УДК 512.552.12

О. М. Романів

ЕЛЕМЕНТАРНА РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ БЕЗУ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1

O. M. Romaniv. *Elementary reduction of matrices over Bezout ring with stable range 1*, Mat. Stud. **37** (2012), 132–135.

We prove that a commutative Bezout ring with stable range 1 is a ring with elementary reduction of matrices and that every singular matrice over commutative Bezout ring with stable range 1 is products of idempotent matrices.

О. Н. Романив. *Элементарная редукция матриц над кольцами Безу стабильного ранга 1* // Мат. Студії. – 2012. – Т.37, №2. – C.132–135.

Доказано, что коммутативное кольцо Безу стабильного ранга 1 является кольцом с элементарной редукцией матриц и, что каждая особая матрица над коммутативным кольцом Безу стабильного ранга 1 является произведением идемпотентных матриц.

У даній статті доведено, що комутативне кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем з елементарною редукцією матриць і що довільна особлива матриця над кільцем з елементарною редукцією матриць (а, отже, над комутативним кільцем Безу стабільного рангу 1) є добутком ідемпотентних матриць.

Всі кільця, що розглядаються у цій статті є комутативними з відмінною від нуля одиницею. Через $\mathcal{U}(R)$ позначимо групу одиниць кільця R, а через $M_n(R)$ — множину квадратних матриць порядку n.

Під *елементарними матрицями* ([1]) з елементами кільця R розуміємо квадратні матриці таких трьох типів: діагональні матриці зі зворотними елементами на головній діагоналі; матриці, відмінні від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю; матриці, яка отримуються з одиничної перестановкою рядків чи стовпців. Елементарні матриці порядку n з елементами з кільця R утворюють групу, яку ми називатимемо *групою елементарних матриць* ([2]) і позначатимемо $GE_n(R)$.

Кільце R називається *кільцем з елементарною редукцією матриць* ([3]), якщо довільна матриця над R володіє елементарною редукцією, тобто для довільної матриці A з елементами з кільця R існують елементарні над R матриці $P_1, \dots, P_k$, $Q_1, \dots, Q_s$ відповідних розмірів такі, що

$$P_1 \cdots P_k \cdot A \cdot Q_1 \cdots Q_s = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0),$$

де ε_i є дільником ε_{i+1} $(i = 1, 2, \dots, r-1)$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 13F07, 13G05, 16U60.
Keywords: stable range, ω-Euclidean ring, Bezout ring, Hermite ring, elementary reduction of matrices, idempotent matrices.

Комутативне кільце R називають *кільцем Ерміта*, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують елемент $d \in R$ і зворотна матриця $Q \in M_2(R)$ такі, що $(a,b)Q = (d,0)$. Комутативне кільце R називається *кільцем Безу*, якщо будь-який скінченнопороджений ідеал кільця R є головним. Зрозуміло, що кільце Ерміта є кільцем Безу ([4]).

Рядок $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ елементів кільця R назвемо *унімодулярним рядком*, якщо $a_1R + a_2R + \dots + a_nR = R$. Кільце R називається *кільцем стабільного рангу n* ([5]), якщо для довільного унімодулярного рядка $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ елементів кільця R існують такі елементи $b_1, \dots, b_n \in R$, що рядок $(a_1 + a_{n+1}b_1, a_2 + a_{n+1}b_2, \dots, a_n + a_{n+1}b_n)$ також є унімодулярним.

Теорема 1. *Комутативне кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Доведення. Спочатку покажемо, що комутативне кільце R Безу стабільного рангу 1 є кільцем Ерміта. Розглянемо довільні елементи $a, b \in R$ і нехай $aR + bR = dR$. Тоді існують такі елементи $a_0, b_0, u, v \in R$, що $a = a_0d$, $b = b_0d$ і $au + bv = d$. Звідси отримаємо $d(1 - a_0u - b_0v) = 0$. Позначимо $1 - a_0u - b_0v = c$. Тоді, очевидно, що

$$a_0 + b_0 + c = 1 \quad \text{і} \quad dc = 0.$$

Оскільки R — кільце стабільного рангу 1 (а, отже, і кільце стабільного рангу 2), то для елементів a_0, b_0, c існують такі елементи $x, y, \alpha, \beta \in R$, що

$$(a_0 + cx)\alpha + (b_0 + cy)\beta = 1.$$

Позначимо $a_0 + cx = a_1$, $b_0 + cy = b_1$. Нескладно побачити, що $da_1 = a$, $db_1 = b$ і $a_1\alpha + b_1\beta = 1$. Домноживши останню рівність на d, отримаємо

$$a\alpha + b\beta = d,$$

звідки випливає, що $a = a_1d, \quad b = b_1d.$

Отже,

$$(a,b)\begin{pmatrix} \alpha & -b_1 \\ \beta & a_1 \end{pmatrix} = (d, 0),$$

тобто кільце R є кільцем Ерміта.

Залишилось довести, що кільце R є кільцем з елементарною редукцією матриць. З щойно доведеної ермітовості кільця R випливає, то для доведення теореми достатньо обмежитися матрицями вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(R),$$

де $aR + bR + cR = dR$ для деякого елемента $d \in R$. Очевидно, що існують такі елементи $a_1, b_1, c_1 \in R$, що

$$a = a_1d,\ b = b_1d,\ c = c_1d \quad \text{і} \quad a_1R + b_1R + c_1R = R.$$

Тоді маємо

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

де матриця $\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ належить до центру $M_2(R)$. Звідси випливає, що при доведенні теореми можна обмежитися розглядом матриць вигляду

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(R),$$

де $aR + bR + cR = R$.

Оскільки R — кільце стабільного рангу один, то для елементів $a, b, c \in R$ існують такі елементи $s, t \in R$, що $as + b + ct = u \in \mathcal{U}(R)$. Розглянемо матриці P_1, P_2, P_3 вигляду

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що матриці P_1, P_2, P_3 — елементарні.

Маємо:

$$P_1 P_2 A P_3 = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as + b + ct & c \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & c \\ a & 0 \end{pmatrix} = C.$$

Легко бачити, що матриця C володіє елементарною редукцією. Звідси випливає, що і матрицю B (а, отже, і матрицю A) за допомогою елементарних перетворень можна звести до канонічного діагонального вигляду.

Отже, кільце R є кільцем з елементарною редукцією матриць. $\square$

Нормою над кільцем R без дільників нуля називають таку функцію $\mathcal{N}\colon R \to \mathbb{Z}$, для якої $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(a) > 0$ для будь-якого ненульового елемента $a \in R$, $\mathcal{N}(ab) \geq \mathcal{N}(a)$ для довільних елементів $a, b \in R \setminus 0$. Під *k-членним ланцюгом подільності* ($k \in \mathbb{N}$) для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, розуміємо послідовність рівностей: $a = bq_1 + r_1$, $b = r_1 q_2 + r_2$, $\dots$, $r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k$.

Назвемо кільце R без дільників нуля *ω-евклідовим кільцем* стосовно норми $\mathcal{N}$, якщо для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує k-членний ланцюг подільності для деякого k такий, що $\mathcal{N}(r_k) < \mathcal{N}(b)$.

Теорема 2. *Довільна особлива матриця над кільцем з елементарною редукцією матриць є добутком ідемпотентних матриць.*

Доведення. Нехай R — кільце з елементарною редукцією матриць. Тоді R є ω-евклідовим кільцем і кільцем Ерміта, а тому R є $GE_2(R)$-кільцем ([6]). В підсумку отримуємо, що оскільки R є $GE_2(R)$-кільцем і кільцем Ерміта, то довільна особлива матриця над кільцем R є добутком ідемпотентних матриць ([7]). $\square$

Теорема 3. *Нехай R комутативне кільце Безу стабільного рангу 1. Тоді довільна особлива матриця є добутком ідемпотентних матриць.*

Доведення. За теоремою 1 комутативне кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем з елементарною редукцією матриць, а тому за теоремою 2 довільна особлива матриця над таким кільцем є добутком ідемпотентних матриць. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Cohn P. *On the structure of the GL_2 of a ring*// I. H. E. S. Publ. Math. – 1996. – V.30. – P. 365–413.
2. Bougaut B. Anneaux Quasi-Euclidiens. These de docteur troisieme cycle. – 1976. – 67 p.
3. Zabavsky B. Rings with elementary reduction of matrices. Ring Theory Confer. Miskolc, Hungary, 1996.
4. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – V.166. – P. 464–491.
5. Vaserstein L.N. *The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces*// Functional. Anal. Appl. – 1971. – V.5. – P. 102–110.
6. Zabavskij B.V., Romaniv O.M. *Noncommutative rings with elementary reduction of matrices*// Visn. Lviv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. – 1998. – V.49. – P. 16–20. (in Ukrainian)
7. Bhaskara Rao K.P.S. *Products of idempotent matrices over integral domains*// Linear Algebra and its Applications. – V.430, №10. – P. 2690–2695.

Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
oromaniv@franko.lviv.ua

Надійшло 21.06.2011