов ([4]) доказал, что $B_{n,0} \ge B_{n,p}$. Поэтому принципиально важным является нахождение постоянной $B_{n,0}$. Результат В. В. Арестова выглядит так

$$\frac{1}{n}C_{2n}^{n+1} \le B_{n,0} \le 2C_{2n}^{n+1}.$$

В работе автора ([5]) получено уточнение этой двусторонней оценки, которое приводит к выводу, что

$$\frac{B_{n,0}}{C_{2n}^{n+1}} \to 1,\ n \to \infty.$$

Дальнейшее исследование свойств сопряженных тригонометрических полиномов $\widetilde{T}_n$ относится к их производным $\widetilde{T}_n^{(r)}$, а именно к оценке их норм через нормы самих полиномов. История начинается с 1928 г., когда Г. Сеге ([6]) доказал такую оценку

$$\|T'_n\cos\alpha + \widetilde{T}'_n\sin\alpha\|_\infty \le n\|T_n\|_\infty, \quad T_n \in \mathbf{T}_n,\ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

а А. Зигмунд распространил (1959 г. — [2, т. II, глава X, (3.25)]) (4) на нормы $\|\cdot\|_p$ при $1 \le p \le \infty$

$$\|T'_n\cos\alpha + \widetilde{T}'_n\sin\alpha\|_\infty \le n\|T_n\|_\infty, \quad T_n \in \mathbf{T}_n,\ 1 \le p \le \infty. \tag{5}$$

Из (5) вытекает, что

$$\|\widetilde{T}_n^{(r)}\|_p \le n^r\|T_n\|_p, \quad T_n \in \mathbf{T}_n,\ r \ge 1,\ 1 \le p \le \infty. \tag{6}$$

Неравенства (5) и (6) точные и обращаются в равенства на полиномах $T_n\left(t\right) = c\cos n\left(t - t_0\right)$. Для $p = 0$ В. В. Арестовым доказано ([4]), что постоянная в неравенстве типа (6) является мерой некоторого полинома

$$u_{n,r}\left(t\right) = \begin{cases} 2\sum\limits_{k=1}^{n} k^r C_{2n}^k \sin kt, & r \text{ чётное}, \\ 2\sum\limits_{k=1}^{n} k^r C_{2n}^k \cos kt, & r \text{ нечётное}, \end{cases} \tag{7}$$

и

$$\|\widetilde{T}_n^{(r)}\|_0 \le \|u_{n,r}\|_0 \cdot \|T_n\|_0,\ r \ge 1. \tag{8}$$

Для $0 < p < 1$ неравенство (8) остается верным $\|\widetilde{T}_n^{(r)}\|_p \le \|u_{n,r}\|_0 \cdot \|T_n\|_p$, но уже не является точным. Для $\|u_{n,r}\|_0$ получены следующие оценки

$$\|u_{n,r}\|_0 = n^r,\ r \ge n\ln 2n, \tag{9}$$

$$\|u_{n,r}\|_0 \le 2n^r C_{2n}^{n+1},\ 1 \le r < n\ln 2n. \tag{10}$$

В настоящей работе оценка (10) уточняется. При разбиении промежутка $1 \le r < n\ln 2n$ на два промежутка, были получены следующие оценки

$$\|u_{n,r}\|_0 \le C\left(r\right)C_{2n}^{n+1}, \quad 1 \le r \le \frac{n}{2} \text{ и } C\left(r\right) \text{ зависит только от } r, \tag{11}$$

$$\|u_{n,r}\|_0 \le 4\Big(\max\Big\{n,\ \sqrt{\frac{nr}{2}}\ \Big\}\Big)^r C_{2n}^{n+k_0},\ \frac{n}{2} < r < n\ln 2n,\ \text{и } k_0 = \Big[\frac{\sqrt{r^2+8nr}-r}{4}\Big]. \tag{12}$$

Автор благодарен своему научному руководителю проф. Э. А. Стороженко за ценные советы и замечания при обсуждении полученных результатов.

2. Вспомогательные леммы и факты. Пусть a_k, $1 \le k \le n$, некоторая последовательность. Как обычно, обозначим

$$\Delta^0 a_k = a_k,\ \Delta^m a_k = \Delta^{m-1} a_k - \Delta^{m-1} a_{k+1} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j a_{k+j},\ \text{где } a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0.$$

Лемма 1. *Пусть* $W_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \sin kt$ *и* $V_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \cos kt$ *— тригонометрические полиномы порядка* n. *Тогда для любого* $0 \le m \le n-1$ *справедливы неравенства*

$$\|W_n\|_0 \le \sum_{j=0}^{m-1} 2^{m-1-j} \left|\Delta^j a_1\right| + \sum_{k=1}^{n} |\Delta^m a_k|,\ \|V_n\|_0 \le \sum_{j=0}^{m-1} 2^{m-1-j} \left|\Delta^j a_1\right| + \sum_{k=1}^{n} |\Delta^m a_k|. \quad (13)$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть полином W_n, для V_n рассуждения аналогичны. Применим преобразование типа Абеля, для чего обозначим $z = e^{it}$, $|z| = 1$, $0 \le t \le 2\pi$ и умножим полином W_n на $(z-1)^m$. Покажем, что

$$i(z-1)^m W_n(t) = -\sum_{k=0}^{m-1} \Delta^k a_1 \Big(\frac{z^m + (-1)^k}{2}\Big)(z-1)^{m-1-k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \Delta^m a_k \Big(\frac{z^{k+m} - (-1)^m z^{-k}}{2}\Big). \quad (14)$$

Действительно, при $m = 0$, $W_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \Delta^0 a_k \Big(\frac{z^k - z^{-k}}{2i}\Big)$. При $m = 1$ имеем

$$i(z-1) W_n(t) = -a_1 \big(\frac{z+1}{2}\big) + \sum_{k=1}^{n} \Delta^1 a_k \Big(\frac{z^{k+1} + z^{-k}}{2}\Big).$$

По индукции легко получаем (14). Так как $|z-1| = 2\sin\frac{t}{2} \le 2$ и $|z| = 1$, то

$$\left|\Big(2\sin\frac{t}{2}\Big)^m W_n(t)\right| \le \sum_{k=0}^{m-1} 2^{m-1-k} \left|\Delta^k a_1\right| + \sum_{k=1}^{n} |\Delta^m a_k|.$$

Отсюда следуют соответствующие неравенства для меры функции $\big(2\sin\frac{t}{2}\big)^m W_n(t)$ по определению (2)

$$\left\|\Big(2\sin\frac{t}{2}\Big)^m W_n(t)\right\|_0 \le \sum_{j=0}^{m-1} 2^{m-1-j} \left|\Delta^j a_1\right| + \sum_{k=1}^{n} |\Delta^m a_k|.$$

Мера функций мультипликативна, и, так как $\left\|2\sin\frac{t}{2}\right\|_0 = 1$, то из этих неравенств следует (13). □

Для оценки меры полинома $u_{n,r}$ (7) воспользуемся леммой 1, где $a_k = k^r C_{2n}^{n+k}$. Чтобы исследовать поведение $\Delta^m a_k$, выразим биномиальные коэффициенты через гамма-функцию и перейдем от натуральных k к непрерывному аргументу. В результате возникают функции f и g

$$f(x) = \frac{x^r \Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+x+1)\,\Gamma(n-x+1)} = x^r g(x), \quad g(x) = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+x+1)\,\Gamma(n-x+1)},$$

и $a_k = f(k)$. Тогда возможно конечные разности $\Delta^m a_k$ выразить через производные функции f. Сначала получим два вспомогательных соотношения.

Лемма 2. *Пусть* $n \geq 3$ *и* $0 \leq x \leq \frac{n}{\sqrt{2}}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$g(x) \leq g(0) \cdot \exp\left(\frac{1}{18} - \frac{2x^2}{3n}\right). \tag{15}$$

Доказательство. Записывая для гамма-функции формулу Стирлинга $\ln\Gamma(\alpha+1) = \ln\sqrt{2\pi} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\ln\alpha - \alpha + \frac{\theta}{12\alpha}$, $0 < \theta < 1$, получим

$$\ln\left(\frac{g(x)}{g(0)}\right) = \ln\left(\frac{(\Gamma(n+1))^2}{\Gamma(n+x+1)\,\Gamma(n+x-1)}\right) \leq 2\Big(\frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln n + n\ln n - n\Big) +$$
$$+\frac{1}{6n} - \Big(\frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln(n+x) + (n+x)\ln(n+x) - (n+x)\Big) -$$
$$-\Big(\frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln(n-x) + (n-x)\ln(n-x) - (n-x)\Big) =$$
$$= \ln n - \frac{1}{2}\left(\ln(n+x) + \ln(n-x)\right) + 2n\ln n -$$
$$-(n+x)\ln(n+x) - (n-x)\ln(n-x) + \frac{1}{6n} =$$
$$= \ln n - \frac{1}{2}\Big(\ln n + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) + \ln n + \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\Big) + 2n\ln n -$$
$$-n\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(\ln n + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) - n\left(1 - \frac{x}{n}\right)\left(\ln n + \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) + \frac{1}{6n}.$$

Обозначим для удобства записи $v = \frac{x}{n}$, тогда

$$\ln\left(\frac{g(x)}{g(0)}\right) \leq -\frac{1}{2}\ln\left(1 - v^2\right) + 2n\ln n - n(1+v)\left(\ln n + \ln(1+v)\right) -$$
$$-n(1-v)\left(\ln n + \ln(1-v)\right) + \frac{1}{6n} =$$
$$= -\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\ln\left(1 - v^2\right) - nv\left(\ln(1+v) - \ln(1-y)\,v\right) + \frac{1}{6n} =$$
$$= \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\Big(v^2 + \frac{v^4}{2} + \frac{v^6}{3} + \ldots + \frac{v^{2k}}{k} + \ldots\Big) -$$
$$-nv\Big(2v + \frac{2v^3}{3} + \ldots + \frac{2v^{2k+1}}{2k+1} + \ldots\Big) + \frac{1}{6n} \leq$$
$$\leq nv^2 + n\frac{v^4}{2} + \frac{v^2}{2} + n\Big(\frac{v^6}{3} + \frac{v^8}{3}\ldots + \frac{v^{2k}}{3} + \ldots\Big) + \frac{1}{6n} +$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\frac{v^4}{2} + \frac{v^6}{2} + \ldots + \frac{v^{2k}}{2} + \ldots\Big) - 2nv^2 - \frac{2nv^4}{3} =$$
$$= -nv^2 - \frac{nv^4}{6} + \frac{v^2}{2} + \frac{nv^4}{3} \cdot \frac{v^2}{1 - v^2} + \frac{v^2}{4} \cdot \frac{v^2}{1 - v^2} + \frac{1}{6n}.$$

Так как $v^2 = \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{1}{2}$, то возвращаясь к прежним обозначениям имеем

$$\ln\left(\frac{g(x)}{g(0)}\right) \leq -\frac{x^2}{n} - \frac{x^4}{6n^3} + \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^4}{3n^3} \cdot 1 + \frac{x^2}{4n^2} \cdot 1 + \frac{1}{6n} =$$
$$= -\frac{x^2}{n} + \frac{1}{12n}\Big(2 + 9\frac{x^2}{n} + 2\frac{x^4}{n^2}\Big) =$$
$$= \frac{1}{6n} - \frac{x^2}{n}\Big(1 - \frac{3}{4n} - \frac{x^2}{6n^2}\Big) \leq \frac{1}{18} - \frac{x^2}{n}\Big(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\Big) = \frac{1}{18} - \frac{2x^2}{3n}.$$

Отсюда и следует (15). □

Лемма 3. *Пусть* $0 \le x \le \frac{n}{\sqrt{2}}$ *и* $m > 0$. *Тогда* $\left|g^{(m)}(x)\right| \le \frac{Cx^m}{n^m}|g(x)|$, *где коэффициент* C *зависит только от* m.

Доказательство. Найдем первую производную g

$$g'(x) = g(x)\left(\frac{\Gamma'(n-x+1)}{\Gamma(n-x+1)} - \frac{\Gamma'(n+x+1)}{\Gamma(n+x+1)}\right).$$

Обозначим $\varphi(x) = \dfrac{\Gamma'(n-x+1)}{\Gamma(n-x+1)} - \dfrac{\Gamma'(n+x+1)}{\Gamma(n+x+1)}$, $0 \le x \le n$. Тогда $g'(x) = \varphi(x)g(x)$, $g''(x) = \left(\varphi'(x) + \varphi^2(x)\right)g(x)$, $g'''(x) = \left(\varphi''(x) + 3\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi^3(x)\right)g(x)$, и в итоге по индукции имеем

$$g^{(m)}(x) = g(x)\sum_{\substack{\alpha_j\in\mathbb{Z}_+:\\ \sum\limits_{j=0}^{m-1}\alpha_j(j+1)=m}} C_{k,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1}}\prod_{j=0}^{m-1}\left(\varphi^{(j)}(x)\right)^{\alpha_j}, \tag{16}$$

где $C_{k,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}}$ — некие целочисленные коэффициенты. В сумму (16) входят члены вида φ^m, $\varphi^{(m-1)}$, $\varphi\varphi^{(m-2)}$, $\varphi^2\varphi^{(m-3)}$, и другие. Каждый из них при дифференцировании, очевидно, что представляется суммой некоторого числа членов более высокого порядка $m+1$, и, так как для $m = 1, 2, 3$ формула (16) верна, в общем случае имеем

$$\begin{aligned}
g^{(m+1)}(x) &= g'(x)\sum_{\sum\alpha_j(j+1)=m} C_{k,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1}}\prod_{j=0}^{m-1}\left(\varphi^{(j)}(x)\right)^{\alpha_j} + \\
&+ g(x)\left(\sum_{\sum\alpha_j(j+1)=m} C_{k,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1}}\prod_{j=0}^{m-1}\left(\varphi^{(j)}(x)\right)^{\alpha_j}\right)' = \\
&= g(x)\sum_{\sum\alpha_j(j+1)=m} C_{k,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1}}\varphi(x)\prod_{j=0}^{m-1}\left(\varphi^{(j)}(x)\right)^{\alpha_j} + \\
&+ g(x)\sum_{\sum\alpha_j(j+1)=m} C_{k,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1}}\left(\prod_{j=0}^{m-1}\left(\varphi^{(j)}(x)\right)^{\alpha_j}\right)' = \\
&= g(x)\sum_{\sum\alpha_j(j+1)=m+1} C_{k,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1},a_m}\prod_{j=0}^{m}\left(\varphi^{(j)}(x)\right)^{\alpha_j}.
\end{aligned}$$

Для оценки производных функции φ выразим ее через пси-функцию

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

следующим образом: $\varphi(x) = \psi(n-x+1) - \psi(n+x+1)$. Нам понадобятся соотношения 6.354 и 6.356 из монографии [7]

$$\psi(z) - \psi(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{y+k} - \frac{1}{z+k}\right) \text{ и } \psi^{(j)}(z) = (-1)^{j+1}j!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^{j+1}}.$$

Тогда имеем

$$\varphi(x) = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n-x+1+k} - \frac{1}{n+x+1+k}\right). \tag{17}$$

Отсюда несложно увидеть, что $\varphi(x)$ монотонна при $0 \le x \le n$, и для дальнейшей оценки φ заметим, что при целых значениях x

$$\varphi(x) = -\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{n-x+1+k}-\frac{1}{n+x+1+k}\right) = -\sum_{k=0}^{2x-1}\frac{1}{n-x+1+k}+$$
$$+\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=m-2x+1}^{m}\frac{1}{n+x+1+k} = -\sum_{k=0}^{2x-1}\frac{1}{n-x+1+k}.$$

И соответственно

$$\frac{2x}{n} \le |\varphi(x)| \le \frac{2x}{n-x} \le \frac{Cx}{n}. \tag{18}$$

С учетом монотонности φ (18) распространяется на все $0 \le x \le \frac{n}{\sqrt{2}}$. Аналогично из (17) имеем

$$\varphi^{(j)}(x) = (-1)^{j+1} j! \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-x+1+k)^{j+1}}-\frac{1}{(n+x+1+k)^{j+1}}\right)$$

и

$$\left|\varphi^{(j)}(x)\right| \le j! \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-x+1+k)^{j+1}}-\frac{1}{(n+x+1+k)^{j+1}}\right) \le \frac{2Cx}{n^{j+1}},$$

где C зависит только от j. Последнее неравенство так же справедливо не только для целых x. Подставляя эти соотношения в (16), получаем требуемое неравенство. □

Лемма 4. *Для* $a_k = k^r C_{2n}^{n+k}$ *и* $0 \le r \le \frac{n}{2}$ *выполняется неравенство* $|\Delta^{r+4} a_k| \le C\frac{C_{2n}^{n+1}}{n^2}$.

Доказательство. Так как $a_k = f(k)$, то, пользуясь выражением конечной разности через производную в промежуточной точке [8, с. 159, следствие 1], получаем

$$\Delta^m a_k = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_m^j f(k+j) = (-1)^m \Delta_1^m f(x) = (-1)^m f^{(m)}(k+\theta m),\ 0<\theta<1. \tag{19}$$

Полагая $m = r+4$ имеем в (19) $|\Delta^{r+4}a_k| = \left|f^{(r+4)}(k+\theta(r+4))\right|$, $0<\theta<1$. Представляя $f(x) = x^r g(x)$ имеем

$$f^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{\min(m,r)} \frac{C_m^j r!}{(r-j)!}x^{r-j}g^{(m-j)}(x),\ \text{ и } f^{(r+4)}(x) = \sum_{j=0}^{r}\frac{C_{r+4}^j r!}{(r-j)!}x^{r-j}g^{(r+4-j)}(x).$$

Пользуясь леммой 3 при $0 \le x \le \frac{n}{\sqrt{2}}$ получаем

$$\left|f^{(r+4)}(x)\right| \le \sum_{j=0}^{r}\frac{C_{r+4}^j r!}{(r-j)!}x^{r-j}\left|g^{(r+4-j)}(x)\right| \le \frac{1}{n^2}|g(x)|\sum_{k=1}^{r+2}C_k\left(\frac{x^2}{n}\right)^k,$$

где C_k некоторые коэффициенты, зависящие только от r и k. Для удобства обозначая $y = \frac{x^2}{n}$ и $P(y) = \sum\limits_{k=1}^{r+2} C_k y^k$, при помощи леммы 2 получаем

$$\left|f^{(r+4)}(x)\right| \le \frac{1}{n}|g(0)|\,|P(y)|\exp\left(\frac{1}{18}-\frac{2y}{3}\right).$$

Так как $|P(y)|\exp\left(\frac{1}{18}-\frac{2y}{3}\right)$ очевидно стремится к 0 при $y\to+\infty$, то эта величина ограничена на $0 \le y \le +\infty$ некоторой величиной C, зависящей только от r. Отсюда следует, что лемма справедлива при $k+(r+4)\le\frac{n}{\sqrt{2}}$. При $k+(r+4)\ge\frac{n}{\sqrt{2}}$ очевидно $a_k=k^rC_{2n}^{n+k}$ монотонно убывают, и $|\Delta^{r+4}a_k|\le a_k$. Как несложно заметить, тогда $a_k\le C\frac{C_{2n}^{n+1}}{n^2}$, и лемма справедлива при таких k. □

Замечание. При выборе $m=r+4$ второе слагаемое в правой части (13) меньше первого по порядку. При меньших m такого добиться этим методом нельзя, большее m ничего не изменяет по-существу во втором слагаемом, но увеличивает первое.

3. Основной результат.

Теорема. *Пусть T_n — тригонометрический полином порядка n, $\widetilde{T}_n$ — сопряженный к нему, $1\le r<n\ln 2n$. Тогда*

$$\left\|\widetilde{T}_n^{(r)}\right\|_0\le C_{2n}^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{r+4}2^{r+5-k}k^r+\frac{C_r}{n}\right)\cdot\|T_n\|_0,\ 1\le r\le\frac{n}{2},\tag{20}$$

$$\left\|\widetilde{T}_n^{(r)}\right\|_0\le 4\left(\max\left(n,\sqrt{\frac{nr}{2}}\right)\right)^rC_{2n}^{n+k_0}\cdot\|T_n\|_0,\ \frac{n}{2}\le r<n\ln 2n,\tag{21}$$

где C_r — коэффициент зависящий только от r, а $k_0=\left[\frac{\sqrt{r^2+8nr}-r}{4}\right]$.

Доказательство. Из (8), следует, что для получения (20) и (21) необходимо оценить меру полинома $u_{n,r}$. При $1\le r\le\frac{n}{2}$ воспользуемся первой леммой, считая $m=r+4$,

$$\|u_{n,r}\|_0\le\sum_{j=0}^{r+3}2^{r+4-j}\left|\Delta^ja_1\right|+2\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta^{r+4}a_k\right|.\tag{22}$$

Для первого слагаемого в (22), учитывая, что $|\Delta^ja_1|\le a_{j+1}$, получаем

$$\sum_{j=0}^{r+3}2^{r+4-j}\left|\Delta^ja_1\right|\le\sum_{k=1}^{r+4}2^{r+5-k}a_k=\sum_{k=1}^{r+4}2^{r+5-k}k^rC_{2n}^{n+k}\le C_{2n}^{n+1}\sum_{k=1}^{r+4}2^{r+5-k}k^r.$$

Для второго слагаемого в (22), пользуясь леммой 4, имеем

$$2\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta^{r+4}a_k\right|\le 2\sum_{k=1}^{n}C\frac{C_{2n}^{n+1}}{n^2}=C\frac{C_{2n}^{n+1}}{n}.$$

Отсюда сразу следует (20).

При $\frac{n}{2}\le r<n\ln 2n$ применим к $u_{n,r}$ первую лемму с $m=1$

$$\|u_{n,r}\|_0\le 2\,|a_1|+2\sum_{k=1}^{n}|\Delta a_k|.\tag{23}$$

Так как $|\Delta a_k|=f'(k+\theta)$, $0<\theta<1$, имеем

$$f'(x)=rx^{r-1}g(x)+x^rg'(x)=rx^{r-1}g(x)+x^r\varphi(x)\,g(x)=x^{r-1}g(x)\,(r+x\varphi(x))\,.$$

Так как последовательность a_k монотонно возрастает только при $r\ge n\ln 2n$ (см. [4]), то $f'(x)$ обращается в 0 на $0\le x\le n$. Так как на этом промежутке $\varphi(x)$ монотонно убывает, то ноль у $f'(x)$ только 1, который обозначим x_0. Для оценки x_0 воспользуемся неравенством (18). Тогда

$$\frac{\sqrt{r^2+8nr}-r}{4} \le x_0 \le \sqrt{\frac{nr}{2}},\ \frac{n}{2} \le r \le 2n, \quad \frac{\sqrt{r^2+8nr}-r}{4} \le x_0 \le n,\ 2n \le r < n\ln 2n.$$

Соответственно Δa_k сначала отрицательны, потом положительны, и

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta a_k| \le 2\sup_k a_k - a_1 \le 2f(x_0) - a_1.$$

Тогда из (23) следует, что $\|u_{n,r}\|_0 \le 4f(x_0)$. При $\frac{n}{2} \le r \le 2n$ имеем

$$\|u_{n,r}\|_0 \le 4x_0^r \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+x_0+1)\,\Gamma(n-x_0+1)} \le 4\left(\sqrt{\frac{nr}{2}}\right)^r \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+\widetilde{x}+1)\,\Gamma(n-\widetilde{x}+1)},$$

и при $2n \le r < n\ln 2n$

$$\|u_{n,r}\|_0 \le 4x_0^r \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+x_0+1)\,\Gamma(n-x_0+1)} \le 4n^r \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+\widetilde{x}+1)\,\Gamma(n-\widetilde{x}+1)}.$$

Очевидно, что

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+\widetilde{x}+1)\,\Gamma(n-\widetilde{x}+1)} \le C_{2n}^{n+k_0},\ \text{где } k_0 = [\widetilde{x}] = \left[\frac{\sqrt{r^2+8nr}-r}{4}\right].$$

Отсюда следует (21). □

ЛИТЕРАТУРА

1. Mahler K. *On the zeros of the derivative of a polynomial*// Proc. Roy. Soc. London Ser. A. – 1961. – V.264, №1317. — P. 145–154.
2. Zigmund A. Trigonometric series. V.1,2. Cambridge Univ. Press, 1959.
3. Taikov L.V. *On conjugate trigonometric polynomials*// Mat. Notes. – 1990. – V.48, №4. – P. 110–114. (in Russian)
4. Arestov V.V. *The Szegő inequality for derivatives of a conjugate trigonometric polynomial in* L_0// Mat. Notes. – 1994. – V.56, №6. – P. 10–26. (in Russian)
5. Adamov A.N. *About conjugate trigonometric polynomials in* L_0// Donetsk national university journal, ser. A: nat. sciences. – 2011. – V.2. (in Russian)
6. Szegő G. *Uber einen Satz des Hern Serge Bernstein*// Schrift. Königsberg. Gelehrten Gesellschaft. – 1928. – V.5, №4. – P. 59–70.
7. Ryzhik I. M, Gradstein I.S. Tables of integrals, sums, series and products. Moscow, Leningrad 1951. (in Russian)
8. Dzyadyk V.K. Introduction to the theory uniform approximation of functions by polynomials. – M.:Nauka, 1977. – 512 p. (in Russian)

Одесский национальный университет им. И.И.Мечникова
alex.1985@mail.ru

Поступило 30.01.2012