УДК 512.552.12

С. І. Білявська, І. С. Васюник

ПРИВЕДЕННЯ ПАРИ МАТРИЦЬ ДО СПЕЦІАЛЬНОГО ТРИКУТНОГО ВИГЛЯДУ НАД КІЛЬЦЕМ МАЙЖЕ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1

S. I. Bilavska, I. S. Vasyunyk. *Reduction of a pair of matrices to a special triangular form over a ring of almost stable range 1*, Mat. Stud. **37** (2012), 136–141.

In the paper it is considered a notion of a ring of almost stable range 1. It is shown that an arbitrary pair of matrices over commutative Bezout domain of almost stable range 1, where at least one of the matrices is not a zero divisor, reduced to a special triangular form with the corresponding elementary divisors on the main diagonal by using the unilateral transformations. It is also proved that elementary divisors of the product of matrices over a commutative Bezout domain of almost stable range 1 are elementary divisors of every multiplier.

С. И. Билявська, И. С. Васюнык. *Сведение пары матриц к специальному треугольному виду над кольцом почти стабильного ранга 1* // Мат. Студії. – 2012. – Т.37, №2. – С.136–141.

В статье на основе понятия кольца почти стабильного ранга 1, доказано, что произвольная пара матриц над коммутативной областью Безу почти стабильного ранга 1, где хотя бы одна из матриц не является делителем нуля, применением идентичных односторонних преобразований сведется к специальному треугольному виду с соответствующими элементарными делителями на главной диагонали. Также доказано, что элементарные делители произведения матриц над коммутативной областью Безу почти стабильного ранга 1 делятся на соответствующие элементарные делители каждого сомножителя.

Нехай R — комутативне кільце з 1 і $1 \neq 0$. Кільце R називається *кільцем стабільного рангу 1,* якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ існує елемент $t \in R$такий, що $(a + bt)R = R$ ([1]). Кільце R є *кільцем майже стабільного рангу 1,* якщо для довільного ненульового і необоротнього елемента $a \in R$ стабільний ранг фактор-кільця R/aR дорівнює 1 ([6]). Кільце R є *кільцем елементарних дільників,* якщо довільна матриця A розміру $m \times n$ володіє канонічною діагональною редукцією, а саме для матриці A існують оборотні матриці $P \in GL_m(R)$, $Q \in GL_n(R)$ такі, що матриця

$$PAQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 16S50, 16U80.
Keywords: matrices, triangular form, ring, stable range.

де $\varepsilon_i|\varepsilon_{i+1}$, $i = 1, \ldots, r-1$. Елементи $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_r$ називаються *елементарними дільниками матриці* A.

За результатами робіт [3, 5, 6] кільце майже стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників. Тоді згідно з [6], маємо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай R — комутативне кільце майже стабільного рангу 1 і елементи $a, b, c \in R/\{0\}$ такі, що $aR + bR + cR = R$. Тоді існує елемент $r \in R$ такий, що $aR + (b + cr)R = R$.*

Доведення. Нехай $\overline{R} = R/aR$ і для деякого елемента $x \in R$, $\overline{x} = x + aR$. Оскільки $\overline{b}\overline{R} + \overline{c}\overline{R} = \overline{R}$, то існує такий елемент r з кільця R, що $\overline{(b + cr)R} = \overline{R}$. Покажемо, що $aR + (b + cr)R = R$. Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що $aR + (b + cr)R \neq R$, тоді існує максимальний ідеал M з кільця R такий, що $aR + (b + cr)R \in M$. Але це неможливо, оскільки $\overline{M}$ є максимальним ідеалом в кільці $\overline{R}$, що містить $\overline{b + cr}$. Отже, $aR + (b + cy)R = R$. $\square$

Теорема 2. *Нехай A_1, A_2 — матриці розміру $2 \times k_1(R)$, $2 \times k_2(R)$ над комутативною областю Безу майже стабільного рангу 1, причому хоча б одна з цих матриць не є дільником нуля. Тоді існують оборотні матриці $P \in GL_2(R)$, $Q_1 \in GL_{k_1}(R)$ і $Q_2 \in GL_{k_2}(R)$ такі, що*

$$PA_iQ_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^i & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \varepsilon_2^i & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon_1^i, \varepsilon_2^i$ — елементарні дільники матриці A_i, $i = 1, 2$.

Доведення. Вважаємо, що матриця A_2 не є дільником нуля. Оскільки R — кільце елементарних дільників, тоді для матриць A_1 та A_2 існують оборотні матриці $S \in GL_2(R)$, $N_1 \in GL_{k_1}(R)$, $N_2 \in GL_{k_2}(R)$ такі, що

$$SA_1N_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1' & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2' & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ \varepsilon_1' \mid \varepsilon_2', \quad SA_2N_2 = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ c \neq 0, \ a, b, c \in R.$$

Для випадку, коли $a \in U(R)$, теорему доведено. Припустимо тепер, що $aR+bR+cR = R$. Нехай $a \neq 0$. Тоді за теоремою 1, для елементів $a, b, c \in R$ існує елемент $r \in R$ такий, що $aR + (b + cr)R = R$. Розглянемо матрицю $T = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, де $T \in GL_2(R)$. Тоді

$$TSA_1N_1 = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1' & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2' & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1' & r\varepsilon_2' & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2' & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$TSA_2N_2 = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + rc & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $aR+(b+rc)R = R$, то існують елементи $u, v \in R$ такі, що $au+(b+rc)v = 1$. Якщо стабільний ранг кільця R дорівнює 2, тоді R є кільцем Ерміта, звідки, $uR+$ $+vR = R$, тому існує оборотна матриця $U = \begin{pmatrix} u & * \\ v & * \end{pmatrix} \in GL_2(R)$. Звідси

$$TSA_2N_2K = \begin{pmatrix} a & b+rc & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & 0 & \dots & 0 \\ & U & & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} au+(b+rc)v & * & 0 & \dots & 0 \\ cv & * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & \dots & 0 \\ cv & * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{pmatrix} & & & 0 & \dots & 0 \\ & U & & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{k_2}(R).$$

Оскільки $\varepsilon'_1 \mid \varepsilon'_2$, то $\varepsilon'_2 = x\varepsilon'_1$, тоді $r\varepsilon'_2 = xr\varepsilon'_1$. Отже $r\varepsilon'_2 = y\varepsilon'_1$, де $y = xr$ для деяких елементів $x, y \in R$. Тому

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_1 & r\varepsilon'_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon'_2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 & -y\varepsilon'_1 + r\varepsilon'_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon'_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon'_2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

оскільки $-y\varepsilon'_1 + r\varepsilon'_2 = -xr\varepsilon'_2 + rx\varepsilon'_2 = 0$. Дана рівність завершує доведення теореми для випадку $aR + bR + cR = R$.

Розглянемо випадок, коли $aR+bR+cR = dR$, де d — необоротний елемент кільця R. Оскільки R є кільцем Безу, то існують елементи $a_0, b_0, c_0 \in R$ такі, що $a = a_0d$, $b = b_0d$, $c = c_0d$ і $a_0R + b_0R + c_0R = R$. Тоді матриця

$$SA_2N_2 = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = DB.$$

Виберемо елемент $r \in R$ такий, що $a_0R + (b_0 + rc_0)R = R$. Дана рівність виконується з огляду на попередню теорему. Розглянемо відповідну матрицю $T = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді

$$TB = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 + rc_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & c_0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Не важко перевірити, що матриця TB і матриця TSA_iN_i домноженням справа на відповідні оборотні матриці зведуться до потрібного вигляду. □

Теорема 3. *Нехай A_i, $i = 1, 2$ — матриці розміру $m \times k_i$ над комутативною областю Безу майже стабільного рангу 1, причому хоча б одна з цих матриць не є дільником нуля. Тоді існують оборотні матриці $P \in GL_m(R)$ і $Q_i \in GL_{k_i}(R)$ такі, що*

$$PA_iQ_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^i & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ * & \varepsilon_2^i & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ * & * & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \varepsilon_r^i & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & \dots & \dots & * & 0 \end{pmatrix},$$

де ε_j^i, $j = 1, \dots r$, $r \le m$ є елементарними дільниками матриці A_i.

Доведення. Доведення проведемо індукцією за кількістю рядків у матриці A_i, $i = 1, 2$. Базу індукції вже встановлено в теоремі 2. Припустимо, що наше твердження вірне для всіх матриць з кількістю рядків $m - 1$. Нехай $A_i = (a_{t_s}^i)$ — потрібні матриці, де A_2 не є дільником нуля, $i = 1, 2$. Розглянемо підматриці A_i' відповідних розмірів A_i, які отримуються з матриці A_i шляхом викреслення всіх рядків починаючи з третього. Очевидно, що матриця A_2' не є дільником нуля. За базою індукції, а саме за теоремою 2, існують оборотні матриці $P' \in GL_2(R)$, $Q_1' \in GL_{k_1}(R)$, $Q_2' \in GL_{k_2}(R)$ такі, що

$$P'A_iQ_i' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \varepsilon_2^i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } \varepsilon_1^i = \textbf{НСД}(a_{t_{k_i}}^i),\ t = 1, 2.$$

Розглянемо матрицю

$$P = \begin{pmatrix} & & & 0 & \dots & 0 \\ & P' & & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $P \in GL_m(R)$ і тоді

$$PA_iQ_i' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \varepsilon_2^i & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3k_i} \end{pmatrix} = C_i.$$

Розглянемо підматриці B_i' розміру $(m-1) \times k_i$, які отримаються з матриць C_i викресленням першого рядка. Очевидно, що підматриця B_2' не є дільником нуля. За припущенням індукції, існують оборотні матриці $T' \in GL_{m-1}(R)$, $S_i' \in GL_{k_i}(R)$ такі, що

$$T'B_iS_i' = \begin{pmatrix} \psi_2^i & 0 & \dots & 0 \\ * & \ddots & & \\ * & * & & \psi_m \end{pmatrix},$$

де ψ_2^i є найбільшим спільним дільником елементів матриці B_i, $i = 1, 2$.

Розглянемо матрицю

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & T & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $T \in GL_m(R))$ і тоді

$$TC_iS_i^{'} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^i & 0 & \dots & 0 \\ * & \psi_2^i & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ * & * & & \psi_m^i \end{pmatrix} = K_i.$$

Нехай $K_i^{'}$ — це підматриці відповідних матриць K_i, які отримуються з K_i шляхом викреслення всіх рядків матриць починаючи з третього рядка. Очевидно, що матриця $K_2^{'}$ не є дільником нуля. За припущенням індукції існують такі оборотні матриці $M^{'} \in GL_2(R)$, $N_i^{'} \in GL_{k_i}(R)$, що

$$M^{'}K_i^{'}N_i^{'} = \begin{pmatrix} \psi_1^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \psi_2^i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де ψ_1^i є найбільшим спільним дільником елементів матриці $K_i^{'}$, $i = 1, 2$.

Очевидно, що цей найбільший спільний дільник елементів матриці збігається з найбільшим спільним дільником всіх елементів матриці $A_i^{'}$, тобто є елементарним дільником відповідної матриці $A_i^{'}$, який розташований на першій позиції рядка та стовпця.

Розглянемо матрицю

$$M = \begin{pmatrix} & & & 0 & \dots & 0 \\ & M^{'} & & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $M \in GL_m(R)$. Отже,

$$MK_iN_i^{'} = \begin{pmatrix} \psi_1^i & 0 & \dots & 0 \\ * & \psi_2^i & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & & * \end{pmatrix},$$

де ψ_1^i — перший елементарний дільник матриць $A_i^{'}$, $i = 1, 2$. Індукція за кількістю рядків матриці A_i, $i = 1, 2$ завершує доведення. □

Теорема 4. *Нехай $A = B \cdot C$, де матриця A не є дільником нуля і B, C — матриці над комутативною областю Безу майже стабільного рангу 1. Тоді елементарні дільники матриці A діляться на елементарні дільники матриць B і C.*

Доведення. З отриманих вище результатів очевидно, що R є кільцем елементарних дільників. Тоді існують такі оборотні матриці P, Q_1, Q_2 відповідних розмірів над кільцем R, що $PAQ_1 = PBQ_2Q_2^{-1}CQ_1$. Тоді

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^A & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \varepsilon_2^A & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ * & \dots & * & \varepsilon_m^A & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^B & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \varepsilon_2^B & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ * & \dots & * & \varepsilon_m^B & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} Q_2^{-1}CQ_1.$$

Очевидно, що матриця $Q_2^{-1}CQ_1$ є трикутною

$$Q_2^{-1}CQ_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^A & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \varepsilon_2^A & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ * & \dots & * & \varepsilon_m^A & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_1^B & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \varepsilon_2^B & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ * & \dots & * & \varepsilon_m^B & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11}\varepsilon_1^B & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ c_{11} + c_{22}\varepsilon_2^B & c_{22}\varepsilon_2^B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \dots & c_{mm}\varepsilon_m^B & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\varepsilon_1^A = c_{11}\varepsilon_1^B$, $\varepsilon_2^A = c_{22}\varepsilon_2^B$,...., $\varepsilon_m^A = c_{mm}\varepsilon_m^B$. □

Кільце R називається *кільцем нормування*, якщо для довільних елементів a, b з кільця R отримаємо $a \mid b$ або $b \mid a$.

Оскільки кільце нормування є кільцем майже стабільного рангу 1 ([5]), то отримаємо наступну теорему.

Теорема 5. *Нехай довільну матрицю A можна представити у вигляді $A = B \cdot C$ над кільцем нормування. Тоді елементарні дільники матриці A діляться на елементарні дільники матриць B і C.*

ЛІТЕРАТУРА

1. L.N. Vaserstein, *Bass's first stable range condition*, J. Pure and Appl. Alg., **34** (1984), 319–330.
2. D. Khurana, T.Y. Lam, *Rings with integnal calculation*, J. Algebra, **284** (2005), 203–235.
3. W. Mc Govern, *Neat ring*, J. Pure and Appl. Algebra, **205** (2006), 243–265.
4. I. Kaplansky, *Elementary divisors and modules*, Trans. Amer. Math. Soc., **66** (1949), 464–491.
5. W. Mc Govern, *Bezout rings with almost stable range 1 are elementary divisors ring*, J. Pure and Appl. Algebra, **212** (2007), 340–348.
6. S. Bilyavs'ka, *Elements of stable and almost stable rank 1*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat., **71** (2009), 5–12.

Львівський національний університет ім. Івана Франка
mandaruna87@mail.ru
zosia_meliss@yahoo.co.uk

Надійшло 27.10.2011
Після переробки 12.01.2012