УДК 517.51

О. В. Маслюченко

МНОЖИНА ТОЧОК РОЗРИВУ $\mathcal{A}$-НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

O. V. Maslyuchenko. *The discontinuity point set of $\mathcal{A}$-continuous functions*, Mat. Stud. **37** (2012), 89–97.

We characterize the set of discontinuity points of $\mathcal{A}$-continuous quasi-continuous functions of the first class defined on hereditarily normal weakly pairwise attainable spaces. Besides, we obtain several sufficient properties of a subset of a normed space which guarantee an existence of a linearly continuous function with the given discontinuity point set.

О. В. Маслюченко. *Множество точек разрыва $\mathcal{A}$-непрерывных функций* // Мат. Студії. – 2012. – Т.37, №1. – С.89–97.

Охарактеризировано множество точек разрыва $\mathcal{A}$-непрерывных квазинепрерывных функций первого класса, определенных на наследственно нормальных слабо парно достижимых пространствах. Кроме того, приведено несколько достаточных свойств подмножества нормированного пространства, которые гарантируют существование линейно непрерывной функции с данным множеством точек разрыва.

1. Вступ. Питання про те, якою повинна бути множина точок розриву нарізно неперервної функції на даний момент добре вивчене. Так, у статті [1] отримано повний опис множин точок розриву нарізно неперервних функцій, що визначені на добутках довільних метризовних просторів. Але досі актуальним залишається питання про опис множин точок розриву функцій з інших класів розривних функцій. У статтях [2, 3] розв'язана задача про опис коливань (а, отже, і множини точок розриву) нарізно неперервних функцій, квазінеперервних функцій, функцій першого та другого класу Бера, що визначені на просторах, близьких до метризовних. У статті [4] описано множини точок розриву функцій, що визначені на спадково нормальних просторах.

У статті [2] введене поняття $\mathcal{A}$-неперервної функції, яке включає в себе цілий ряд ослаблень неперервності, таких, як квазінеперервність, майже неперервність, нарізна неперервність, лінійна неперервність та ін. В даній статті ми одержимо характеризацію множини точок розриву квазінеперервних $\mathcal{A}$-неперервних функцій першого класу, що визначені на так званих слабко парно досяжних спадково нормальних просторах.

В кінці статті ми застосовуємо одержані результати до лінійно неперервних функцій. Крім того, ми наведемо ряд простих необхідних умов на підмножину нормованого простору, які забезпечують наявність лінійно неперервної функції з даною множиною точок розриву.

2. $\mathcal{A}$-неперервні функції. Нехай X — деяка множина. Сім'ю $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$ непорожніх систем $\mathcal{A}_x \subseteq 2^X$ називатимемо *структурою на X*. Для топологічного простору X

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C10, 54C30.
Keywords: $\mathcal{A}$-continuous function, discontinuity point set, quasi-continuous function, linearly continuous function, $\mathcal{A}$-nowhere dense set, σ-$\mathcal{A}$-nowhere dense set.

його топологічну структуру позначатимемо $\mathcal{U}^X$, або просто $\mathcal{U}$ (тобто, $\mathcal{U}_x^X = \mathcal{U}_x$ — сукупність усіх околів точки x в X). Структуру $\mathcal{A}$ називатимемо *напрямленою*, якщо для довільного $x \in X$ система $\mathcal{A}_x$ напрямлена включенням $\supseteq$, тобто для довільних множин $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_x$ існує множина $A \in \mathcal{A}$ така, що $A \subseteq A_1 \cap A_2$.

Нехай $\mathcal{A}$ — деяка структура на множині X і Y — топологічний простір. Відображення $f\colon X \to Y$ називається *$\mathcal{A}$-неперервним в точці* $x \in X$, якщо для довільного околу V точки $f(x)$ існує $A \in \mathcal{A}_x$ таке, що $f(A) \subseteq V$. Казатимемо, що відображення f є *$\mathcal{A}$-неперервним на* X, якщо f є $\mathcal{A}$-неперервним в кожній точці $x \in X$. Зрозуміло, що якщо X — топологічний простір, то $\mathcal{U}^X$-неперервність — це звичайна неперервність. Множину M називатимемо *$\mathcal{A}$-околом точки* $x \in X$, якщо існує таке $A \in \mathcal{A}_x$, що $A \cup \{x\} \subseteq M$. Казатимемо, що множина M є *$\mathcal{A}$-околом множини* $E \subseteq X$, якщо вона є $\mathcal{A}$-околом кожної точки $x \in E$. Зауважимо, що функція $f\colon X \to Y$ є $\mathcal{A}$-неперервною в точці $x \in X$ тоді і тільки тоді, коли для довільного околу V точки $f(x)$ в Y множина $f^{-1}(V)$ є $\mathcal{A}$-околом точки x.

Нехай $\mathcal{A}^i$ деякі структури на множинах X_i, $i = 1, \ldots, n$, і $X = \prod_{i=1}^n X_i$. Визначимо структуру $\mathcal{A}$ на X покладаючи

$$\mathcal{A}_x = \left\{ \bigcup_{i=1}^n \{(x_1, \ldots, x_{i-1})\} \times A_i \times \{(x_{i+1}, \ldots x_n)\} \colon A_i \in \mathcal{A}^i_{x_i}, i = 1, \ldots, n \right\}$$

для довільного $x = (x_i)_{i=1}^n \in X$. Нескладно зрозуміти, що функція $f\colon X \to Y$ є $\mathcal{A}$-неперервною тоді і тільки тоді, коли вона є $\mathcal{A}^i$-неперервною відносно i-ої змінної для довільного $i = 1, \ldots, n$.

Виявляється, що підбираючи відповідним способом структуру $\mathcal{A}$ на топологічному просторі X, можна одержати цілий ряд відомих ослаблень неперервності. Нехай P — деяка властивість функцій. Казатимемо, що P є *неперервнісною властивістю*, якщо існує така структура $\mathcal{A}$ на X, що функція $f\colon X \to Y$ буде $\mathcal{A}$-неперервною тоді і тільки тоді, коли вона має властивість P. При цьому цю структуру $\mathcal{A}$ називатимемо *структурою властивості P на X*.

Нагадаємо, що відображення $f\colon X \to Y$ між топологічними просторами X та Y називається *квазінеперервним*, якщо для довільної точки $x \in X$ і довільних околів U точки x і V точки $f(x)$ існує така відкрита непорожня множина $U_1 \subseteq U$, для якої $f(U_1) \subseteq V$.

Почнемо з побудови *структури квазінеперервності*.

Твердження 1. *Нехай X — топологічний простір і $\mathcal{A}_x = \left\{A \subseteq X \colon x \in \overline{\operatorname{int} A}\right\}$ для $x \in X$. Тоді $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$ є структурою квазінеперервності.*

Це твердження одержується безпосередньо з означень і тому його доведення ми опустимо.

Перейдемо тепер до розгляду нарізно неперервних функцій та їх аналогів. Нехай $X = \prod_{i \in I} X_i$ — добуток скінченної сім'ї топологічних просторів і $\alpha \subseteq 2^I$. Якщо $\alpha = \left\{\{i\} \colon i \in I\right\}$, то у всіх подальших термінах і позначеннях ми пропускатимемо символ α. Для довільної множини $J \subseteq I$ покладемо $X_J = \prod_{j \in J} X_j$, а через $\mathrm{pr}_J\colon X \to X_J$ позначатимемо відповідну *проекцію*, тобто $\mathrm{pr}_J\big((x_i)_{i \in I}\big) = (x_j)_{j \in J}$. Розглянемо функцію $f\colon X \to Y$. Для довільної множини $J \subseteq I$ і точки $x' = (x_j)_{j \in J} \in X_J$ визначимо $f_{x'}\colon X_{I \setminus J} \to Y$, покладаючи $f_{x'}(x'') = f(x)$ де $x'' = (x_j)_{j \in I \setminus J} \in X_{I \setminus J}$ і $x = (x_i)_{i \in I} \in X$. Казатимемо, що функція $f\colon X \to Y$ є *α-нарізно неперервною в точці* $x \in X$, якщо для кожного $J \in \alpha$ функція $f_{x'}$ неперервна в точці x'', де $x' = \mathrm{pr}_J(x)$ і $x'' = \mathrm{pr}_{I \setminus J}(x)$. Як звичайно, казатимемо, що f є *α-нарізно неперервна*, якщо вона є такою в кожній точці $x \in X$.

Розглянемо многозначне відображення $\mathrm{cr}_\alpha\colon X \rightrightarrows X$, яке діє за правилом $\mathrm{cr}_\alpha(x) = \bigcup_{J\in\alpha} \mathrm{pr}_{I\setminus J}^{-1}(\mathrm{pr}_{I\setminus J}(x))$. Множину $\mathrm{cr}_\alpha(E)$ будемо називати *α-хрестом множини E*. Нескладно перевірити, що f є α-нарізно неперервною в точці $x \in X$ тоді і тільки тоді, коли звуження $f|_{\mathrm{cr}_\alpha(x)}$ неперервне в x.

В наступному твердженні, яке випливає безпосередньо з означень, ми будуємо *структуру α-нарізної неперервності.*

Твердження 2. *Нехай $X = \prod_{i\in I} X_i$ — добуток скінченної сім'ї топологічних просторів, $\alpha \subseteq 2^I$ і $\mathcal{A}_x = \{U \cap \mathrm{cr}_\alpha(x)\colon U$ окіл точки $x\}$ для $x \in X$. Тоді $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$ — структура α-нарізної неперервності.*

Нехай тепер X — векторний простір і Y — топологічний простір. Як звичайно, для векторів $a, b \in X$ через $[a, b] = \{\lambda a + (1-\lambda)b\colon 0 \le \lambda \le 1\}$ позначимо відрізок, що з'єднує a та b. Функція $f\colon X \to Y$ називається *лінійно неперервною в точці* $x \in X$, якщо для довільного $e \in X$ функція $f_e(t) = f(x + te)$ неперервна в точці 0, тобто, якщо звуження f на довільну пряму, що проходить через x неперервне в точці x.

Структура лінійної неперервності будується в наступному твердженні.

Твердження 3. *Нехай X — векторний простір і для довільної точки $x \in X$ система $\mathcal{A}_x = \{A \subseteq X\colon \forall e \in X\, \exists \varepsilon > 0 \,|\, [x - \varepsilon e, x + \varepsilon e] \subseteq A\}$. Тоді $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$ — структура лінійної неперервності на X.*

3. Операції над $\mathcal{A}$-неперервними функціями. Перш за все з'ясуємо, що функція, яка є рівномірною границею $\mathcal{A}$-неперервних функцій залишається $\mathcal{A}$-неперервною.

Твердження 4. *Нехай $\mathcal{A}$ — деяка структура на множині X, Y — деякий рівномірний простір і послідовність $\mathcal{A}$-неперервних функцій $f_n\colon X \to Y$ збігається до функції $f\colon X \to Y$ рівномірно на X. Тоді f також є $\mathcal{A}$-неперервною.*

Доведення. Зафіксуємо деяку точку $x_0 \in X$ і розглянемо деякий окіл V_0 образу $y_0 = f(x_0)$. Виберемо таке оточення діагоналі W_0 в Y, що для нього окіл $W_0(y_0) = \{y \in Y\colon (y, y_0) \in W_0\}$ міститься в V_0. Далі виберемо таке симетричне оточення W в Y, що $W \circ W \circ W \subseteq W_0$. Оскільки $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X $(n \to +\infty)$, то існує такий номер n, для якого $(f(x), f_n(x)) \in W$ для кожного $x \in X$. Але функція f_n є $\mathcal{A}$-неперервною. Отже, існує $A \in \mathcal{A}_{x_0}$ таке, що $f_n(A) \subseteq W(f_n(x_0))$. Тобто, $(f_n(x), f_n(x_0)) \in W$ при $x \in A$. Зафіксуємо $x \in A$. Врахуємо, що $(f(x), f_n(x)) \in W$ і $(f_n(x_0), f(x_0)) \in W$, адже W симетричне. Тому $(f(x), y_0) = (f(x), f(x_0)) \in W \circ W \circ W \subseteq W_0$. Отже, $f(x) \in W_0(y_0) \subseteq V_0$. Звідси, $f(A) \subseteq V_0$, що і доводить $\mathcal{A}$-неперервність функції f в точці x_0. □

Зауважимо, що сума $\mathcal{A}$-неперервних функцій, взагалі кажучи, не є $\mathcal{A}$-неперервною. Для цього треба вимагати, щоб структура $\mathcal{A}$ була напрямленою. Зараз ми доведемо ряд тверджень, які в подальшому дозволять уникнути досить жорсткої вимоги напрямленості структури.

Структуру $\mathcal{A}$ на топологічному просторі X називатимемо *узгодженою*, якщо для довільних точки x, її околу U і її $\mathcal{A}$-околу M перетин $M \cap U$ є $\mathcal{A}$-околом точки x. Зрозуміло, що кожна узгоджена структура сильніша за вихідну топологічну структуру на X. Справді, якщо U — деякий окіл точки x, то оскільки X є $\mathcal{A}$-околом точки x, адже

$\mathcal{A}_x \neq \varnothing$, то $U = U \cap X$ також є $\mathcal{A}$-околом точки. Тобто, існує $A \in \mathcal{A}_x$ таке, що $A \subseteq U$. Тому для узгоджених структур з неперервності випливає $\mathcal{A}$-неперервність. Більше того, правильне таке твердження.

Твердження 5. *Нехай X та Y — топологічні простори, $\mathcal{A}$ — узгоджена структура на X, $x \in X$ і $f\colon X \to Y$ функція, для якої існує такий $\mathcal{A}$-окіл M точки x, що звуження $f|_M$ неперервне в точці x. Тоді f є $\mathcal{A}$-неперервною в точці x.*

Доведення. Нехай V деякий окіл точки $f(x)$ в Y. Оскільки звуження $f|_M$ неперервне в точці x, то існує такий окіл U точки x в X, для якого $f(U \cap M) \subseteq V$. Але структура $\mathcal{A}$ є узгордженою. Тому $U \cap M$ є $\mathcal{A}$-околом точки x. Отже, існує $A \in \mathcal{A}_x$, для якого $A \subseteq U \cap M$. Тоді $f(A) \subseteq f(U \cap M) \subseteq V$. Тому, f є $\mathcal{A}$-неперервною в точці x. □

Твердження 6. *Нехай X, Y, Z — топологічні простори, $\mathcal{A}$ деяка узгоджена структура на X, $x_0 \in X$, $f_1\colon X \to Y$ — $\mathcal{A}$-неперервна в точці x_0, $f_2\colon X \to Y$ — неперервна в точці x_0, $g\colon Y^2 \to Z$ — неперервна в точці $(f_1(x_0), f_2(x_0))$ і $h = g(f_1, f_2)$. Тоді h є $\mathcal{A}$-неперервною в точці x_0.*

Доведення. Нехай $y_1 = f_1(x_0)$, $y_2 = f_2(x_0)$ і $z_0 = h(x_0) = g(y_1, y_2)$. Розглянемо деякий окіл точки W точки z_0 в Z. Оскільки функція g неперервна в точці (y_1, y_2), то існують околи V_1 точки y_1 і V_2 точки y_2 такі, що $g(V_1 \times V_2) \subseteq W$. Але f_1 є $\mathcal{A}$-неперервною в точці x_0 і f_2 є неперервною в точці x_0. Тому існують $\mathcal{A}$-окіл M точки x_0 і окіл U точки x_0 такі, що $f_1(M) \subseteq V_1$ і $f_2(U) \subseteq V_2$. Далі, оскільки структура $\mathcal{A}$ узгоджена, то множина $M' = M \cap U$ є $\mathcal{A}$-околом точки x_0. Залишилось врахувати, що

$$h(M') \subseteq g(f_1(M') \times f_2(M')) \subseteq g(f_1(M) \times f_2(U)) \subseteq f(V_1 \times V_2) \subseteq W.$$

Отже, функція h є $\mathcal{A}$-неперервною. □

Наслідок 1. *Нехай $\mathcal{A}$ деяка узгоджена структура на топологічному просторі X, $x_0 \in X$, $f_1\colon X \to \mathbb{R}$ — $\mathcal{A}$-неперервна в точці x_0, $f_2\colon X \to \mathbb{R}$ — неперервна в точці x_0. Тоді функції $f_1 + f_2$ і $f_1 f_2$ є $\mathcal{A}$-неперервними в точці x_0.*

Наступне твердження є добре відомим (див. наприклад [1]).

Твердження 7. *Нехай X — топологічний простір і функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ є сумою рівномірно збіжного на X ряду з напівнеперервних знизу функцій $f_n\colon X \to \mathbb{R}$. Тоді*

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(f_n).$$

4. Розриви $\mathcal{A}$-неперервних функцій. Оскільки термін “ніде не щільна множина” в подальшому використовуватиметься при утворенні складених термінів то для нього ми будемо вживати однослівний замінник: “*мізерна множина*”. Нехай $\mathcal{A}$ — деяка структура на топологічному просторі X. Замкнену множину $F \subseteq X$ називатимемо $\mathcal{A}$-*мізерною*, якщо F має деякий мізерний $\mathcal{A}$-окіл. Казатимемо, що замкнена множина $F \subseteq X$ є *слабко* $\mathcal{A}$-*мізерною*, якщо існує такий $\mathcal{A}$-окіл M множини F, для якого $F \subseteq \operatorname{fr} \overline{M}$. Зрозуміло, що кожна $\mathcal{A}$-мізерна множина є слабко $\mathcal{A}$-мізерною, адже для мізерної множини M матимемо, що $\operatorname{fr} \overline{M} = \overline{M}$. Крім того, кожна слабко $\mathcal{A}$-мізерна множина є мізерною, адже межа замкненої множини завжди є мізерною. Множину $E \subseteq X$ називатимемо σ-(*слабко*)$\mathcal{A}$-*мізерною*, якщо існує послідовність (слабко) $\mathcal{A}$-мізерних множин F_n така, що $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Нагадаємо, що функція $f\colon X \to Y$ належить до *першого класу Лебеґа*, якщо прообраз довільної відкритої множини є множиною типу F_σ. Функція $f\colon X \to Y$ належить до *першого класу Бера*, якщо існує послідовність неперервних функцій $f_n\colon X \to Y$ така, що $f_n(x) \to f(x)$ для кожного $x \in X$. Добре відомо, що якщо Y досконало нормальний, то кожна функція з першого класу Бера обов'язково належить до першого класу Лебеґа, а навпаки, взагалі кажучи, ні.

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{A}$ — деяка структура на топологічному просторі X, Y — сепарабельний метризовний простір і $f\colon X \to Y$ — квазінеперервна $\mathcal{A}$-неперервна функція з першого класу Лебеґа. Тоді множина точок розриву $D(f)$ функції f є σ-слабко $\mathcal{A}$-мізерною.*

Доведення. Візьмемо деяку зліченну базу $\mathcal{V}$ простору Y і розглянемо зліченну множину

$$\{(V,W) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}\colon \overline{V} \subseteq W\} = \{(V_n, W_n)\colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Покладемо $M_n = f^{-1}(V_n)$ і $G_n = \mathrm{int} f^{-1}(Y \setminus \overline{W}_n)$. Оскільки f є функцією з першого класу Лебеґа, то M_n є F_σ-множиною. А отже, такою ж є й множина $E_n = M_n \cap \overline{G}_n$. Розглянемо таку послідовність замкнених множин $F_{n,k}$, що $E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{n,k}$. З $\mathcal{A}$-неперервності функції f випливає, що M_n є $\mathcal{A}$-околом кожної своєї точки, а значить, і $\mathcal{A}$-околом множини $F_{n,k}$. Далі, оскільки $M_n \cap G_n = \varnothing$, то $\overline{M}_n \cap G_n = \varnothing$. Отже,

$$F_{n,k} \subseteq E_n \subseteq \overline{G}_n \subseteq \overline{X \setminus \overline{M}_n} = X \setminus \mathrm{int}\, \overline{M}_n.$$

Звідси, $F_{n,k} \subseteq M_n \setminus \mathrm{int}\, \overline{M}_n \subseteq \overline{M}_n \setminus \mathrm{int}\, \overline{M}_n = \mathrm{fr}\, \overline{M}_n$. Тому, множини $F_{n,k}$ є слабко $\mathcal{A}$-мізерними. Залишилось довести, що $D(f) = \bigcup_{n,k=1}^{\infty} F_{n,k}$. Оскільки $E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{n,k}$ для кожного n, то досить довести, що $D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. По-перше, оскільки $E_n = M_n \cap \overline{G}_n$ і

$$\overline{f(M_n)} \cap \overline{f(G_n)} \subseteq \overline{V}_n \cap \overline{Y \setminus \overline{W}_n} \subseteq \overline{V}_n \setminus W_n = \varnothing,$$

то $E_n \subseteq D(f)$. Тому, $D(f) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Залишилось показати, що $D(f) \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Візьмемо точку $x_0 \in D(f)$. Тоді існує такий окіл V точки $f(x_0)$, що $x_0 \in \overline{f^{-1}(Y \setminus V)}$. Оскільки $\mathcal{V}$ є базою простору Y, то існує $n \in \mathbb{N}$, для якого $f(x_0) \in V_n$ і $\overline{W}_n \subseteq V$. Але функція f квазінеперервна, а множина $H_n = Y \setminus \overline{W}_n$ відкрита і містить $Y \setminus V$. Тому

$$x_0 \in \overline{f^{-1}(Y \setminus V)} \subseteq \overline{f^{-1}(H_n)} \subseteq \overline{\mathrm{int}\, f^{-1}(H_n)} = \overline{G}_n.$$

З іншого боку, $x_0 \in f^{-1}(V_n) = M_n$. Отже, $x_0 \in M_n \cap \overline{G}_n = E_n$. □

Топологічний простір X називатимемо *слабко парно досяжним*, якщо для довільної замкненої ніде не щільної множини $E \subseteq X$ і довільної відкритої множини G з $E \subseteq \mathrm{fr}\, G$ існують неперетинні відкриті множини $A, B \subseteq G$ такі, що $\overline{A} \setminus G = \overline{B} \setminus G = E$. Якщо існує тільки множина A з відповідними властивостями, то простір X називатимемо *слабко досяжним*. В [2, 3] встановлено, що метризовні і подібні до них простори мають сильнішу властивість — (парну) досяжність.

Теорема 2. *Нехай $\mathcal{A}$ деяка узгоджена структура на слабко парно досяжному досконало нормальному просторі X і E — σ-слабко $\mathcal{A}$-мізерна множина. Тоді існує квазінеперервна $\mathcal{A}$-неперервна напівнеперервна знизу функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = E$.*

Доведення. Розглянемо послідовність слабко $\mathcal{A}$-мізерних множин F_n, для яких $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Виберемо для кожного номера n такий замкнений $\mathcal{A}$-окіл M_n множини F_n, для якого $F_n \subseteq \operatorname{fr} M_n$. Покладемо $G_n = X \setminus M_n$. Тоді $F_n \subseteq \operatorname{fr} M_n = \operatorname{fr} G_n$. Але, оскільки простір X слабко парно досяжний, то існують неперетинні відкриті множини $U_n, V_n \subseteq G_n$ з $F_n = \overline{U}_n \setminus G_n = \overline{V}_n \setminus G_n$. Тому, $F_n \subseteq \operatorname{fr} U_n$. Але, очевидно, простір X є слабко досяжним. Отже, існує відкрита множина $A_n \subseteq U_n$, для якої $\overline{A}_n \setminus U_n = F_n$. Покладемо $B_n = (M_n \setminus F_n) \cup V_n$. Тоді

$$(\overline{A}_n \cap \overline{B}_n) \setminus F_n = (\overline{A}_n \setminus F_n) \cap \overline{B}_n \subseteq U_n \cap \overline{B}_n \subseteq U_n \cap (M_n \cup \overline{V}_n) = (U_n \cap M_n) \cup (U_n \cap \overline{V}_n) = \varnothing.$$

Оскільки досконало нормальний простір є спадково нормальним ([5]), то, застосувавши лему Урисона до підпростору $X \setminus F_n$, побудуємо неперервну функцію $\widetilde{f}_n\colon X \to [0,1]$, для якої $\widetilde{f}_n(x) = 1$ при $x \in A_n$ і $\widetilde{f}_n(x) = 0$ при $x \in B_n$. Визначимо тепер функцію $f_n\colon X \to [0,1]$ за правилом

$$f_n(x) = \begin{cases} \widetilde{f}_n(x), & x \in X \setminus F_n, \\ 0, & x \in F_n, \end{cases} \qquad x \in X.$$

З рівності $\overline{A}_n \cap \overline{B}_n = F_n$ випливає, що $D(f_n) = F_n$. Але в точках множини F_n функція f_n досягає свого мінімуму. Тому, функція f_n напівнеперервна знизу. Далі, оскільки $f_n(x) = \widetilde{f}_n(x) = 0$ при $x \in V_n$ і $F_n \subseteq \overline{V}_n$, то функція f_n є квазінеперервною в точках множини $F_n = D(f_n)$, а, отже, і квазінеперервною. Далі, врахувавши, що $f_n(x) = 0$ при $x \in M_n$ і M_n є $\mathcal{A}$-околом множини F_n, одержимо, що функція f_n є $\mathcal{A}$-неперервною в точках множини F_n. Але структура $\mathcal{A}$ є узгодженою. Тому, вона сильніша за топологічну структуру X і з неперервності випливає $\mathcal{A}$-неперервність, звідки, функція f_n є $\mathcal{A}$-неперервною. Отже, функція f_n є напівнеперервною знизу квазінеперервною $\mathcal{A}$-неперервною функцією, при цьому $D(f_n) = F_n$.

Оскільки простір X досконало нормальний, то за теоремою Веденісова ([5]) для довільного номера n існує така неперервна функція $\varphi_n\colon X \to [0,1]$, що $\varphi_n^{-1}(0) = \cup_{k<n} F_k$. Покладемо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi_n(x) f_n(x)$$

для довільного $x \in X$. Доведемо, що функція f є шуканою.

По-перше, оскільки функції $g_n = \frac{1}{2^n} \varphi_n f_n$ є напівнеперервними знизу, то f також є напівнеперервною знизу, як сума рівномірно збіжного ряду з напівнеперервних знизу функцій. Але,

$$D(g_n) = D(\varphi_n f_n) = F_n \setminus \bigcup_{k<n} F_k.$$

Тому, за твердженням 7 матимемо, що

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(F_n \setminus \bigcup_{k<n} F_n \Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = E.$$

По-друге, застосовуючи наслідок 1 для структури $\mathcal{A}$ і для структури квазінеперервності, матимемо, що функції g_n є $\mathcal{A}$-неперервними і квазінеперервними. Покажемо, що такою ж буде і функція f. Зафіксуємо деяку точку $x \in X$. Якщо $x \in X \setminus E$, то функція f навіть неперервна в точці x. Припустимо, що $x \in E$, і виберемо такий найменший номер n, для якого $x \in F_n$. Тоді $x \in F_n \setminus \cup_{k<n} F_k$. В такому разі функції g_k при $k \neq n$ є неперервними в точці x. Отже, такою ж є і функція $h_n = \sum_{k \neq n} g_k$. Але $f_n = g_n + h_n$, тому, скориставшись наслідком 1, одержимо, що f є $\mathcal{A}$-неперервною і квазінеперервною в точці x. $\square$

Здійснивши відповідні спрощення (забрати множини V_n) в доведенні попередньої теореми можна одержати і такий результат.

Теорема 3. *Нехай $\mathcal{A}$ — деяка узгоджена структура на слабко досяжному досконало нормальному просторі X і E — σ-слабко $\mathcal{A}$-мізерна множина. Тоді існує $\mathcal{A}$-неперервна напівнеперервна знизу функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = E$.*

Використавши теореми 1 і 2 та той факт, що кожна напівнеперервна функція на досконало нормальному просторі належить до першого класу Бера ([5]), одержимо наступну характеризацію.

Теорема 4. *Нехай $\mathcal{A}$ — деяка узгоджена структура на слабко парно досяжному досконало нормальному просторі X і $E \subseteq X$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) E є σ-слабко $\mathcal{A}$-мізерною;

(ii) E є множиною точок розриву деякої квазінеперервної $\mathcal{A}$-неперервної напівнеперервної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$;

(iii) E є множиною точок розриву деякої квазінеперервної $\mathcal{A}$-неперервної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ з першого класу Бера;

(iv) E є множиною точок розриву деякої квазінеперервної $\mathcal{A}$-неперервної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ з першого класу Лебеґа.

5. Розриви лінійно неперервних функцій. Нехай X — топологічний векторний простір і $\mathcal{A}$ — структура лінійної неперервності на X (див. твердження 3). Тоді $\mathcal{A}$-околи ми для спрощення називатимемо *l-околами* Підмножину $E \subseteq X$ називатимемо (σ-) *l-мізерною*, якщо вона є (σ-) слабко $\mathcal{A}$-мізерною. З теореми 4 негайно одержуємо такий результат.

Наслідок 2. *Нехай X — метризовний топологічний векторний простір. Множина $E \subseteq X$ є множиною точок розриву деякої лінійно неперервної квазінеперервної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ з першого класу Бера тоді і лише тоді, коли E є σ-l-мізерною.*

Врахувавши, що лінійно неперервні функції на скінченно вимірному просторі є нарізно неперервними, а, отже, і квазінеперервними, то матимемо такий наслідок.

Наслідок 3. *Множина $E \subseteq \mathbb{R}^n$ є множиною точок розриву деякої лінійно неперервної функції $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ з першого класу Бера тоді і лише тоді, коли E є σ-l-мізерною.*

Оскільки лінійно неперервна функція на $\mathbb{R}^2$ є нарізно неперервною, а кожна нарізно неперервна функція від двох дійсних змінних, як відомо, належить до першого класу Бера, то звідси випливає така характеризація множин точок розриву лінійно неперервних функцій від двох дійсних змінних.

Наслідок 4. *Множина $E \subseteq \mathbb{R}^2$ є множиною точок розриву деякої лінійно неперервної функції $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли E є σ-l-мізерною.*

Зараз ми з'ясуємо ряд простих необхідних умов на підмножину нормованого простору, які гарантують її l-мізерність.

Теорема 5. *Нехай X — нормований простір, G — відкрита опукла підмножина X, $F = \operatorname{fr} G$ — межа множини G і E — замкнена ніде не щільна в F множина. Тоді E є l-мізерною.*

Доведення. Покладемо для довільної непорожньої множини $A \subseteq X$ і точки $a \in X$ $d(a, A) = \inf\limits_{x \in A} \|x - a\|$. Як відомо ([5]), функція $x \mapsto d(x, A)$ є неперервною, звідки, множина $H = \{x \in G \colon d(x, F) < (d(x, E))^2\}$ є відкритою. Зрозуміло, що $F \setminus E \subseteq \overline{H}$. Тому, оскільки E ніде не щільна в F, то $F = \overline{F \setminus E} \subseteq \overline{G}$. А, отже, і $E \subseteq \overline{H}$.

Покажемо, що множина $M = X \setminus H$ є l-околом множини E. Нехай це не так і існують $a \in E$, $b \in S_X$ і послідовність чисел $\lambda_n \downarrow 0$, така, що $x_n = a + \lambda_n b \in H$. Тоді

$$d(x_n, X \setminus \overline{G}) = d(x_n, X \setminus G) = d(x_n, F) < (d(x_n, E))^2 < \|x_n - a\|^2 = \lambda_n^2.$$

Отже, існує таке $y_n \in X \setminus \overline{G}$, для якого $\|y_n - x_n\| < \lambda_n^2$. Тоді $\|a + \lambda_n b - y_n\| \leq \lambda_n^2$. Розділивши останню нерівність на λ_n одержимо, що $\|b - \frac{1}{\lambda_n}(y_n - a)\| < \lambda_n$, звідки, $z_n = \frac{1}{\lambda_n}(y_n - a) \to b$ $(n \to +\infty)$. Тоді $a + \lambda_1 z_n \to a + \lambda_1 b = x_1 \in G$. Отже, існує такий номер n, для якого $b_n = a + \lambda_1 z_n \in G$. Але $\frac{1}{\lambda_n}(y_n - a) = z_n = \frac{1}{\lambda_1}(b_n - a)$, тому $y_n = (1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_1})a + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} b$. Проте $\lambda_n \leq \lambda_1$ і $a, b \in \overline{G}$. Тому, з опуклості $\overline{G}$, матимемо, що $y_n \in \overline{G}$, а це суперечить вибору y_n.

Отже, множина E є слабко лінійно мізерною. □

Зараз ми дещо ослабимо умову опуклості множини G в попередній теоремі. Нехай X — топологічний векторний простір. Множина $K \subseteq X$ називається *конусом в точці* a, якщо для довільного $x \in K$ і $\lambda > 0$ виконується, що $a + \lambda(x - a) \in K$. Нехай G відкрита підмножина X. Точку $a \in \operatorname{fr} G$ називатимемо *конічною точкою множини* G, якщо існує такий окіл U_0 точки a, що для довільного $x \in U_0 \cap G$ існують відкритий конус K в точці a і окіл U точки a такі, що $x \in K$ і $U \cap K \cap \operatorname{fr} G = \varnothing$.

Зрозуміло, що якщо сама множина G є опуклою або її доповнення $X \setminus G$ є опуклим, то всі точки її межі є конічними.

Теорема 6. *Нехай X — нормований простір, G — канонічно відкрита підмножина X, $F = \operatorname{fr} G$ і E — замкнена в X ніде не щільна в F множина така, що кожна точка $x \in E$ є конічною точкою множини G. Тоді E є l-мізерною.*

Доведення. Побудуємо відкриту множину $H = \{x \in G \colon d(x, F) < (d(x, E))^2\}$. Тоді знову $F \setminus E \subseteq \overline{H}$. Оскільки E ніде не щільна в F, то $F = \overline{F \setminus E} \subseteq \overline{G}$. А, отже, і $E \subseteq \overline{H}$.

Покажемо, що множина $M = X \setminus H$ є l-околом множини E. Візьмемо деяку точку $a \in E$ і покажемо, що M є l-околом a. Розглянемо деяке $b \in S_X$ і знайдемо таке $\varepsilon > 0$, для якого $[a, a + \varepsilon b] \subseteq M$. Нехай це не так і існує послідовність чисел $\lambda_n \downarrow 0$ така, що $x_n = a + \lambda_n b \in H$. Точка a є конічною точкою множини G. Тому існує такий окіл U_0 точки a, що для довільного $x \in U_0 \cap G$ існують відкритий конус K в точці a і окіл U точки a такі, що $x \in K$ і $U \cap K \cap \operatorname{fr} G = \varnothing$. Оскільки $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$, то існує такий номер n_0, що для довільного $n \geq n_0$ виконується $x_n \in U_0$. Тоді існує опуклий відкритий конус K в точці a і відкритий опуклий окіл U точки a, для якого $x_{n_0} \in K$ і $U \cap K \cap \operatorname{fr} G = \varnothing$. Далі знайдемо таке $n_1 \geq n_0$, що для довільного $n \geq n_1$ виконується $x_n \in U$. Звідси, оскільки множина K є конусом в точці a, то $x_n = a + \lambda_n b = a + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n_0}}(x_{n_0} - a) \in K$ при $n \geq n_0$. Отже, $x_n \in U \cap K$ при $n \geq n_0$. Але множина $U_1 = U \cap K$ є опуклою, а, тому, зв'язною. Крім того, $U_1 \cap F = \varnothing$. Отже, $U_1 \subseteq G \cup (X \setminus \overline{G})$. Звідси, або $U_1 \subseteq G$, або $U_1 \subseteq X \setminus G$. Другий випадок неможливий, бо $x_{n_1} \in U_1 \cap G$. Отже, $U_1 \subseteq G$. Оскільки множина G є канонічно відкритою, то $X \setminus G$ є канонічно замкненою. Отже, $\overline{X \setminus \overline{G}} = X \setminus G$. Тоді

$$d(x_n, X \setminus \overline{G}) = d(x_n, X \setminus G) = d(x_n, F) < (d(x_n, E))^2 < \|x_n - a\|^2 = \lambda_n^2.$$

Тому існує таке $y_n \in X \setminus \overline{G}$, для якого $\|y_n - x_n\| < \lambda_n^2$. Тоді $\|a + \lambda_n b - y_n\| \le \lambda_n^2$. Розділивши останню нерівність на λ_n одержимо, що $\|b - \frac{1}{\lambda_n}(y_n - a)\| < \lambda_n$, звідки, $z_n = \frac{1}{\lambda_n}(y_n - a) \to b$ $(n \to +\infty)$. Тоді $a + \lambda_{n_1} z_n \to a + \lambda_{n_1} b = x_{n_1} \in U_1$ $(n \to +\infty)$. Тому, існує такий номер $n > n_1$, для якого $b_n = a + \lambda_{n_1} z_n \in G$ і з рівності $\frac{1}{\lambda_n}(y_n - a) = z_n = \frac{1}{\lambda_1}(b_n - a)$ отримаємо $y_n = (1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_1})a + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} b$. Але $\lambda_n \le \lambda_{n_1}$ і $a, b \in \overline{U}_1$. Тому, за рахунок опуклості $\overline{U}_1$, матимемо, що $y_n \in \overline{U}_1 \subseteq \overline{G}$, а це суперечить вибору y_n. Отже, множина E є слабко лінійно мізерною. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. V.K. Maslyuchenko, V.V. Mykhalyuk, *A charecterization of the discontinuty point set of separately continuous functions of several variable defined on the product of metrizable spaces*, Ukr. mat. zhurnal, **52** (2000), №6, 740–747. (in Ukrainian)
2. O.V. Maslyuchenko, *Construction of ω-primitives: the strongly attaineble spaces*, Mat. visnyk NTSh, **6** (2009), 155–178. (in Ukrainian)
3. O.V. Maslyuchenko, *The oscillation of quasi-continuous functions on pairwise attainable spaces*, Houston Journal of Mathematics, **35** (2009), №1, 113–130.
4. O.V. Maslyuchenko, *The discontinuity point sets of quasi-continuous functions*, Bul. Austral. Math. Soc., **75** (2007), №3, 373–379.
5. R. Engelking, General topology. – Warszawa: PWN, 1977. – 626 p.

Кафедра математичного аналізу
Чернівецького національного університету імені Ю. Федьковича
ovmasl@gmail.com

Надійшло 21.09.2011