УДК 512.547.25

Ю. В. Петечук

ОПИСАННЯ ДВОВИМІРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ГРУП ДІЕДРА НАД КОМУТАТИВНИМИ ЛОКАЛЬНИМИ КІЛЬЦЯМИ

Yu. V. Petechuk. *A description of the two-dimensional representations of the dihedral group over the commutative local rings*, Mat. Stud. **37** (2012), 115–131.

The full description of the two-dimensional representations of the dihedral group $D_m = \langle a, b \mid a^m = 1,\ b^2 = 1,\ bab^{-1} = a^{-1} \rangle$, $m > 1$ over the commutative local rings, is proposed from the point of view of a unified position. The conditions for their irreducibility, indecomposable and equivalency are found.

Ю. В. Петечук. *Описание двумерных представлений груп диедра над коммутативными локальными кольцами* // Мат. Студії. – 2012. – Т.37, №2. – С.115–131.

В работе, с единых позиций, предложено полное описание двумерных представлений групп диедра $D_m = \langle a, b \mid a^m = 1,\ b^2 = 1,\ bab^{-1} = a^{-1} \rangle$, $m > 1$ над коммутативными локальными кольцами. Найдены условия их неприводимости, неразложимости и эквивалентности.

У даній статті вперше з єдиних позицій отримано повне описання, з'ясовано умови незвідності, нерозкладності і еквівалентності двовимірних зображень груп діедра D_m, $m > 1$ над довільними комутативними локальними кільцями. Це складає перший крок до повного описання зображень груп діедра D_m, $m > 1$ над комутативними локальними кільцями. Труднощі, які при цьому виникають, простежуються уже при описанні модулярних зображень груп діедра D_m, $m > 1$ вищих степенів отриманих в [12] за умови оборотності натурального числа m в кільці R.

Як відомо, найбільші досягнення в теорії немодулярних зображень скінченних груп над полями досягнуто на основі теореми Машке і леми Шура. У теорії ж модулярних зображень скінченних груп навіть над полями доводиться шукати спеціальні методи і підходи. У випадку груп діедра модулярні зображення над комутативними локальними кільцями перегукуються з немодулярними зображеннями над комутативними локальними кільцями, які не містять коренів з одиниці відповідного степеня.

Історію питання і попередні результати можна знайти в [1], [3], [10]–[13], а деяку загальнішу й детальніше викладену інформацію — в [2], [4]–[9], [14].

Нехай R — асоціативне кільце з одиницею 1, R^* — група оборотних елементів кільця R, $J(R)$ — радикал R,

$$\overline{R} = {}^{R}\!/_{J(R)},\ \Lambda_{J(R)}\colon R \to {}^{R}\!/_{J(R)},\ \Lambda_{J(R)}\colon GL(2,R) \to GL\left(2, {}^{R}\!/_{J(R)}\right)$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 13D03.
Keywords: commutative local ring, dihedral group, two-dimensional images, irreducibility.

— натуральні гомоморфізми, E — одинична матриця, $D_m = \langle a, b | a^m = 1, b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ — група діедра порядку $2m$, $\Lambda\colon D_m \to GL(2, R)$ — двовимірне зображення групи D_m, $m > 1$, $\overline{\Lambda} = \Lambda_{J(R)}\Lambda$, $f(x) = \det(xE - \Lambda a) = x^2 - \operatorname{tr}\Lambda a x + \det \Lambda a$ — характеристичний многочлен матриці Λa, де $\operatorname{tr}\Lambda a$ — слід, а $\det\Lambda a$ — визначник матриці Λa.

У даній статті доведено, що описання двовимірних зображень груп діедра D_m , $m > 1$ над комутативними локальними кільцями зводяться до двох випадків. У першому з них обидві матриці $\overline{\Lambda}a$ і $\overline{\Lambda}b$ є одночасно скалярними, а у другому випадку — не є одночасно скалярними матрицями. Більш конкретно, у першому випадку

$$\Lambda a = E + V,\ \Lambda b = E + V_0 \text{ при } 2 \in J(R) \text{ і } \Lambda a, \Lambda b \text{ належать до } \{\pm E\} \text{ при } 2 \in R^*,$$

де V і V_0 — матриці над $J(R)$. У другому випадку, з точністю до еквівалентності,

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda a^{\delta},$$

де $\varepsilon^2 = 1$, $(1-\varepsilon) a_1 = (1-\varepsilon) a_4 = 0$, $a_1 a_4 + a_2^2 = 1$, $\varepsilon = \det\Lambda a$, $\delta \in \{0; 1\}$, а $f(x)$ ділить двочлен $x^m - 1$ з остачею $r(x - a_1) = r(x - a_4)$, де $r \in R$, $ra_2 = 0$.

Зокрема, якщо $\overline{\Lambda}a$ — нескалярна матриця, то $r = 0$, $f(x)$ ділить двочлен $x^m - 1$ без остачі.

У випадку, коли $\overline{\Lambda}a$ — нескалярна матриця, неповне описання двовимірних зображень груп діедра D_m, $m > 1$ над комутативними локальними кільцями отримане в [10], а у випадку, коли $\overline{\Lambda}a$ — скалярна матриця — в [11]. Доведено, що зображення Λ є незвідним тоді і тільки тоді, коли у першому випадку $2 \in J(R)$ і пара матриць V і V_0 є незвідною, а у другому випадку не існує елементів $x \in R$, для яких виконуються рівності $x^2 = 1$ і $a_1 - a_4 = (1+\varepsilon) x a_2$. Крім цього з'ясовано умови, за яких зображення Λ є нерозкладним. Встановлено, що зображення Λ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли у першому випадку $2 \in J(R)$ і пара матриць V і V_0 є нерозкладною, а у другому випадку $2 \in J(R)$ або $2 \in R^*$ і $\Lambda a^2 \neq E$.

У роботі розглядається питання еквівалентності зображень. Зрозуміло, що еквівалентними можуть бути тільки ті зображення $\Lambda\colon D_m \to GL(2, R)$ і $\Lambda'\colon D_m \to GL(2, R)$, які належать до розглянутих вище випадків.

Зокрема, у першому випадку зображення Λ і Λ', які визначені за правилом

$$\Lambda a = E + V,\ \Lambda b = E + V_0,\ \Lambda' a = E + V',\ \Lambda' b = E + V_0^{/} \text{ при } 2 \in J(R)$$

або коли матриці Λa, Λb, $\Lambda' a$, $\Lambda' b$ належать до $\{\pm E\}$ при $2 \in R^*$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли пари матриць V, V_0, і V', $V_0^{|}$ еквівалентні або відповідно $\Lambda a = \Lambda' a$ і $\Lambda b = \Lambda' b$.

Зображення Λ і Λ', які у другому випадку визначені за правилом

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix}, \ \Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda a^{\delta}, \ \Lambda' a = \begin{pmatrix} a_1^{/} & a_2^{/} \\ -\varepsilon' a_2^{/} & a_4^{/} \end{pmatrix}, \ \Lambda' b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda' a^{\delta'},$$

де δ, $\delta' \in \{0; 1\}$, $\varepsilon = \det\Lambda a$, $\varepsilon' = \det\Lambda' a$, є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли $\delta = \delta'$, $\varepsilon = \varepsilon'$ і існує матриця $g_0 \in GL(2, R)$ така, що $g_0 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$ або $g_0 = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$, де $1 - t^2 \in R^*$, і виконуються рівності $g_0 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{/} & a_2^{/} \\ -\varepsilon a_2^{/} & a_4^{/} \end{pmatrix} g_0$, де $(1-\varepsilon) a_1 = (1-\varepsilon) a_4 = (1-\varepsilon) a_1^{/} = (1-\varepsilon) a_4^{/} = 0$, характеристичні многочлени матриць Λa і $\Lambda' a$ однакові і ділять двочлен $x^m - 1$ з остачею

$$r(x - a_1) = r(x - a_4) = r\left(x - a_1^{/}\right) = r\left(x - a_4^{/}\right), \text{ де } r \in R,\ ra_2 = ra_2^{/} = 0.$$

Стаття складається з трьох частин. У першій частині зібрані загальні поняття і твердження, які використовуються у даній роботі. Зокрема, запропоновано доведення теореми Гамільтона-Келі над довільними комутативними кільцями.

У другій частині розвивається техніка лишкових підмодулів ендоморфізмів модулів скінченної розмірності над асоціативними кільцями, описуються, з точністю до спряження, інволюції повної лінійної групи довільного степеня над локальними кільцями. Отримане описання застосовується при описанні зображень груп дієдра у двовимірному випадку.

У третій частині повністю, з точністю до еквівалентності, описуються двовимірні зображення груп діедра над комутативними локальними кільцями, знаходяться умови їх незвідності, нерозкладності і еквівалентності.

1. Загальні поняття і твердження. У цьому розділі, для зручності, сформулюємо добре відомі поняття, означення та твердження.

Нехай $\mathcal{M}$ — непорожня сукупність підмножин множини Ω. Елемент M називається *максимальним*, якщо він не належить, до відмінного від нього, елемента $\mathcal{M}$.

Якщо $\mathcal{M}$ — множина всіх правих, або лівих, або двосторонніх ідеалів асоціативного кільця, відмінних від нього самого, то максимальний елемент $\mathcal{M}$ називається *максимальним правим*, або *лівим*, або *двостороннім ідеалом кільця*, відповідно. Подібно дається означення максимального правого, або лівого підмодуля довільного модуля над асоціативним кільцем.

Лема Цорна (аксіома). *Якщо об'єднання будь-якої впорядкованої за включенням послідовності підмножин з $\mathcal{M}$ є елементом, який належить до $\mathcal{M}$, то $\mathcal{M}$ містить максимальний елемент.*

З леми Цорна випливає, що в асоціативному кільці з одиницею будь-який правий ідеал, відмінний від самого кільця, міститься в деякому максимальному правому ідеалі.

Аналогічно доводиться, що в будь-якому скінченнопородженому правому модулі над асоціативним кільцем існує максимальний правий підмодуль, який містить деякий фіксований правий підмодуль заданого модуля. Цей максимальний правий підмодуль може бути і нульовим підмодулем, якщо фіксований правий підмодуль є нульовим.

Означення 1. Елемент r асоціативного кільця R з одиницею 1 називається *оборотним зліва*, якщо існує елемент $r_1 \in R$ такий, що $r_1 r = 1$. У протилежному випадку r називається *необоротним зліва.*

Подібно елемент r асоціативного кільця R з 1 називається *оборотним справа*, якщо існує елемент $r_2 \in R$ такий, що $rr_2 = 1$. У протилежному випадку r називається *необоротним справа.*

Означення 2. *Оборотними* називаються елементи, які оборотні зліва і справа одночасно. Елементи асоціативного кільця з одиницею, які не є оборотними називаються *необоротними.*

Очевидно, що якщо $r_1 r = rr_2 = 1$, то $r_1 = r_1 (rr_2) = (r_1 r) r_2 = r_2$. В цьому випадку елемент $r_1 = r_2$ будемо називати *оберненим до* r і позначати r^{-1}.

Оборотні елементи асоціативного кільця R з 1 утворюють групу за множенням, яку, як було вказано вище, позначаємо R^*.

Зрозуміло, що будь-який односторонній або двосторонній ідеал асоціативного кільця з одиницею, який відмінний від самого кільця, не містить односторонніх або двосторонніх оборотних елементів відповідно і складається з необоротних елементів кільця.

Означення 3. *Радикалом Джекобсона* $J(R)$ асоціативного кільця R називається перетин всіх його максимальних правих ідеалів.

Очевидно, що $J(R)$ — правий ідеал.

Лема 1. *Нехай R — асоціативне кільце з 1. Тоді $J(R) = \{r \in R \mid (1-rt)R = R$ для всіх $t \in R\}$.*

З леми 1 випливає, що радикал $J(R)$ складається з елементів $r \in R$ таких, що всі елементи множини $1 - rR$ є оборотними справа.

Лема 2. *Радикал Джекобсона $J(R)$ асоціативного кільця R з 1 є двостороннім ідеалом, $1 - J(R) \subseteq R^*$ і $J(R)$ є перетином всіх максимальних лівих ідеалів кільця R.*

Означення 4. Асоціативне кільце з 1 називається *локальним*, якщо множина всіх його необоротних елементів утворює двосторонній ідеал.

Лема 3. *Асоціативне кільце R з 1 є локальним тоді і тільки тоді, коли всі необоротні елементи кільця R утворюють радикал $J(R)$.*

Лема 4. *Асоціативне кільце R з 1 є локальним тоді і тільки тоді, коли $r \in R^*$ або $1 - r \in R^*$ для довільного елемента r кільця R.*

Означення 5. Елемент асоціативного кільця називається *ідемпотентом*, якщо він співпадає з своїм квадратом. Ідемпотент асоціативного кільця з одиницею називається *нетривіальним*, якщо він відмінний від нульового і одиничного елементів кільця.

Нехай R — локальне кільце і $e^2 = e$ — ідемпотент кільця R. Оскільки $e(1-e) = 0$ і e або $1 - e$ належать до R^*, то $e = 0$ або $e = 1$. Це означає, що локальне кільце не містить нетривіальних ідемпотентів.

Зауважимо, що в локальному кільці R елементи другого порядку належать до $\{\pm 1\}$ при $2 \in R^*$ або належать до множини $1 + J(R)$ при $2 \in J(R)$.

Подібно доводиться, що матриця другого порядку, яка є скалярною за модулем радикала локального кільця R належить до $\{\pm E\}$ при $2 \in R^*$ або має вигляд $E + V$ при $2 \in J(R)$, де V — матриця над $J(R)$.

Теорема (Гамільтона-Келі). *Нехай R – комутативне кільце, $A \in R_n \equiv \operatorname{End}(n, V)$, де $n = \dim V$, $f(x) = \det(xE - A)$ — характеристичний многочлен матриці A. Тоді $f(A) = 0$.*

Доведення. Нехай R — алгебраїчно замкнене поле. Можна вважати, що з точністю до спряження, $A = \begin{pmatrix} a_0 & * \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}$, де $a_0 \in R$, $A_0 \in R_{n-1}$, $f_0(x) = \det(xE - A_0)$.

За індукцією $f_0(A_0) = 0$. Оскільки $f(x) = (x - a_0) f_0(x)$, то $f(A) = 0$.

Якщо R — довільне комутативне кільце, $A = (x_{ij})$, то $f(A) = (g_{kl}(x_{ij}))$, де $g_{kl}(x_{ij}) \in Z[x_{ij}, 1 \le i, j \le n]$ для всіх $1 \le k, l \le n$. За доведеним вище $g_{kl}(x_{ij}) = 0$ над будь-яким алгебраїчно замкненим полем і для будь-яких значень невідомих величин x_{ij}. Це є можливим тільки в тому випадку, коли всі коефіцієнти многочленів $g_{kl}(x_{ij})$ дорівнюють нулю. Тим самим доведено, що $f(A) = 0$ над довільним комутативним кільцем. □

Нехай R — асоціативне кільце з 1, G — група. Під груповим кільцем RG розумітимемо множину однозначно визначених скінченних сум вигляду $\sum_g \alpha_g g$, $\alpha_g \in R, g \in G$ із заданими на них операціями додавання і множення

$$\sum_g \alpha_g g + \sum_g \alpha'_g g = \sum_g \left(\alpha_g + \alpha'_g\right) g, \quad \sum_g \alpha_g g \cdot \sum_h \alpha_h h = \sum_{g,h} \alpha_g \alpha_h gh = \sum_t \left(\sum_g \alpha_g \alpha_{g^{-1}t}\right) t.$$

Вважатимемо, що одиниці кільця R і групи G збігаються з одиницею групового кільця RG. Тому $R \in RG$ і $G \in RG$.

Якщо R — комутативне кільце, то групове кільце RG перетворюється у ліву вільну алгебру RG, в ролі базиса якої виступають елементи групи G, за правилом

$$r\Big(\sum_g \alpha_g g\Big) = \sum_g (r\alpha_g)\, g = \sum_g (\alpha_g r)\, g = \sum_g \alpha_g\, (rg)\,, \text{ де } r \in R.$$

Під *централізатором* $C_R(X)$ деякої множини X асоціативного кільця R розуміють сукупність елементів R, які комутують з кожним елементом множини X. Зокрема, централізатор всього кільця R в R називають *центром кільця* R і позначають ζR.

Нехай V — лівий R-модуль зі скінченним R-базисом, $n = \dim V$, $n \geq 1$, $\mathrm{End}\,(n, V)$ — кільце ендоморфізмів $\mathrm{Hom}_R(V, V)$ модуля V, $GL\,(n, V) = \mathrm{End}\,(n, V)^*$ — група автоморфізмів модуля V. У фіксованому базисі модуля V будемо ототожнювати кільце $\mathrm{End}\,(n, V)$ з R_n–кільцем всіх $n \times n$ матриць над кільцем R, $GL\,(n, V)$ з $GL\,(n, R)$–групою всіх оборотних матриць кільця R_n. Одиничну матрицю з групи $GL\,(n, R)$ позначатимемо через E_n або через E або навіть через 1, якщо з контексту буде зрозуміло про яку одиничну матрицю йдеться.

Гомоморфізм $\Lambda\colon G \to GL\,(n, R) \equiv GL\,(n, V)\,,\ n \geq 1$ називатимемо *зображенням групи* G *у групу* $GL\,(n, R) \equiv GL\,(n, V)\,.$

Використовуватимемо позначення

$$\overline{r} = \Lambda_{J(R)} r,\ \ r \in R,\ \ \overline{h} = \Lambda_{J(R)} h,\ \ h \in GL\,(n, R)\,,\ \overline{g} = \overline{\Lambda} g, g \in G.$$

Відображення $i_h\colon G \to G$, де $i_h\,(g) = hgh^{-1}$, $g \in G$ є автоморфізмом, який називається *внутрішнім автоморфізмом групи* G *з породжуючим елементом* $h \in G$, а елемент $i_h\,(g)$ є визначеним g з точністю до спряження елементом h.

Зображення Λ перетворює лівий R-модуль V у лівий RG-модуль V за правилом

$$\Big(\sum\nolimits_g \alpha_g g\Big) v = \sum\nolimits_g \alpha_g \Lambda g v, \text{ де } g \in G,\ v \in V,\ \alpha_g \in R.$$

Домовимося RG-модуль V з скінченним R-базисом називати модулем, у якому реалізується зображення Λ групи G, а його RG-підмодулі називати G-інваріантними підмодулями або просто G-підмодулями.

Неважко побачити, що у фіксованому скінченному R-базисі модуля V, $n = \dim V$, $n \geq 1$ кільце ендоморфізмів $\mathrm{Hom}_{RG}\,(V, V)$ RG-модуля V можна ототожнити з централізатором $C_{R_n}\,(\Lambda G)$ групи ΛG у кільці R_n.

Під нетривіальними підмодулями деякого модуля розумітимемо відмінні від нього ненульові підмодулі.

Означення 6 (модульне формулювання). Зображення $\Lambda\colon G \to GL\,(n, V)\,,\ n \geq 1$, називається *звідним*, якщо існує нетривіальний RG-підмодуль модуля V зі скінченним R-базисом, який можна доповнити до R-базиса модуля V. У протилежному випадку зображення Λ називається *незвідним*.

Означення 7 (матричне формулювання). Зображення $\Lambda\colon G\to GL\left(n,R\right),\ n\geq 1$, називається *звідним*, якщо існує матриця $c\in GL\left(n,R\right)$ така, що
$$c\Lambda gc^{-1}=\begin{pmatrix}\Lambda_1 g & \Lambda_0 g\\ 0 & \Lambda_2 g\end{pmatrix},$$
де $\Lambda_i g\in GL\left(n_i,R\right)$ для всіх $g\in G$, $n_i<n$, $1\leq i\leq 2$. Якщо вказана вище матриця c не існує, то таке зображення Λ називається *незвідним.*

Очевидно, що означення 6 і 7 є рівносильними.

Означення 8. Зображення $\Lambda\colon G\to GL\left(n,V\right),\ n\geq 1$, називається *незвідним*, якщо RG-модуль V не містить нетривіальних RG-підмодулів.

Зрозуміло, що якщо зображення Λ є незвідним за означенням 8, то, згідно з лемою Шура, $\mathrm{Hom}_{RG}\left(V,V\right)$ — тіло, яке містить центр кільця R і яке у такому випадку є полем.

Очевидно, що незвідний модуль за означенням 8 є незвідним і за означенням 6. Навпаки не завжди вірно, хоча над тілами ці поняття збігаються, адже одновимірні зображення довільної групи над кільцями, які не містять тіл, є звідними за означенням 8, хоча за означенням 6 вони є незвідними.

У подальшому під незвідним зображенням, якщо не буде обумовлено інше, розумітимемо незвідне зображення у сенсі означень 6 і 7.

Правильне таке твердження.

Лема 5 (критерій незвідності). *Нехай R — локальне кільце, $\Lambda\colon G\to GL\left(2,R\right)$ — зображення групи G. Зображення Λ є незвідним тоді і тільки тоді, коли не існує елементів $x\in R$ таких, що $\left(g_0\Lambda g g_0^{-1}\right)_{21}=0$ для всіх $g\in G$, де*
$$g_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}\ \textit{або}\ g_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}.$$

Доведення. Введемо позначення
$$h=\begin{pmatrix}h_1 & h_2\\ h_3 & h_4\end{pmatrix}\in GL\left(2,R\right),\quad h^{-1}=\begin{pmatrix}H_1 & H_2\\ H_3 & H_4\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\in R_2.$$
Тоді $h_3H_1+h_4H_3=0$, $\left(hXh^{-1}\right)_{21}=\left(h_3x_1+h_4x_3\right)H_1+\left(h_3x_2+h_4x_4\right)H_3$.

Якщо $h_3\in R^*$, то $H_3\notin J\left(R\right)$ і тому $H_3\in R^*$. Введемо позначення
$$x=h_3^{-1}h_4=-H_1H_3^{-1},\quad g_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}.$$
Аналогічно, якщо $h_4\in R^*$, то $H_1\in R^*$ і позначаємо
$$x=h_4^{-1}h_3=-H_3H_1^{-1},\quad g_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}.$$
Тоді $\left(hXh^{-1}\right)_{21}=h_3\left(g_0Xg_0^{-1}\right)_{21}H_3$ при $h_3\in R^*$ і $\left(hXh^{-1}\right)_{21}=h_4\left(g_0Xg_0^{-1}\right)_{21}H_1$ при $h_4\in R^*$.

Тому $\left(hXh^{-1}\right)_{21}=0$ тоді і тільки тоді, коли $\left(g_0Xg_0^{-1}\right)_{21}=0$. Тим самим доведено, що зображення Λ є незвідним тоді і тільки тоді, коли не існує елементів $x\in R$ таких, що $\left(g_0\Lambda g g_0^{-1}\right)_{21}=0$ для всіх $g\in G$. □

Зрозуміло, що в критерії незвідності достатньо вимагати, щоб рівність $\left(g_0\Lambda g g_0^{-1}\right)_{21}=0$ виконувалась для деякої системи породжуючих елементів групи G.

Означення 9 (**модульне формулювання**). Зображення $\Lambda\colon G \to GL(n, V), n \geq 1$ називається *розкладним*, якщо RG-модуль V є прямою сумою нетривіальних RG-підмодулів зі скінченними R-базисами. У протилежному випадку зображення Λ називається *нерозкладним.*

Означення 10 (**матричне формулювання**). Зображення $\Lambda\colon G \to GL(n, R)$, $n \geq 1$, є *розкладним*, якщо існує матриця $c \in GL(n, R)$ така, що

$$c\Lambda g c^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 g & 0 \\ 0 & \Lambda_2 g \end{pmatrix},$$

де $\Lambda_i g \in GL(n_i, R)$ для всіх $g \in G$, $n_i < n$, $1 \leq i \leq 2$. Якщо вказана вище матриця c не існує, то таке зображення Λ називається *нерозкладним.*

Очевидно, що означення 9 і 10 — рівносильні.

Зрозуміло, що розкладні зображення — звідні. Тому незвідні зображення — нерозкладні. Те, що незвідні зображення знаходяться серед нерозкладних зображень дає можливість характеризувати їх через ознаки, якими вони виділяються у класі нерозкладних зображень. Тому можна описувати спочатку нерозкладні зображення, а потім знаходити серед них незвідні зображення.

Якщо порядок групи G є оборотним в кільці R, то, за теоремою Машке, звідні зображення є розкладними і внаслідок цього нерозкладні зображення групи G є незвідними.

Отже, поняття нерозкладності і незвідності зображень скінченної групи скінченного степеня над кільцями, в яких порядок групи є оборотним, збігаються.

Означення незвідності і нерозкладності зображень груп подібно формулюються для будь-яких матричних відображень, а тому і для будь-яких матричних множин.

Нехай R — локальне кільце і Λ — зображення групи G таке, що $V = V_1 \oplus V_2$, де V_1, V_2 — нетривіальні RG-модулі. Як відомо, проективні модулі над локальними кільцями вільні. Тому V_1 і V_2 — нетривіальні RG-підмодулі модуля V зі скінченними R-базисами, які доповнюють R-базиси один одного до R-базиса модуля V. Це означає, що зображення Λ є розкладним. Навпаки очевидно.

Тим самим доведено, що у визначенні поняття розкладного зображення над локальними кільцями вимога про скінченність R-базисів в означенні 9 є зайвою. Це означає, що нерозкладні зображення групи G над локальними кільцями реалізуються в G-модулях, які не розкладаються в пряму суму G-підмодулів.

Із сказаного випливає, що довільний RG-модуль зі скінченним R-базисом над локальним кільцем R є скінченною прямою сумою нерозкладних RG-підмодулів.

В такому випадку будемо казати, що зображення групи G реалізується у RG-модулі V, який є сумою нерозкладних зображень групи G.

Лема 6 (**критерій нерозкладності**). *Нехай R — локальне кільце, V — лівий R-модуль зі скінченним R-базисом, $n = \dim V$, $n \geq 1$, в якому реалізується зображення Λ групи G. Модуль V є нерозкладним RG-модулем тоді і тільки тоді, коли кільце ендоморфізмів $\mathrm{Hom}_{RG}(V, V) \equiv C_{R_n}(\Lambda G)$ не містить нетривіальних ідемпотентів.*

Доведення. Нехай $V = V_1 \oplus V_2$ — розкладний RG-модуль. Ендоморфізм e модуля V, який визначений за правилом $e(v_1 + v_2) = v_1$ для будь-яких $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, є нетривіальним ідемпотентом кільця ендоморфізмів $\mathrm{Hom}_{RG}(V, V)$.

Навпаки. Якщо e — нетривіальний ідемпотент кільця ендоморфізмів $\mathrm{Hom}_{RG}(V, V)$, то з пірсового розкладу $V = eV \oplus (1 - e)V$ випливає, що V — розкладний RG-модуль. $\square$

Наслідок. *Нехай R — локальне кільце, $2 \in J(R)$. Тоді матриця $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ є нерозкладною.*

Нехай R — асоціативне кільце з одиницею, G — група, V і V' — ліві вільні R-модулі зі скінченними R-базисами, $n = \dim V$, $n' = \dim V'$.

Як і вище, зображення

$$\Lambda\colon G \to GL(n,R) \equiv GL(n,V), \quad \Lambda'\colon G \to GL(n',R) \equiv GL(n',V')$$

перетворюють ліві R-модулі V і V' у ліві RG-модулі V і V'.

Означення 11 (**модульне формулювання**)**.** Зображення Λ і Λ' називаються *еквівалентними*, якщо модулі V і V', в яких вони реалізуються, ізоморфні як RG-модулі. У протилежному випадку зображення Λ і Λ' називаються *нееквівалентними*.

Означення 12 (**матричне формулювання**)**.** Зображення Λ і Λ' називаються *еквівалентними*, якщо $n = n'$ і існує матриця $C \in GL(n,R)$ така, що $c\Lambda gc^{-1} = \Lambda' g$ для всіх $g \in G$. У протилежному випадку зображення Λ і Λ' називаються *нееквівалентними*.

З модульної еквівалентності зображень Λ і Λ' випливає, що існує ізоморфізм $f\colon V \to V'$ R-модулів V і V' такий, що $f(gv) = gf(v)$ для будь-яких $g \in G$ і $v \in V$. Тому $n = n'$, $f\Lambda g = \Lambda' gf$ і для фіксованих базисів модулів V і V' виконуються рівності $c\Lambda gc^{-1} = \Lambda' g$ для всіх $g \in G$, де матриця $c \in GL(n, \zeta R)$ відповідає ізоморфізму f.

Це означає, що з модульної еквівалентності випливає матрична еквівалентність зображень. Аналогічно доводиться, що з матричної еквівалентності випливає модульна еквівалентність зображень.

Ключовими класичними твердженнями в теорії зображень скінченних груп, як уже відзначалось вище, є лема Шура і теорема Машке.

Лема Шура (**модульне формулювання**)**.** *Адитивна група гомоморфізмів $\mathrm{Hom}_{RG}(V,V') = 0$, якщо V і V' — неізоморфні незвідні за означенням 8 ліві RG-модулі і $n = n'$, ненульові елементи $\mathrm{Hom}_{RG}(V,V')$ — оборотні у протилежному випадку. Зокрема, $\mathrm{Hom}_{RG}(V,V)$ — тіло.*

Якщо R — алгебраїчно замкнене поле, то $\mathrm{Hom}_{RG}(V,V) \equiv R$.

Лема Шура (**матричне формулювання**)**.** *Нехай C — матриця $n' \times n$ над кільцем R така, що $C\Lambda g = \Lambda' gC$ для всіх $g \in G$. Тоді $C = 0$, якщо Λ і Λ' — нееквівалентні незвідні за означенням 8 зображення і $n = n'$, $C = 0$ або $C \in GL(n,R)$ у протилежному випадку. Зокрема, якщо $\Lambda' = \Lambda$, то такі матриці C утворюють тіло.*

Якщо $\Lambda' = \Lambda$ і R — алгебраїчно замкнене поле, то C — скалярні матриці.

Теорема Машке (**матричне формулювання**)**.** *Нехай R — асоціативне кільце з 1, G — скінченна група, $|G| \in R^*$, $\Lambda\colon G \to GL(n,R)$ — зображення групи G таке, що*

$$\Lambda g = \begin{pmatrix} \Lambda_1 g & T(g) \\ 0 & \Lambda_2 g \end{pmatrix}, \text{ де } \Lambda_1 g \in GL(n_1,R), \Lambda_2 g \in GL(n_2,R) \text{ для всіх } g \in G,\ n_1 < n,$$

$n_2 < n$. Тоді існує матриця $C = \begin{pmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ така, що $C\Lambda gC^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 g & 0 \\ 0 & \Lambda_2 g \end{pmatrix}$.

Теорема Машке (**модульне формулювання**)**.** *Нехай R — асоціативне кільце з 1, V — вільний R-модуль зі скінченним R-базисом, група G — скінченна і $|G| \in R^*$. Тоді кожний G-інваріантний підмодуль $W \subset V$ зі скінченним R-базисом, який доповнюється до R-базиса модуля V, має G-інваріантне доповнення.*

2. Ендоморфізми модулів над асоціативними кільцями. Нехай V — довільний лівий R-модуль над асоціативним кільцем R з 1, σ — довільний ендоморфізм модуля V.

Означення 13. *Лишковими підмодулями* модуля V ендоморфізма σ будемо називати підмодулі $R(\sigma) = (\sigma - 1)V$ і $P(\sigma) = \ker(\sigma - 1)$.

Зрозуміло, що
$$R(\sigma) = \{(\sigma - 1)v \mid v \in V\} \text{ і } P(\sigma) = \{v \in V \mid \sigma v = v\},$$
а також $R(1-\sigma) = \sigma V$ і $P(1-\sigma) = \ker \sigma$.

Легко бачити, що якщо σ — автоморфізм модуля V, то з рівності $\sigma^{-1} - 1 = (\sigma - 1) \times \times (-\sigma^{-1})$ випливає, що
$$R(\sigma^{-1}) = R(\sigma) \text{ і } P(\sigma^{-1}) = P(\sigma).$$

Якщо g — довільний ендоморфізм модуля V такий, що $g\sigma = \sigma^{\pm 1} g$, то $g(\sigma - 1) = (\sigma^{\pm 1} - 1)g$ і тому
$$gR(\sigma) \subseteq R(\sigma^{\pm 1}) = R(\sigma) \text{ і } gP(\sigma) \subseteq P(\sigma^{\pm 1}) = P(\sigma).$$
Зокрема, якщо g – автоморфізм модуля V такий, що $g\sigma g^{-1} = \sigma^{\pm 1}$, то
$$gR(\sigma) = R(\sigma) \text{ і } gP(\sigma) = P(\sigma).$$
Те саме випливає із загальних формул
$$gR(\sigma) = R(g\sigma g^{-1}) \text{ і } gP(\sigma) = P(g\sigma g^{-1}),$$
які внаслідок рівності $g\sigma g^{-1} - 1 = g(\sigma - 1)g^{-1}$ правильні для будь-якого ендоморфізму σ і будь-якого автоморфізму g модуля V.

Виконуються очевидні включення
$$R(\sigma_1\sigma_2) \subseteq R(\sigma_1) + R(\sigma_2),\ P(\sigma_1\sigma_2) \supseteq P(\sigma_1) \bigcap P(\sigma_2),$$
які випливають з рівностей $\sigma_1\sigma_2 - 1 = (\sigma_1 - 1)\sigma_2 + \sigma_2 - 1 = \sigma_1(\sigma_2 - 1) + \sigma_1 - 1$.

Лема 7. *Нехай R — асоціативне кільце з 1, V — лівий R-модуль (не обов'язково вільний), $\sigma \in GL(V)$, $\sigma^m = 1$, $m \in R^*$. Тоді $V = R(\sigma) \oplus P(\sigma)$, де*
$$P(\sigma) = \{v \in V \mid (\sigma - 1)v = 0\} \text{ і } R(\sigma) = \{v \in V \mid (1 + \sigma + \cdots + \sigma^{m-1})v = 0\}.$$

Доведення. Нехай $e = (1 + \sigma + \cdots + \sigma^{m-1})m^{-1}$. Оскільки $e\sigma^i = \sigma^i e = e$ для всіх $i \geq 0$, то $e^2 = e(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{m-1})m^{-1} = e$ — ідемпотент і справджується пірсовий розклад
$$V = eV \oplus (1-e)V, \text{ де } v = ev + (1-e)v,\ v \in V.$$

Очевидно, що
$$eV = \{v \in V \mid (1-e)v = 0\} = \ker(1-e) \text{ і } (1-e)V = \{v \in V \mid ev = 0\} = \ker e.$$
Оскільки $e(1-\sigma) = (1-\sigma)e = 0$ і $1 - e = (1-\sigma)t$, де $t \in \operatorname{End} V$ і $\sigma t = t\sigma$, то
$$eV \subseteq P(\sigma) \subseteq \ker(1-e) \subseteq eV \text{ і } (1-e)V \subseteq R(\sigma) \subseteq \ker e \subseteq (1-e)V.$$
Тим самим доведено, що $P(\sigma) = eV = \ker(1-e) = \{v \in V \mid (\sigma - 1)v = 0\}$, $R(\sigma) = (1-e)V = \ker e = \{v \in V \mid (1 + \sigma + \cdots + \sigma^{m-1})v = 0\}$. □

2.1. Інволюції повної лінійної групи над локальними кільцями, в яких елемент два — оборотний. Елементи другого порядку довільної групи прийнято називати *інволюціями.*

У цьому і наступному пунктах опишемо, з точністю до спряження, всі інволюції повної лінійної групи степеня не меншого за 1 над довільними локальними кільцями.

Лема 8 (модульне формулювання). *Нехай R — локальне кільце, $2 \in R^*$, $b \in GL(n,V)$, $n \geq 1$, $b^2 = 1$. Тоді існує базис R-модуля V, в якому b має діагональний вигляд з плюс, мінус одиницями на діагоналі. Число одиниць на діагоналі визначається автоморфізмом b однозначно і дорівнює $\dim P(b)$.*

Доведення. Справді, $e = (1+b)\,2^{-1}$, $1-e = (1-b)\,2^{-1}$. Тоді $V = eV \oplus (1-e)V$, де

$$eV = P(b) = \{v \in V \,|bv = v\}\,, \;\; (1-e)V = \ker e = \{v \in V \,|bv = -v\}\,.$$

Оскільки проективні модулі eV і $(1-e)V$ над локальними кільцями — вільні, то існує базис модуля V, який складається з базисів підмодулів eV і $(1-e)V$, в якому b має діагональний вигляд з плюс, мінус одиницями на діагоналі. Число одиниць на діагоналі b не залежить від вибраного базису і дорівнює $\dim P(b)$, адже, якщо $g \in GL(n,V)$, то $P(gbg^{-1}) = gP(b)$. □

На матричній мові лема 8 означає, що будь-яка інволюція, з точністю до спряження, має діагональний вигляд з плюс, мінус одиницями на діагоналі, число яких визначається інволюцією однозначно.

Більше того, будь-яка множина попарно комутативних інволюцій, з точністю до еквівалентності, має діагональний вигляд з плюс, мінус одиницями на діагоналях.

Зокрема, двовимірні інволюції співпадають з $\pm E$ або, з точністю до спряження, мають вигляд $\pm diag(-1,1)$.

Зрозуміло, що нерозкладними інволюціями групи $GL(n,R)$, $n \geq 1$, а, отже, і незвідними інволюціями є одновимірні матриці вигляду ± 1.

2.2. Інволюції повної лінійної групи над локальними кільцями, в яких елемент два — необоротний.

Лема 9. *Нехай R — тіло, $\operatorname{char} R = 2$, $b \in GL(n,R) \equiv GL(n,V)$, $n \geq 1$, $b^2 = 1$. Тоді, з точністю до спряження,*

$$b = \begin{pmatrix} E_l & 0 & E_l \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E_l \end{pmatrix}, \quad C_{R_n}(b) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} R_l & * & * \\ 0 & R_{n-2l} & * \\ 0 & 0 & R_l \end{pmatrix} \right\},$$

де E_l означає одиничну матрицю групи $GL(l,R)$, $0 \leq l \leq \frac{n}{2}$, l визначається матрицею b однозначно і дорівнює $\dim R(b)$, $C_{R_n}(b)$ — централізатор b у кільці R_n.

Доведення. Неважко побачити, що $(b-1)^2 = 0$, $R(b) \subseteq P(b)$. Якщо $b = 1$, то твердження леми 9 виконується при $l = 0$. Нехай $b \neq 1$. Тоді $P(b) \neq V$, $R(b) \neq 0$, $P(b) \neq 0$. Нехай $V = P(b) \oplus W$. Тоді $l = \dim W = \dim V - \dim P(b) = \dim R(b)$ — визначається матрицею b однозначно. Очевидно, що

$$R(b) = (b-1)W,\, 1 \leq l \leq n-l,\, bP(b) = P(b)\,,\, bR(b) = R(b)\,.$$

Нехай $e_{n-l+1}, ..., e_n$ — базис W. Тоді $e_1 = be_{n-l+1} - e_{n-l+1}, \ldots, e_l = be_n - e_n$ — базис $R(b)$. Доповнимо базис $e_1, ..., e_l$ підпростору $R(b)$ до базису $e_1, ..., e_l, e_{l+1}, ..., e_{n-l}$ простору $P(b)$. В такому разі $e_1, ..., e_l, e_{l+1}, ..., e_{n-l}, e_{n-l+1}, ..., e_n$ — базис простору V, в якому b має шуканий вигляд.

Оскільки з рівності $gb = bg$, де $g \in R_n \equiv \operatorname{End}(n,V)$ випливає, що $gR(b) \subseteq R(b)$ і $gP(b) \subseteq P(b)$, то централізатор $C_{R_n}(b)$ має вказаний вище вигляд. □

Лема 10 (матричне формулювання). *Нехай R — локальне кільце, $2 \in J(R)$, $b \in GL(n,R) \equiv GL(n,V)$, $n \geq 1$, $b^2 = 1$. Тоді матриця b спряжена з матрицею*

$$b_{l,J} = \operatorname{diag}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{2l}, E+J\right)$$

де $l = \dim R\left(\overline{b}\right), 0 \le l \le \frac{n}{2}$ *визначається матрицею* b *однозначно, а* J *— матриця розмірів* $(n-2l)\times(n-2l)$ *над* $J(R)$, $J(J+2E)=0$, *яка визначається матрицею* b *з точністю до спряження.*

Доведення. За лемою 9 $\overline{b} = \overline{1}$ і тоді твердження леми 10 виконується при $l=0$, або, з точністю до спряження, можна вважати, що

$$b = \begin{pmatrix}E_l & 0 & E_l\\ 0 & E & 0\\ 0 & 0 & E_l\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}J_{11} & J_{12} & J_{13}\\ J_{21} & J_{22} & J_{23}\\ J_{31} & J_{32} & J_{33}\end{pmatrix},$$

де E_l означає одиничну матрицю групи $GL(l,R)$, $1 \le l \le \frac{n}{2}$, $l = \dim R\left(\overline{b}\right)$ визначається матрицею $\overline{b}$ (а, отже, і матрицею b), однозначно, а J_{ij} — матриці відповідних розмірів над $J(R)$, $1 \le i,j \le 3$.

Оскільки $E_l + J_{13} \in GL(l,R)$, то, з точністю до спряження матрицею

$$\begin{pmatrix}(E_l+J_{13})^{-1} & 0 & 0\\ -J_{23}(E_l+J_{13})^{-1} & E & 0\\ -J_{33}(E_l+J_{13})^{-1} & 0 & E_l\end{pmatrix},$$

можна вважати, що $J_{13}=0$, $J_{23}=0$, $J_{33}=0$. Подібно, з точністю до спряження матрицею

$$\begin{pmatrix}E_l & 0 & 0\\ 0 & E & 0\\ 0 & J_{12} & E_l\end{pmatrix},$$

можна вважати, що $J_{12}=0$. З рівності $b^2=1$ випливає, що $J_{21}=0$, $J_{31}=0$, $J_{32}=0$, $E_l + J_{11} = -E_l$. Тим самим доведено, що, з точністю до спряження,

$$b = \begin{pmatrix}-E_l & 0 & E_l\\ 0 & E+J & 0\\ 0 & 0 & E_l\end{pmatrix}.$$

Неважко побачити, що з рівності

$$g\begin{pmatrix}-E_l & 0 & E_l\\ 0 & E+J & 0\\ 0 & 0 & E_l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-E_l & 0 & E_l\\ 0 & E+J' & 0\\ 0 & 0 & E_l\end{pmatrix} g,$$

де J, J' — матриці над $J(R)$, $g=(g_{ij}) \in R_n$, $1 \le i,j \le 3$ випливає, що $g_{22}J = J'g_{22}$. За лемою 9 g_{21}, g_{31}, g_{32} — матриці над $J(R)$. Тому, якщо $g \in GL(n,R)$, то $\overline{g} \in GL\left(n,\overline{R}\right)$, $\overline{g_{22}} \in GL\left(n-2l,\overline{R}\right)$, $g_{22} \in GL(n-2l,R)$. Це означає, що матриця J визначається матрицею b з точністю до спряження.

Нарешті, з точністю до спряження матрицями вигляду

$$\operatorname{diag}\left(1,...,1,\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},1,...,1\right),$$

матриця b спряжена з матрицею $b_{l,J}$, де l визначається матрицею b однозначно, а матриця J з точністю до спряження. □

Зокрема, двовимірні інволюції мають вигляд $E+V$, де V — двовимірна матриця над радикалом $J(R)$ або спряжені з матрицею $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, яка в свою чергу спряжена з матрицею $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Зрозуміло, що нерозкладними інволюціями групи $GL\,(n, R)\,, n \geq 1$ є матриці вигляду $E + V$, де V — нерозкладна матриця над радикалом $J\,(R)$ або, з точністю до спряження, звідна двовимірна інволюція $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, образ якої є нерозкладним над тілом $\overline{R}$ і, як наслідок, сама інволюція є нерозкладною над кільцем R.

Підкреслимо, що з останнього випливає, що над локальними кільцями, в яких елемент два є необоротним, поняття нерозкладних зображень навіть циклічної групи другого порядку є ширшим від поняття їх незвідності.

Також зрозуміло, що незвідними інволюціями групи $GL\,(n, R)$ є тільки матриці вигляду $E + V$, де V — незвідна матриця над радикалом $J\,(R)\,$.

3. Двовимірні зображення груп діедра над комутативними локальними кільцями.

3.1. Загальний вигляд зображень. Нехай R — комутативне локальне кільце, $J\,(R)$ — радикал кільця R, $R/_{J\,(R)}$ — поле, $\Lambda_{J(R)} \colon GL\,(2, R) \to GL\,(2,\ R/_{J\,(R)})$ — гомоморфізм, індукований гомоморфізмом $\Lambda_{J(R)} \colon R \to R/_{J\,(R)}$, $D_m = \left\langle a, b \mid a^m = b^2 = (ba)^2 = 1 \right\rangle$ — група діедра, Λ — зображення групи $D_m, m > 1$ у групу $GL\,(2, R)\,$, $\overline{\Lambda} = \Lambda_{J(R)}\Lambda$, $f\,(x) = x^2 - \operatorname{tr}\Lambda a x + \det \Lambda a$ — характеристичний многочлен матриці Λa.

Теорема 1. *Довільне двовимірне зображення $\Lambda \colon D_m \to GL\,(2, R)$ групи D_m, $m > 1$ над комутативним локальним кільцем R має вигляд $\Lambda a = E + V$, $\Lambda b = E + V_0$, при $2 \in J\,(R)$ або Λa, Λb належать до $\{\pm E\}$ при $2 \in R^*$, де V і V_0 — матриці над $J\,(R)$ (перший випадок), або, з точністю до еквівалентності,*

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda a^{\delta} \quad \textit{(другий випадок)},$$

де $\varepsilon^2 = 1$, $(1 - \varepsilon)\, a_1 = (1 - \varepsilon)\, a_4 = 0$, $a_1 a_4 + a_2^2 = 1$, $\varepsilon = \det \Lambda a$, а $f\,(x)$ ділить двочлен $x^m - 1$ з остачею $r\,(x - a_1) = r\,(x - a_4)\,$, де $r \in R$, $r a_2 = 0$, $\delta = 0$, якщо $\overline{\Lambda} b$ — нескалярна матриця і $\delta = 1$, якщо $\overline{\Lambda} b$ — скалярна, а $\overline{\Lambda} a$ — нескалярна матриці. Зокрема, якщо $\overline{\Lambda} a$ — нескалярна матриця, то $r = 0$.

Доведення. Нехай $\overline{\Lambda} b$ і $\overline{\Lambda} a$ — скалярні матриці (перший випадок). Тоді виконуються рівності

$$\overline{\Lambda} b = \pm \overline{E} \text{ і } \overline{\Lambda} a = \pm \overline{E}.$$

Якщо $2 \in J\,(R)\,$, то $\Lambda a = E + V$, $\Lambda b = E + V_0$, де V і V_0 — матриці над $J\,(R)$ такі, що $2V_0 + V_0^2 = 0$, $(E + V)^m = E$, $0 = V\Lambda b + \Lambda b V + V \Lambda b V = 2V + V^2 + V V_0 + V_0 V + V V_0 V$.

Якщо $2 \in R^*$, то матриці Λa, Λb належать до $\{\pm E\}\,$.

Нехай $\overline{\Lambda} b$ — нескалярна матриця (другий випадок). Тоді, з точністю до спряження, виконуються рівності

$$\Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Нехай $\varepsilon = \det \Lambda a$. З визначальних співвідношень $(ba)^2 = 1$ групи діедра $D_m, m > 1$ випливає, що $\varepsilon^2 = 1$. Оскільки

$$\begin{pmatrix} a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \Lambda b \Lambda a \Lambda b^{-1} = \Lambda a^{-1} = \varepsilon \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix},$$

то $(1-\varepsilon)\,a_1 = (1-\varepsilon)\,a_4 = 0$, $a_3 = -\varepsilon a_2$, $a_1a_4 + \varepsilon a_2^2 = \varepsilon$, $a_1a_4 + a_2^2 = 1$.

Нехай характеристичний многочлен $x^2 - \operatorname{tr}\Lambda a x + \det \Lambda a$ матриці Λa ділить двочлен $x^m - 1$ з остачею $r(x) = rx + r_0$, де r, r_0 — елементи кільця R. За теоремою Гамільтона-Келі $r(\Lambda a) = 0$. Тому $ra_2 = ra_3 = 0$, $r_0 = -ra_1 = -ra_4$, $r(x) = r(x-a_1) = r(x-a_4)$. Тим самим доведено, що

$$\Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon^2 = 1$, $(1-\varepsilon)\,a_1 = (1-\varepsilon)\,a_4 = 0$, $a_1a_4 + a_2^2 = 1$, $\varepsilon = \det \Lambda a$, а $f(x)$ ділить двочлен $x^m - 1$ з остачею $r(x-a_1) = r(x-a_4)$, $ra_2 = 0$.

Зокрема, якщо $\overline{\Lambda} a$ – скалярна матриця, то

$$a_1 \in R^*,\ a_4 \in R^*,\ \varepsilon = 1,\ a_3 = -a_2,\ a_1a_4 + a_2^2 = 1,$$

а $f(x)$ ділить двочлен $x^m - 1$ з остачею $r(x-a_1) = r(x-a_4)$, $ra_2 = 0$.

Якщо $\overline{\Lambda} a$ — нескалярна матриця, то з рівностей $r(a_1 - a_4) = ra_2 = ra_3 = 0$ випливає, що $r = 0$, тобто, що тричлен $x^2 - \operatorname{tr}\Lambda a x + \det \Lambda a$ ділить без остачі двочлен $x^m - 1$.

Якщо при цьому $2 \in R^*$, то, з точністю до спряження, $\Lambda b = \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Збережемо позначення $\Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \det \Lambda a$. З рівності $bab^{-1} = a^{-1}$ випливає, що

$$\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ -a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\overline{\Lambda} a$ — нескалярна матриця, то $\varepsilon = 1$, $a_1 = a_4$. Тому a_2 або a_3 є оборотними елементами кільця R. Без обмеження загальності, можна вважати, що $a_2 \in R^*$. Спряження матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$ показує, що

$$\Lambda b = \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \text{ де } \alpha = 2a_1.$$

Нехай $\overline{\Lambda} b$ — скалярна і $\overline{\Lambda} a$ — нескалярна матриці (другий випадок).

Тоді $\overline{\Lambda} ba^{-1}$ — нескалярна матриця і, згідно з попереднім випадком, з точністю до еквівалентності,

$$\Lambda ba^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda a, \quad \Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon^2 = 1$, $(1-\varepsilon)\,a_1 = (1-\varepsilon)\,a_4 = 0$, $a_1a_4 + a_2^2 = 1$, $\varepsilon = \det \Lambda a$, тричлен $x^2 - \operatorname{tr}\Lambda a x + \det \Lambda a$ ділить без остачі двочлен $x^m - 1$. Зокрема, якщо $2 \in R^*$, то, з точністю до спряження, Λb є діагональною матрицею з плюс, мінус одиницями на діагоналі. Оскільки $\overline{\Lambda} b$ — скалярна матриця, то $\Lambda b = \pm E$. Враховуючи, що $(ba)^2 = 1$ отримуємо, що $\Lambda a^2 = E$. Тому, з точністю до спряження, можна вважати, що

$$\Lambda b = \pm E, \quad \Lambda a = \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Зберемо всі випадки, які зустрічаються в теоремі 1 при $2 \in R^*$. За доведеним вище, з точністю до еквівалентності, Λa і $\Lambda b = \pm E$ — діагональні матриці з плюс, мінус одиницями на діагоналях, або

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \Lambda b = \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{якщо } \overline{\Lambda} a \text{ — нескалярна матриця,}$$

або

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } a_1a_4 + a_2^2 = 1, \text{ якщо } \overline{\Lambda}a \text{ — скалярна матриця,}$$

і в останніх двох випадках характеристичний многочлен $x^2 - \operatorname{tr} \Lambda a x + \det \Lambda a$ матриці Λa ділить двочлен $x^m - 1$ без остачі, якщо $\overline{\Lambda}a$ — нескалярна матриця і з остачею $r(x - a_1) = r(x - a_4)$, $ra_2 = 0$, якщо $\overline{\Lambda}a$ — скалярна матриця.

3.2. Незвідність зображень. Питання незвідності зображень групи діедра $D_m, m > 1$ повністю розв'язує така теорема.

Теорема 2. *Нехай R — комутативне локальне кільце. Зображення Λ у випадку 1 теореми 1 є незвідним тоді і тільки тоді, коли пара матриць V і V_0 є незвідною. У випадку 2 теореми 1 зображення Λ є незвідним тоді і тільки тоді, коли не існує елементів $x \in R$ таких, що $x^2 = 1$ і $(\Lambda a)_{11} - (\Lambda a)_{22} = (1+\varepsilon)\, x\, (\Lambda a)_{12}$.*

Доведення. За критерієм незвідності, зображення Λ є незвідним тоді і тільки тоді, коли не існує елементів $x \in R$ таких, що $\left(g_0 \Lambda a g_0^{-1}\right)_{21} = \left(g_0 \Lambda b g_0^{-1}\right)_{21} = 0$, де

$$g_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \text{ або } g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}.$$

У випадку 1 теореми 1, якщо $2 \in J(R)$, то зображення Λ є звідним тоді і тільки тоді, коли

$$\left(g_0 V g_0^{-1}\right)_{21} = \left(g_0 \Lambda a g_0^{-1}\right)_{21} = 0, \quad \left(g_0 V_0 g_0^{-1}\right)_{21} = \left(g_0 \Lambda b g_0^{-1}\right)_{21} = 0,$$

тобто, коли пара матриць V і V_0 є звідною і незвідним тоді і тільки тоді, коли пара матриць V і V_0 є незвідною.

Якщо $2 \in R^*$, то матриці Λa, Λb, $\Lambda' a$, $\Lambda' b$ належать до $\{\pm E\}$. Тому зображення Λ є розкладним і, як наслідок, звідним.

У випадку 2 теореми 1, тобто, якщо $\Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix}$, $\Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda a^{\delta}$, $\delta \in \{0; 1\}$, $\varepsilon = \det \Lambda a$, $\varepsilon^2 = 1$, $(1-\varepsilon)\, a_1 = (1-\varepsilon)\, a_4 = 0$, $a_1a_4 + a_2^2 = 1$, а $f(x)$ ділить двочлен $x^m - 1$ з остачею $r(x - a_1) = r(x - a_4)$, $ra_2 = 0$ зображення Λ є звідним тоді і тільки тоді, коли

$$\left(g_0 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix} g_0^{-1}\right)_{21} = \left(g_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g_0^{-1}\right)_{21} = 0.$$

Ці рівності еквівалентні до системи

$$\begin{cases} a_1 - a_4 = (1+\varepsilon)\, x a_2, \\ x^2 = 1. \end{cases}$$

Тому у випадку 2 теореми 1 зображення Λ є незвідним тоді і тільки тоді, коли не існує елементів $x \in R$ таких, що $x^2 = 1$ і $(\Lambda a)_{11} - (\Lambda a)_{22} = (1+\varepsilon)\, x\, (\Lambda a)_{12}$. □

Умови незвідності зображення Λ у випадку 2 теореми 1 можна переформулювати.

Наслідок. *Нехай $x^2 = 1$ і $a_1 - a_4 = (1+\varepsilon)\, x a_2$, де $\varepsilon = \det \Lambda a$. В такому разі $\alpha = \operatorname{tr} \Lambda a = a_1 + a_4 = a_1 - a_4 + 2a_4 = (1+\varepsilon)(xa_2 + a_4)$. Позначимо $\gamma = xa_2 + a_4$. Отримаємо, що $\alpha = (1+\varepsilon)\gamma$ і $1 - \gamma^2 = 1 - a_2^2 - 2xa_2a_4 - a_4^2 = (a_1 - a_4 - 2xa_2)\, a_4 = (\varepsilon - 1)\, x a_2 a_4 = 0$. Це означає, що існує елемент $\gamma \in R$ такий, що $\gamma^2 = 1$ і $\varepsilon = \gamma(\alpha - \gamma)$.*

Якщо $\overline{\Lambda}a$ — нескалярна матриця, то вірно і навпаки.

Справді, нехай існує елемент $\gamma \in R$ такий, що $\gamma^2 = 1$ і $\varepsilon = \gamma(\alpha - \gamma)$, де $\varepsilon = \det \Lambda a$ і $\alpha = \operatorname{tr} \Lambda a$. З точністю до спряження, можна вважати, що $a_2 \in R^*$. Тоді існує елемент $x \in R$ такий, що $\gamma - a_4 = x a_2$. Як наслідок, виконується рівність $(1 - x^2)\, a_2^2 = a_2^2 - (\gamma - a_4)^2 = = a_2^2 - 1 + 2\gamma a_4 - a_4^2 = a_4(-a_1 + 2\gamma - a_4) = a_4(2\gamma - \alpha) = a_4(\gamma + \gamma - \alpha) = a_4\gamma(1 - \varepsilon) = 0$. Тим самим доведено, що $x^2 = 1$ і $a_1 - a_4 = \alpha - 2a_4 = (1 + \varepsilon)\gamma - 2a_4 = (1 + \varepsilon)(\gamma - a_4) = (1 + \varepsilon)\, x a_2$.

Якщо $\overline{\Lambda} a$ — скалярна матриця, а $\overline{\Lambda} b$ — нескалярна матриця, то подібного твердження нема. Це випливає із наступного прикладу.

Приклад. Нехай R — комутативне локальне кільце, $2 \in R^*$, $m = m \cdot 1 = 0$, $J(R)$ містить більше трьох елементів, $J(R)^2 = 0$. Тоді в $J(R)$ існують елементи $j \neq 0$ і $j' \neq \pm j$, а елементи другого порядку кільця R належать до $\{\pm 1\}$.

Задамо відображення $\Lambda\colon D_m \to GL(2, R)$ на породжуючих елементах a і b групи діедра $D_m, m > 1$ за правилом

$$\Lambda a = E + \begin{pmatrix} j & j' \\ -j' & -j \end{pmatrix}, \quad \Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

і продовжимо його за мультиплікативністю на всю групу $D_m, m > 1$. Неважко побачити, що $\Lambda b^2 = E$, $\Lambda(ba)^2 = E$, $\Lambda a^k = E + k \begin{pmatrix} j & j' \\ -j' & -j \end{pmatrix}$, $k \geq 1$. Зокрема, $\Lambda a^m = E$. Тому Λ — зображення групи $D_m, m > 1$, $\varepsilon = \det \Lambda a = 1$, $\alpha = \operatorname{tr} \Lambda a = 2$, $\varepsilon = \gamma(\alpha - \gamma)$, де $\gamma = 1$. З іншого боку, $(\Lambda a)_{11} = 1 + j$, $(\Lambda a)_{12} = j'$, $(\Lambda a)_{22} = 1 - j$. Оскільки $(1 + \varepsilon)\, x\, (\Lambda a)_{12} = \pm 2j'$ для будь-якого $x^2 = 1$, то $(\Lambda a)_{11} - (\Lambda a)_{22} = 2j \neq \pm 2j' = (1 + \varepsilon)\, x\, (\Lambda a)_{12}$.

3.3. Нерозкладність зображень. Питання нерозкладності зображень групи діедра D_m, $m > 1$ повністю визначає така теорема.

Теорема 3. *Нехай R — комутативне локальне кільце. Зображення Λ у випадку 1 теореми 1 є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли $2 \in J(R)$ і пара матриць V і V_0 є нерозкладною. У випадку 2 теореми 1 зображення Λ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли $2 \in J(R)$ або $2 \in R^*$ і $\Lambda a^2 \neq E$.*

Доведення. Якщо Λ — розкладне зображення, то, з точністю до еквівалентності, Λa і Λb — діагональні матриці. Тому $\Lambda a \Lambda b = \Lambda b \Lambda a$ і $\Lambda a^2 = \Lambda b^2 \Lambda a^2 = \Lambda(ba)^2 = E$.

Якщо $2 \in R^*$, то вірно і навпаки, адже, в такому разі з рівності $\Lambda a^2 = E$ випливає, що $\Lambda a \Lambda b = \Lambda b \Lambda a$. За лемою 8 комутативні матриці другого порядку Λa і Λb, з точністю до еквівалентності, мають діагональний вигляд з плюс, мінус одиницями на діагоналях. Це означає, що Λ — розкладне зображення.

Отже, при $2 \in R^*$ зображення Λ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли $\Lambda a^2 \neq E$.

Нехай $2 \in J(R)$. Якщо Λ — зображення з випадку 1 теореми 1, то Λ — нерозкладне зображення тоді і тільки тоді, коли пара матриць V і V_0 є нерозкладною.

У випадку 2 теореми 1 зображення Λ є нерозкладним, адже, за наслідком з критерію нерозкладності, матриця Λb є нерозкладною, а тому Λ — нерозкладне зображення. □

3.4. Еквівалентність зображень. Питання еквівалентності зображень групи діедра $D_m, m > 1$ повністю розв'язує така теорема.

Теорема 4. *Нехай R — комутативне локальне кільце, $\Lambda\colon D_m \to GL(2, R)$, $\Lambda'\colon D_m \to GL(2, R)$ — двовимірні зображення групи діедра $D_m, m > 1$.*

Зображення Λ і Λ' у випадку 1 теореми 1, які визначаються за правилом

$$\Lambda a = E + V,\ \Lambda b = E + V_0,\ \Lambda' a = E + V',\ \Lambda' b = E + V_0^{/} \text{ при } 2 \in J(R)$$

є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли пари матриць V, V_0 і V', $V_0^{|}$ — еквівалентні.

Зображення Λ і Λ' з випадку 1 теореми 1, які визначаються умовою, що матриці $\Lambda a, \Lambda b, \Lambda' a, \Lambda' b$ належать до $\{\pm E\}$ при $2 \in R^*$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли $\Lambda a = \Lambda' a$ і $\Lambda b = \Lambda' b$.

Зображення Λ і Λ' з випадку 2 теореми 1, які визначаються за правилом

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix},\quad \Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda a^{\delta},\quad \Lambda' a = \begin{pmatrix} a_1^{/} & a_2^{/} \\ -\varepsilon' a_2^{/} & a_4^{/} \end{pmatrix},\quad \Lambda' b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda' a^{\delta'},$$

де $\delta,\ \delta' \in \{0;1\}$, $\varepsilon = \det \Lambda a$, $\varepsilon' = \det \Lambda' a$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли $\delta = \delta'$, $\varepsilon = \varepsilon'$ і існує матриця $g_0 \in GL(2,R)$ така, що

$$g_0 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} \text{ або } g_0 = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}, \text{ де } 1 - t^2 \in R^*$$

і виконуються рівності

$$g_0 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{/} & a_2^{/} \\ -\varepsilon a_2^{/} & a_4^{/} \end{pmatrix} g_0,$$

де $(1-\varepsilon)\, a_1 = (1-\varepsilon)\, a_4 = (1-\varepsilon)\, a_1^{/} = (1-\varepsilon)\, a_4^{/} = 0$, характеристичні многочлени матриць Λa і $\Lambda' a$ збігаються і ділять двочлен $x^m - 1$ з остачею

$$r(x - a_1) = r(x - a_4) = r\left(x - a_1^{/}\right) = r\left(x - a_4^{/}\right), \text{ де } r \in R,\ ra_2 = ra_2^{/} = 0.$$

Доведення. Нехай Λ і Λ' — зображення групи $D_m, m > 1$ у групу $GL(2,R)$. Зображення Λ і Λ' можуть бути еквівалентними тільки тоді, коли вони обидва належать до одного з випадків зображень, описаних в теоремі 1. Зрозуміло, що характеристичні многочлени образів відповідних елементів еквівалентних зображень збігаються.

Нехай зображення Λ і Λ' належать до першого випадку теореми 1. Це означає, що, з точністю до спряження, $\Lambda a = E + V$, $\Lambda b = E + V_0$, $\Lambda' a = E + V'$, $\Lambda' b = E + V_0^{|}$ при $2 \in J(R)$, де $V, V_0, V', V_0^{|}$ — матриці над $J(R)$ або Λa, Λb, $\Lambda' a$, $\Lambda' b$ належать до $\{\pm E\}$ при $2 \in R^*$.

Тому зображення Λ і Λ' еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існує матриця $g \in GL(2,R)$ така, що $gVg^{-1} = V'$ і $gV_0^{|}g^{-1} = V_0^{|}$ або $\Lambda a = \Lambda' a$ і $\Lambda b = \Lambda' b$.

Нехай зображення Λ і Λ' належать до другого випадку теореми 1. Тоді, з точністю до еквівалентності, можна вважати, що

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix},\quad \Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda a^{\delta},\quad \Lambda' a = \begin{pmatrix} a_1^{/} & a_2^{/} \\ -\varepsilon' a_2^{/} & a_4^{/} \end{pmatrix},\quad \Lambda' b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda' a^{\delta'},$$

де $\delta, \delta' \in \{0;\ 1\}$, $\varepsilon = \det \Lambda a$, $\varepsilon' = \det \Lambda' a$.

Якщо зображення Λ і Λ' еквівалентні, то існує матриця $g \in GL(2,R)$ така, що $g\Lambda a g^{-1} = \Lambda' a$ і $g\Lambda b g^{-1} = \Lambda' b$. Це означає, що $\varepsilon = \varepsilon'$. Оскільки скалярність матриць $\overline{\Lambda} a$, $\overline{\Lambda} b$ і матриць $\overline{\Lambda'} a$, $\overline{\Lambda'} b$ відповідно однакові, то $\delta = \delta'$.

Зрозуміло, що при цьому $(1-\varepsilon)\, a_1 = (1-\varepsilon)\, a_4 = (1-\varepsilon)\, a_1^{/} = (1-\varepsilon)\, a_4^{/} = 0$ і характеристичні многочлени матриць Λa і $\Lambda' a$ співпадають і ділять двочлен $x^m - 1$ з остачею $r(x - a_1) = r(x - a_4) = r\left(x - a_1^{/}\right) = r\left(x - a_4^{/}\right)$, де $r \in R$, $ra_2 = ra_2^{/} = 0$.

Оскільки g комутує з матрицею

$$\Lambda b \Lambda a^{-\delta} = \Lambda' b \Lambda' a^{-\delta'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ то } g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & g_1 \end{pmatrix}, \text{ де } g_1^2 - g_2^2 \in R^*.$$

Окрім цього виконуються рівності

$$g\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{/} & a_2^{/} \\ -\varepsilon a_2^{/} & a_4^{/} \end{pmatrix} g.$$

Якщо $g_1 \in R^*$, то покладемо $t = g_2 g_1^{-1}$, $g_0 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$, а якщо $g_2 \in R^*$, то покладемо $t = g_1 g_2^{-1}$, $g_0 = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$. Тоді $g = g_1 g_0$ або $g = g_2 g_0$, відповідно, $1 - t^2 \in R^*$,

$$g_0\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{/} & a_2^{/} \\ -\varepsilon a_2^{/} & a_4^{/} \end{pmatrix} g_0.$$

Отже, з еквівалентності зображень Λ і Λ' випливає, що існує елемент $t \in R$ такий, що $1 - t^2 \in R^*$ і $g_0\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{/} & a_2^{/} \\ -\varepsilon a_2^{/} & a_4^{/} \end{pmatrix} g_0$, де $g_0 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$ або $g_0 = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$.

Навпаки очевидно. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Bondarenko V.M., Drozd Y.A. *Representative type of finite groups*// Zapysky nauch. seminarov, Leningr. otd. inst. mat. Acad. Nauk USSR. – 1977. – V.71. – P. 24–41. (in Russian)
2. Vinberg E.B. Course of Algebra, 2 ed. – Moscow: Factorial Press, 2001. – 544 p. (in Russian)
3. Hudyvok P.M. Presentation of finite groups above the commutative local rings. – Uzhhorod: Uzhhorod National University, 2003. – 119 p. (in Russian)
4. Hudyvok P.M., Rud'ko V.P., Bovdi V.A. Crystal and graphical groups. – Uzhhorod: Uzhhorod National University, 2006. – 173 p. (in Ukrainian)
5. Drobotenko V.S., Rud'ko V.S. Elements of the theory of rings. – Uzhhorod: Uzhhorod National University, 2004. – 128 p. (in Ukrainian)
6. Drozd Y.A., Kyrychenko V.V. Finite dimensional algebras. – Kyiv: Vyscha shkola, 1980. – 192 p. (in Russian)
7. Karhapolov M.I., Merzliakov Y.I. The principals of the theory of groups, 3 ed. – Moscow: Nauka, 1982. – 288 p. (in Russian)
8. Kertis C., Rainer I. The theory of representation of finite groups and associative algebra. – Moscow: Nauka, 1969. – 668 p. (in Russian)
9. Petechuk V.M. *Stability of rings*// Nauk. visnyk Uzhhorod. univ. Ser. mat. and inform. – 2009. – V.19. – P. 87–111. (in Russian)
10. Petechuk Y.V. *Two-dimensional images of dihedral groups above the commutative local rings. I*// Nauk. visnyk Uzhhorod. univ. Ser. mat. and inform. – 2009. – V.19. – P. 112–120. (in Ukrainian)
11. Petechuk Y.V. *Two-dimensional images of dihedral groups above the commutative local rings. II*// Nauk. visnyk Uzhhorod. univ. Ser. mat. and inform. – 2010. – V.21. – P. 94–101. (in Ukrainian)
12. Petechuk Y.V. *Images of diedral groups of higher degrees above some commutative local rings*// Nauk. visnyk Uzhhorod. univ. Ser. mat. and inform. – 2010. – V.20. – P. 111–130. (in Ukrainian)
13. Tylyschak O.A. *Images of 2 degree of dihedral group of the order 2p above some commutative local rings*// Nauk. visnyk Uzhhorod. univ. Ser. mat. and inform. – 2008. – V.16. – P. 188–192. (in Ukrainian)
14. Feit U. The theory of representation of finite groups. Transl. from English. – Moscow: Nauka, 1990. – 464 p. (in Russian)

Ukraine, Uzhgorod
vasil-petechuk@rambler.ru

Надійшло 08.09.2011