УДК 517.51

О. В. Маслюченко

# ДОСЯЖНІ ПРОСТОРИ ТА ЇХ АНАЛОГИ

O. V. Maslyuchenko. *The attainable spaces and its analogues*, Mat. Stud. **37** (2012), 98–105.

In this paper we investigate interplays between several type of the attainable spaces. We introduce the class of discreetly saturated spaces which contains all metrizable spaces and all hereditarily separable perfectly normal spaces and check that a first countable discreetly saturated space has all type of attainability. We also obtain that weakly discreetly attainable spaces are countably resolvable.

О. В. Маслюченко. *Достижимые пространства и их аналоги* // Мат. Студії. – 2012. – Т.37, №1. – С.98–105.

В статье изучаются связи между различными видами достижимых пространств. Вводится класс дискретно насыщенных пространств, который содержит все метризуемые пространства, наследственно сепарабельные совершенно нормальные пространства, и проверяются все разновидности достижимости для дискретно насыщенных пространств с первой аксиомой счетности. Кроме того, доказывается, что слабо дискретно достижимые пространства являются счетно разложимыми.

**1. Вступ.** При дослідженні задачі про побудову функції з того чи іншого функціонального класу з даним коливанням часто важливу роль відіграють, так звані, досяжні простори і їх різновиди ([1, 2, 3]). Так, в [1, 2] за допомогою досяжності та сильної досяжності розв'язано задачі про побудову нарізно неперервних функцій з даним коливанням. В [3] розглянуто поняття парної досяжності та застосовано його до побудови квазінеперервних функцій з даним коливанням. Насправді, в згаданих роботах неявно використовувався ще один різновид досяжності — слабка досяжність. В пп. 2-3 даної статті ми природно доповнимо цей перелік різновидів досяжності і встановимо схему зв'язків між ними. З міркувань гармонії і уникнення термінів схожих на "слабко сильно досяжний" нам довелось перейменувати "сильну досяжність" на "дискретну досяжність". В роботах [1, 2, 3] встановлено досяжність метризовних і подібних до них просторів. В п.4 даної статті ми вводимо клас дискретно насичених просторів і встановлюємо його зв'язки з різними видами досяжності. В п.5 ми встановлюємо, що слабко дискретно досяжний простір є розкладним, чим дещо узагальнюємо аналогічний результат з [1, 2]. І, насамкінець, в п.6 ми з'ясовуємо, що схема зв'язків між різновидами досяжності, яка була отримана в п.3 не може бути доповнена іншими нетривіальними імплікаціями.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C10, 54C30.
*Keywords:* attainable space, pairwise attainable space, discreetly attainable space, pairwise discreetly attainable space, weakly attainable space, weakly pairwise attainable space, weakly discretely attainable space, weakly/ pairwise discreetly attainable space.

**2. Різні види досяжності.** Нехай $X$ — топологічний простір і $M \subseteq X$. Сім'ю $(A_s)$ називають *дискретною* (*локально скінченною*) *на множині* $M$, якщо для довільної точки $x \in M$ існує такий її окіл $U$, для якого множина $\{s \in S\colon A_s \cap U \neq \varnothing\}$ містить не більше однієї точки (скінченна). Систему $\mathcal{A}$ називатимемо *дискретною* (*локально скінченною*) *на множині* $M$, якщо такою є сім'я $(A)_{A\in\mathcal{A}}$. Для послідовності $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ підмножин простору $X$ покладемо $\overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup\limits_{m\geq n} A_m}$. Тобто, множина $\overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} A_n$ складається з усіх тих точок $x \in X$, в яких послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ не є локально скінченною. *Межею* множини $A \subseteq X$, як звичайно, називатимемо множину $\operatorname{fr} A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$. Множину $G$ називатимемо *дотичною* до множини $E$, якщо $G$ відкрита і $E \subseteq \operatorname{fr} G$. Для підмножин $A$ та $B$ топологічного простору $X$ запис $A \overline{\subset} B$, або точніше, $A \overline{\subset}_X B$, означає, що $\overline{A} \subseteq B$.

Підмножину $E$ топологічного простору $X$ називатимемо

| | |
|---|---|
| $(A)$ *досяжною*, | $(A^w)$ *слабко досяжною*, |
| $(A_d)$ *дискретно досяжною*, | $(A^w_d)$ *слабко дискретно досяжною*, |
| $(A_p)$ *парно досяжною*, | $(A^w_p)$ *слабко парно досяжною*, |
| $(A_{pd})$ *парно дискретно досяжною*, | $(A^w_{pd})$ *слабко парно дискретно досяжною*, |

якщо для неї відповідно виконуються такі властивості:

для довільної спадної послідовності дотичних до $E$ множин $G_n$, існує послідовність відкритих множин $A_n \overline{\subset} G_n$ таких, що $E = \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} A_n$ $(A)$

для довільної спадної послідовності дотичних до $E$ множин $G_n$, існує послідовність замкнених дискретних множин $A_n \subseteq G_n$ таких, що $E = \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} A_n$ $(A_d)$

для довільної спадної послідовності дотичних до $E$ множин $G_n$, існують послідовності відкритих множин $A_n, B_n \overline{\subset} G_n$ таких, що $E = \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} A_n = \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} B_n$ і $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$. $(A_p)$

для довільної спадної послідовності дотичних до $E$ множин $G_n$, існують послідовності замкнених дискретних множин $A_n, B_n \subseteq G_n$ таких, що $E = \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} A_n = \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} B_n$ і $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$. $(A_{pd})$

для довільної дотичної до $E$ множини $G$ існує відкрита множина $A \subseteq G$ така, що $\overline{A} \setminus G = E$. $(A^w)$

для довільної дотичної до $E$ множини $G$ існує замкнена дискретна в $G$ множина $A \subseteq G$ така, що $\overline{A} \setminus G = E$. $(A^w_d)$

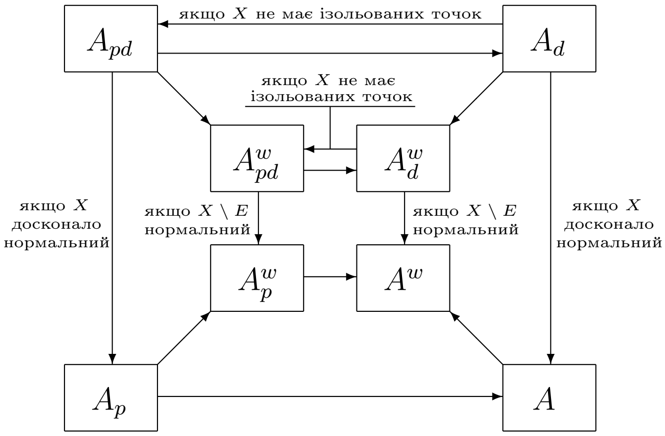
для довільної дотичної до $E$ множини $G$ існують неперетинні відкриті множини $A, B \subseteq G$ такі, що $\overline{A} \setminus G = \overline{B} \setminus G = E$. $(A^w_p)$

для довільної дотичної до $E$ множини $G$ існують неперетинні замкнені в $G$ дискретні множини $A{,}B{\subseteq}U$ такі, що $\overline{A}{\setminus}G{=}\overline{B}{\setminus}G{=}E$. $(A^w_{pd})$

Топологічний простір $X$ називатимемо (*слабко*, *парно*, *дискретно*, *досяжним*), якщо такою є кожна його ніде не щільна замкнена підмножина.

**3. Зв'язки між різними видами досяжності.** Зараз ми з'ясуємо, як пов'язані між собою різновиди досяжності.

**Теорема 1.** *Нехай $X$ — топологічний простір і $E$ — його замкнена ніде не щільна підмножина. Тоді правильна наступна схема імплікацій:*




*Доведення.* По-перше, зауважимо, що імплікації $(A_{pd}) \Rightarrow (A_d)$, $(A^w_{pd}) \Rightarrow (A^w_d)$, $(A^w_p) \Rightarrow (A^w)$ і $(A_p) \Rightarrow (A)$ очевидно випливають з означень.

$(A_d) \Rightarrow (A_{pd})$. Нехай $X$ не має ізольованих точок. Розглянемо деяку замкнену ніде не щільну множину $E$ і спадну послідовність відкритих множин $G_n$ з $E \subseteq \operatorname{fr} G_n$. За рахунок дискретної досяжності $E$ виберемо замкнені дискретні множини $A_n \subseteq G_n$ такі, що $E = \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} A_n$. Оскільки послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ локально скінченна на $X \setminus E$, то множина $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ також дискретна і замкнена в $X \setminus E$. Тоді, оскільки $X$ не має ізольованих точок, то $A$ ніде не щільна. Отже, покладаючи $H_n = G_n \setminus A$, матимемо, що $\overline{H}_n = \overline{G}_n \supseteq E$. Тому $E \subseteq \operatorname{fr} H_n$. Тепер, застосувавши означення дискретної досяжності до послідовності $(H_n)_{n=1}^{\infty}$, виберемо таку послідовність замкнених дискретних множин $B_n \subseteq H_n$, для якої $E = \underline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} B_n$. Зрозуміло, що послідовності множин $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ та $(B_n)_{n=1}^{+\infty}$ забезпечують парну дискретну досяжність множини $E$.

Імплікація $(A^w_d) \Rightarrow (A^w_{pd})$ доводиться аналогічно до $(A_d) \Rightarrow (A_{pd})$.

$(A) \Rightarrow (A^w)$. Нехай $E$ — досяжна множина і $G$ така відкрита множина, для якої $E \subseteq \operatorname{fr} G$. Використавши означення досяжності для послідовності $G_n = G$, побудуємо послідовність відкритих непорожніх множин $A_n \overline{\subset} G$, для яких $E = \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} A_n$. Покладемо $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тоді $E = \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} A_n \subseteq \overline{A}$. Крім того, оскільки послідовність $(A_n)$ локально скінченна на $X \setminus E$ і $A \subseteq G \subseteq X \setminus E$, то $E = \overline{A} \setminus G$. Отже, $E$ — слабко досяжна.

Імплікації $(A_d) \Rightarrow (A^w_d)$, $(A_p) \Rightarrow (A^w_p)$ і $(A_{pd}) \Rightarrow (A^w_{pd})$ доводяться аналогічно до $(A) \Rightarrow (A^w)$.

$(A_d) \Rightarrow (A)$. Нехай тепер $X$ — досконало нормальний і $E$ дискретно досяжна підмножина $X$. Покажемо, що $E$ досяжна. Розглянемо деяку спадну послідовність відкритих множин $G_n$ з $E \subseteq \operatorname{fr} G_n$. Виберемо спадну послідовність відкритих околів $U_n$ множини $E$, для якої $E = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n$. Покладемо $H_n = U_n \cap G_n$. Тоді $E = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{H}_n$ Користуючись сильною досяжністю множини $E$ для послідовності $(H_n)$, побудуємо замкнені дискретні множини $B_n \subseteq H_n$, для яких $E = \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} B_n$. Далі, оскільки $X$ нормальний, то існують відкриті множини $A_n$, для яких $B_n \subseteq A_n \overline{\subset} H_n$. Тоді

$$E = \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} B_n \subseteq \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} A_n \subseteq \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} H_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{H}_n = E.$$

Отже, $E = \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}} A_n$.

Подібно встановлюємо імплікацію $(A_{pd}) \Rightarrow (A_p)$.

$(A^w_d) \Rightarrow (A^w)$. Нехай простір $X \setminus E$ нормальний. Розглянемо слабко дискретно досяжну множину $E$ і покажемо, що вона є слабко досяжною. Нехай $G$ така відкрита множина, для якої $E \subseteq \operatorname{fr} G$. Використавши слабку дискретну досяжність виберемо таку замкнену в $G$ дискретну множину, для якої $\overline{A} \setminus G = E$. Тоді множини $B = X \setminus (G \cup E)$ і $A$ є замкненими і неперетинними в нормальному просторі $X \setminus E$. Тоді існують відкриті неперетинні множини $U, V \subseteq X \setminus G$, для яких $A \subseteq U$ і $B \subseteq V$. Але $\overline{U} \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus B = G \cup E$. Тому

$$E = \overline{A} \setminus G \subseteq \overline{U} \setminus G \subseteq E,$$

звідки, $\overline{U} \setminus G = E$. Отже, $E$ слабко досяжна.

Імплікація $(A^w_{pd}) \Rightarrow (A^w_p)$ доводиться подібно. □

**4. Дискретно насичені простори.** Нехай $X$ — топологічний простір і $S \subseteq X$. Множину $S$ називатимемо *сильно дискретною*, якщо існує дискретна на $X$ відкрита сім'я $(U_s)_{s \in S}$ така, що $s \in U_s$ для кожного $s \in S$. Зрозуміло, що кожна сильно дискретна множина є замкненою (якщо $X$ є $T_1$-простором) і дискретною. Крім того, якщо $X$ є паракомпактом, то кожна замкнена дискретна множина, очевидно, є сильно дискретною. Множину $S$ називатимемо *$\sigma$-сильно дискретною*, якщо існує послідовність сильно дискретних множин $S_n$, для якої $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$. Зауважимо, що оскільки кожна підмножина сильно дискретної множини є такою ж, то покладаючи $S'_n = S_n \setminus \cup_{k<n} S_k$, подамо множину $S$ у вигляді диз'юнктного об'єднання сильно дискретних множин $S'_n$. Казатимемо, що множина $E$ є *$\overline{\sigma}$-сильно дискретною*, якщо вона має щільну підмножину, яка є $\sigma$-сильно дискретною в $X$. Зауважимо, що у досконалому просторі кожна дискретна множина подається у вигляді зліченного об'єднання послідовності замкнених дискретних множин. Тому, для досконалого паракомпакту $X$ $\sigma$-сильна дискретність рівносильна до $\sigma$-дискретності.

Топологічний простір $X$ називатимемо *дискретно насиченим*, якщо він досконало нормальний і кожна його замкнена підмножина є $\overline{\sigma}$-сильно дискретною. Система $\mathcal{A}$ підмножин топологічного простору $X$ називається *сіткою*, якщо для довільної точки $x \in X$ і її околу $U$ існує $A \in \mathcal{A}$ таке, що $x \in A \subseteq U$. Тому, якщо сітка складається з відкритих множин, то вона є базою простору. Система $\mathcal{A}$ називається *$\sigma$-дискретною*, якщо існує послідовність дискретних на $X$ систем $\mathcal{A}_n$, для яких $\mathcal{A} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$.

**Теорема 2.** *Нехай для простору $X$ виконується одна з наступних умов:*

*(i)* *$X$ — досконало нормальний спадково сепарабельний;*

*(ii)* *$X$ — регулярний зі зліченною сіткою;*

*(iii)* *$X$ — паракомпакт з $\sigma$-дискретною сіткою;*

*(iv)* *$X$ — метризовний.*

*Тоді $X$ є дискретно насиченим.*

*Доведення.* По-перше, кожний регулярний простір зі зліченною сіткою є ліндельофовим, а, тому, нормальним. Крім того, він, очевидно, є досконалим і спадково сепарабельним (доведення цих фактів аналогічне до випадку $(iii)$, що розглянутий нижче). Отже, з $(ii)$ випливає $(i)$, звідки випливає дискретна насиченість. Далі, зауважимо, що з теореми Стоуна [4, с. 414] випливає, що кожний метризовний простір є паракомпактним і має $\sigma$-дискретну базу. Тому з $(iv)$ випливає $(iii)$.

Отож, нехай для $X$ виконується умова $(iii)$. Розглянемо деяку сітку $\mathcal{A} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n$ простору $X$, для якої системи $\mathcal{A}_n$ дискретні. З [4, с. 445] випливає, що $X$ нормальний. Перевіримо, що $X$ — досконалий. Для цього візьмемо відкриту множину $G$ і покажемо $G$ є $F_\sigma$-множиною. Покладемо

$$F_n = \bigcup\Big\{\overline{A}\colon A \in \mathcal{A}_n \text{ i} \overline{A} \subseteq G\Big\}.$$

Оскільки $\mathcal{A}_n$ дискретна, то $F_n$ замкнена. А з того, що $\mathcal{A}$ є сіткою і $X$ регулярний випливає, що $G = \cup_{n=1}^{\infty}F_n$. Отже, $G$ є $F_\sigma$-множиною. Тому, $X$ є досконало нормальним.

Візьмемо тепер замкнену підмножину $E$ простору $X$. Для довільного $A \in \mathcal{A}$ з $A \cap E \neq \varnothing$ виберемо точку $x_A \in A \cap E$. Множину усіх таких точок $x_A$ позначимо через $S$. Оскільки $\mathcal{A}$ — сітка, то $\overline{S} = E$. Далі, з того, що система $\mathcal{A}$ є $\sigma$-дискретною випливає, що множина $S$ також є $\sigma$-дискретною, а, отже, і $\sigma$-сильно дискретною, адже $X$ — досконалий паракомпакт. □

З попереднього твердження зокрема випливає, що пряма Зорґенфрея $\mathbb{L}$ є прикладом неметризовного простору з першою аксіомою зліченності, який є дискретно насиченим.

## 5. Досяжність дискретно насичених просторів.

**Теорема 3.** *Нехай $X$ — дискретно насичений простір з першою аксіомою зліченності. Тоді $X$ є парно дискретно досяжним.*

*Доведення.* Візьмемо деяку замкнену ніде не щільну підмножину $E$ простору $X$ і перевіримо її сильну парну досяжність. Візьмемо деяку спадну послідовність відкритих непорожніх множин $G_n$ з $E \subseteq \operatorname{fr} G_n$. Оскільки $X$ досконало нормальний, то існує спадна послідовність відкритих множини $U_k \supseteq E$, для яких $E = \cap_{k=1}^{\infty}\overline{U}_k$. Далі виберемо $\sigma$-сильно дискретну множину $S$, таку, що $\overline{S} = E$. Розглянемо диз'юнктну послідовність сильно дискретних множин $S_n$, для якої $S = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Для кожного номера $n$ виберемо відкриту дискретну сім'ю $(U_s)_{s\in S_n}$ таку, що $s \in U_s$ для кожного $s \in S_n$. Далі, для кожного $s \in S$ виберемо зліченну базу яка складається з відкритих множин $U_{s,k}$ таких, що $U_{s,k} \subseteq U_s \cap U_k$. Покладемо $T_n = \cup_{k\leq n}S_k$ для кожного $n$.

Зараз ми індукцією за $n$ побудуємо диз'юнктну послідовність множин $F_n = \{x_{s,n}\colon s \in T_n\}$, де $x_{s,n} \in U_{s,n}$ для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $s \in T_n$. Припустимо, що для деякого $n \in \mathbb{N}$ уже побудовані множини $F_k$ для $k < n$. Оскільки $x_{s,k} \in U_{s,k} \subseteq U_s$ і сім'я $(U_s)_{s\in T_n}$ локально скінченна, як об'єднання скінченного числа дискретних сімей, то множини $F_k$ замкнені і дискретні. Візьмемо $s \in T_n$. Оскільки $U_{s,n}$ окіл точки $s$ і $s \notin F_k$ при $k < n$ то $U_{s,n} \setminus \cup_{k<n}F_k$ також є околом $s$. Але $s \in \overline{G}_n$. Тому $G_n \cap (U_{s,n} \setminus \cup_{k<n}F_k) \neq \varnothing$. Виберемо $x_{s,n} \in G_n \cap (U_{s,n} \setminus \cup_{k<n}F_k)$.

Як уже зауважувалось раніше, всі множини $F_n$ замкнені і дискретні. Покладемо $A_k = F_{2k-1}$ і $B_k = F_{2k}$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Оскільки $F_n \subseteq G_n$ і множини $G_n$ спадають, то $A_k, B_k \subseteq G_k$. За рахунок диз'юнктності множини $F_n$ матимемо, що

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \varnothing.$$

Візьмемо деяке $s \in S$ і виберемо $n$, такий, що $s \in S_n$. Тоді для довільного $k \geq n$ матимемо, що $s \in T_k$, а, отже, $x_{s,k} \in U_{s,k}$. Але множини $U_{s,k}$ утворюють базу околів точки $s$. Тому, $x_{s,k} \to s,\ (k \to +\infty)$. Отже, $s \in \overline{\operatorname*{Lim}_{k\to\infty}} A_k$ і $s \in \overline{\operatorname*{Lim}_{k\to\infty}} B_k$, адже $x_{s,2k-1} \in A_k$ і

$x_{s,2k} \in B_k$ для довільного $k$. Звідси, $S \subseteq \overline{\mathrm{Lim}}_{k\to\infty} A_k$ і $S \subseteq \overline{\mathrm{Lim}}_{k\to\infty} B_k$. Врахувавши, що $\overline{S} = E$, матимемо, що $E \subseteq \overline{\mathrm{Lim}}_{k\to\infty} A_k$ і $E \subseteq \overline{\mathrm{Lim}}_{k\to\infty} B_k$. Але $F_n \subseteq U_n$, тому $\overline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} F_n \subseteq \cup_{n=1}^{\infty}\overline{U}_n = E$, звідки, $\overline{\mathrm{Lim}}_{k\to\infty} A_k \subseteq E$ і $\overline{\mathrm{Lim}}_{k\to\infty} B_k \subseteq E$. Отже, $\overline{\mathrm{Lim}}_{k\to\infty} A_k = \overline{\mathrm{Lim}}_{k\to\infty} B_k = E$. □

**Теорема 4.** *Нехай $X$ — дискретно насичений простір Фреше-Урисона. Тоді $X$ є слабко парно дискретно досяжним.*

*Доведення.* Візьмемо деяку замкнену ніде не щільну підмножину $E$ простору $X$ і перевіримо її слабку парну досяжність. Візьмемо деку відкриту непорожню множину $G$ з $E \subseteq \operatorname{fr} G$. Оскільки $X$ досконало нормальний, то існує спадна послідовність відкритих множини $U_k \supseteq E$, для яких $E = \cap_{k=1}^{\infty}\overline{U}_k$. Далі виберемо $\sigma$-сильно дискретну множину $S$ таку, що $\overline{S} = E$. Розглянемо диз'юнктну послідовність сильно дискретних множин $S_n$, для якої $S = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Для кожного номера $n$ виберемо відкриту дискретну сім'ю $(U_s)_{s\in S_n}$ таку, що $s \in U_s \subseteq U_n$ для кожного $s \in S_n$.

Зараз ми для кожного $s \in S$ побудуємо послідовність точок $x_{s,k} \in U_s \cap G$ таку, що $x_{s,k} \to s$ і $x_{s,k} \neq x_{t,l}$, якщо $(s,k) \neq (t,l)$. Покладемо $T_n = \cup_{m<n} S_m$ для кожного $n$. Припустимо, що точки $x_{s,k}$ уде побудовані для $s \in T_n$. Візьмемо $s \in S_n$. Оскільки $x_{t,k} \to t$ $(k \to +\infty)$ для кожного $t \in T_n$, сім'я $(U_t)_{t\in T_n}$ локально скінченна і $x_{t,k} \in U_t$ для $t \in T_n$, то $\overline{\{x_{t,k} \colon k{\in}\mathbb{N}, t{\in}T_n\}} = \cup_{t\in T_n}\overline{\{x_{t,k} \colon k{\in}\mathbb{N}\}} \not\ni s$. Тому існує такий окіл $U$ точки $s$ для якого $U \subseteq U_s \setminus \{x_{t,k} \colon k \in \mathbb{N}, t \in T_n\}$. І нарешті, оскільки $X$ є $T_1$-простором Фреше-Урисона і $s \in \overline{U \cap G}$ то існує послідовність різних точок $x_{s,k} \in U \cap G$ таких, що $x_{s,k} \to s$ $(k \to +\infty)$.

Покладемо $A = \{x_{s,2k-1} \colon s \in S, k \in \mathbb{N}\}$ і $B = \{x_{s,2k} \colon s \in S, k \in \mathbb{N}\}$. Зрозуміло, що $A \cap B = \varnothing$. Оскільки сім'ї $(U_s)_{s\in S_n}$ дискретні, $U_s \in U_n$ при $s \in S_n$ і $E = \cap_{n=1}^{\infty}\overline{U}_n$, то сім'я $(U_s)_{s\in S}$ локально скінченна на $X \setminus E$. Тому, множини $A$ та $B$ є замкненими і дискретними в $X \setminus E$. Врахувавши крім того, що $\overline{S} = E$ і $x_{s,k} \to s$ для $s \in S$, одержимо, що $\overline{A} \setminus G = \overline{B} \setminus G = E$. Отже, $E$ є слабко парно дискретно досяжною. □

**6. Розкладність слабко дискретно досяжних просторів.** Топологічний простір $X$ називається *розкладним* ([5, 6]), якщо в ньому існують дві неперетинні скрізь щільні множини $A_1$ і $A_2$. Якщо в просторі $X$ існує послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно неперетинних скрізь щільних множин, то $X$ називається *зліченно розкладним.*

**Теорема 5.** *Кожний слабко дискретно досяжний простір $X$ без ізольованих точок є зліченно розкладним.*

*Доведення.* Зафіксуємо деяку відкриту непорожню множину $U \subseteq X$ і візьмемо деяку точку $a \in G$. За означенням слабкої дискретної досяжності для довільної ніде не щільної множини $E \subseteq U$ існує дискретна (а тому, ніде не щільна) множина $A(E) \subseteq U \setminus \overline{E}$, для якої $E \subseteq \overline{A(E)}$. Покладемо $B_1 = \{a\}$ і $B_n = A(B_{n-1})$ при $n > 1$. Зрозуміло, що множини $B_n \subseteq U$ диз'юнктні, причому $B_m \subseteq \overline{B}_n$ при $m \leq n$. Виберемо нескінченні множини $N_k$ з $\mathbb{N} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} N_k$. Тоді множини $Y_k = \bigsqcup_{n\in N_k} B_n$ також є диз'юнктними підмножинами $U$. Візьмемо $k, \ell \in \mathbb{N}$. Оскільки множина $N_k$ нескінченна, то для довільного $m \in N_\ell$ існує таке $n_m \in N_k$, що $m \leq n_m$. В такому разі, $Y_\ell = \cup_{n\in N_\ell} B_m \subseteq \cup_{m\in N_\ell}\overline{B}_{n_m} \subseteq \overline{Y}_k$. Міняючи $k$ та $\ell$ місцями, одержимо, що $Y_k \subseteq \overline{Y}_\ell$. Отже, $\overline{Y}_k = \overline{Y}_\ell$ для довільних $k, \ell \in \mathbb{N}$. Позначимо $X_U = \overline{Y}_1 \cap U$. Тоді матимемо, що для довільного $k$ множина $Y_k$ є щільною підмножиною $X_U$. Тому, підпростір $X_U \subseteq U$ є непорожнім зліченно розкладним підпростором $U$.

Оскільки властивість диз'юнктності — це властивість скінченного характеру, то за лемою Тейхмюллера-Тьюкі [4, с. 28] існує максимальна диз'юнктна система $\mathcal{A}$, яка складається зі зліченно розкладних підпросторів $X$. Зрозуміло, що простір $Y = \bigsqcup \mathcal{A}$, а, отже, і $\overline{Y}$, є зліченно розкладним. Залишилось довести, що $\overline{Y} = X$. Нехай це не так, і $U = X \setminus \overline{Y} \neq \varnothing$. Покладемо $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X_U\}$. Зрозуміло, що $\mathcal{B}$ також є диз'юнктною системою, що складається зі зліченно розкладних підпросторів $X$. Але $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, що суперечить максимальності $\mathcal{A}$. □

**7. Деякі контрприклади.** Зараз ми з'ясуємо, що схему імплікацій в теоремі 1 не можна доповнити.

**Твердження 1.** *Існує досконало нормальний дискретно досяжний простір, який не є слабко парно досяжним. Тому з жодної із властивостей $(A_d)$, $(A)$, $(A^w)$ та $(A_d^w)$ не випливає ні одна із властивостей $(A_{pd})$, $(A_p)$, $(A_p^w)$ та $(A_{pd}^w)$.*

*Доведення.* Нехай $a \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ і $X = \mathbb{N} \cup \{a\}$. Зрозуміло, що $X$ досконало нормальний. Оскільки сукупність усіх множин $A \subseteq \mathbb{N}$, для яких $A \cup \{a\}$ є околом точки $a$ в $X$, є ультрафільтром, то для довільної множини $A \subseteq X \setminus \{a\}$, або $A \cup a$ є околом $a$, або $X \setminus A$ є околом $a$. Тому для двох неперетинних множин $A, B \subseteq X \setminus \{a\}$ можливе тільки одне з включень $x \in \overline{A}$ чи $x \in \overline{B}$. Отже, $X$ не є слабко парно досяжним.

Покажемо, що $X$ дискретно досяжний. Для цього досить довести, що множина $E = \{a\}$ є дискретно досяжною. Візьмемо спадну послідовність відкритих множин $G_n$ з $a \in \operatorname{fr} G_n$. Оскільки $a \in \overline{G}_n$, то з означення топологічної структури $\beta\mathbb{N}$ випливає, що $U_n = \overline{G}_n = G_n \cup \{a\}$ є відкрито-замкненим околом точки $a$ в $X$. Нехай $V_n = U_n \setminus \{1, 2, \dots n\}$. Зрозуміло, що множини $V_n$ також є відкрито-замкненими околами точки $a$, причому $\cap_n V_n = \{a\}$. Покладемо $A_n = V_n \setminus V_{n+1}$. Зрозуміло, що множини $A_n \subseteq G_n$ є замкненими і дискретними, причому

$$\overline{\operatorname*{Lim}_n} A_n = \bigcap_n \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k} = \bigcap_n \overline{V_n \setminus \{a\}} = \bigcap_n V_n = \{a\} = E.$$

Тому, $X$ є шуканим простором. □

**Твердження 2.** *Існує топологічний простір $X$ в якому існує парно досяжна множина, яка не є слабко дискретно досяжною. Тому з жодної з властивостей $(A_p)$, $(A)$, $(A_p^w)$ та $(A^w)$ не випливає ні одна з властивостей $(A_{pd})$, $(A_d)$, $(A_{pd}^w)$ та $(A_d^w)$.*

*Доведення.* Розглянемо деякий непорожній парно досяжний $T_1$-простір $Y$ без ізольованих точок (наприклад $Y = \mathbb{R}$). Зафіксуємо деяку точку $a \in X$. На множині $X = Y$ задамо топологічну структуру у наступний спосіб: в точках $x \neq a$ околи залишаємо такі самі, як і в просторі $Y$, а множину $U$ називатимемо околом $a$ в $X$, якщо існують окіл $V$ точки $a$ в $Y$ і дискретна в $Y$ множина $S$ такі, що $\overline{S} \setminus S = \{a\}$ і $V \setminus S \subseteq U$. Тоді не існуватиме такої дискретної множини $S$ в $X$, для якої $\overline{S} \setminus S = \{a\}$. Тому, множина $E = \{a\}$ не є слабко дискретно досяжною.

Доведемо, що $E$ є парно досяжною. Розглянемо спадну послідовність відкритих в $X$ множин $G_n$, які дотичні до $E$ в $X$. Оскільки $G_n \subseteq X \setminus \{a\}$, то $G_n$ відкриті в $Y$. Далі, з того, що дискретні множини в $Y$ є ніде не щільними в $Y$, випливає, що $G_n$ дотичні до $E$ в $Y$. Далі, оскільки $Y$ парно досяжний, то існують відкриті множини $A_n, B_n \overline{\subset}_Y G_n$ такі, що $(\cup_n A_n) \cap (\cup_n B_n) = \varnothing$ і $E = \overline{\operatorname{Lim}}_n A_n = \overline{\operatorname{Lim}}_n B_n$ в $Y$. Але топологія на $X$ сильніша за топологію $Y$. Тому $A_n, B_n \overline{\subset}_X G_n$. Крім того, за рахунок ніде не щільності дискретних множин, матимемо, що $E = \overline{\operatorname{Lim}}_n A_n = \overline{\operatorname{Lim}}_n B_n$ в $X$. □

**Твердження 3.** *Існує спадково нормальний слабко парно дискретно досяжний, який не є ні досяжним, ні дискретно досяжним. Тому з жодної з властивостей* $(A^w_{pd})$, $(A^w_p)$, $(A^w_d)$ *та* $(A^w)$ *не випливає ні одна із властивостей* $(A_{pd})$, $(A_p)$, $(A_d)$ *та* $(A)$.

*Доведення.* Нехай $T$ — деякий незліченний дискретний простір і $a \notin T$. На множині $X = T \cup \{a\}$ введемо топологічну структуру таким способом: точки множини $T$ вважаються дискретними, а множина $U$ буде околом точки $a$ тоді і тільки тоді, коли $a \in U$ і множина $T \setminus U$ злічення. Зрозуміло, що $X$ спадково нормальний.

Доведемо, що $X$ слабко парно досяжний. Для цього досить показати, що множина $E = \{a\}$ слабко парно досяжна. Візьмемо відкриту множину $G \subseteq X \setminus E = T$, для якої $a \in \overline{G}$. Тоді $G$ незліченна. Виберемо дві неперетинні незліченні множини $A, B \subseteq G$. Тоді $\overline{A} \setminus G = \overline{B} \setminus G = E$.

Покажемо, що $E$ не є (дискретно) досяжною. Візьмемо відкриті множини $G_n = T$ і послідовність множин $A_n \overline{\subset} G_n$. Оскільки $a \notin \overline{A}_n$, то множини $A_n$ зліченні. Тоді $A = \cup_n A_n$ також злічення, і тому $a \notin \overline{A}$. Отже, $\overline{\operatorname{Lim}}_n A_n \neq E$. □

## ЛІТЕРАТУРА


1. Maslyuchenko O.V. The oscillation of separately continuous functions and topological games: Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.01. – Chernivtsi, 2002. – 149 p. (in Ukrainian)
2. Maslyuchenko O.V. *Construction of ω-primitives: strongly attainable spaces*// Matematychnyj visnyk NTSh. – 2009. – V.6. – P. 155–178. (in Ukrainian)
3. Maslyuchenko O.V. *The oscillation of quasi-continuous functions on pairwise attainable spaces*// Houston Journal of Mathematics – 2009. – V.35, №1. – P. 113–130.
4. Engelking R. General topology. – Warszawa: PWN, 1977. – 626 p.
5. Hewitt E. *A problem of set-theoretic topology*// Duke Math. J. – 1943. – V.10, №2. – P. 309–333.
6. Protasov I.V. *Resovability of groops*// Mat. Stud. – 1998. – V.9, №2. – P. 130–148. (in Russian)


Кафедра математичного аналізу
Чернівецького національного університету ім. Ю. Федьковича
ovmasl@gmail.com

*Надійшло 1.12.2011*