

УДК 517.97

С. М. БАК

ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМІ ФЕРМІ-ПАСТИ-УЛАМА НА ДВОВИМІРНІЙ ГРАТЦІ

S. M. Bak. *Existence of periodic travelling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D-lattice*, Mat. Stud. **37** (2012), 76–88.

It is considered the system of differential equations that describes the dynamics of an infinite system of atoms on 2D-lattice. Results on existence of the periodic travelling waves are obtained.

С. Н. Бак. *Существование периодических бегущих волн в системе Ферми-Пасты-Улама на двумерной решетке* // Мат. Студії. – 2012. – Т.37, №1. – С.76–88.

Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая динамику бесконечной системы атомов на двумерной решетке. Получен результат о существовании периодических бегущих волн.

1. Вступ. У цій статті досліджуються рівняння, що описують динаміку нескінченної системи атомів, розміщених на плоскій цілочисловій ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — координата (n, m) -го атому в момент часу t . Припускається, що кожний атом нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\ddot{q}_{n,m} = U'(q_{n+1,m} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n-1,m}) + \\ + U'(q_{n,m+1} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n,m-1}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (1)$$

де U — потенціал взаємодії між сусідніми атомами. Рівняння (1) є нескінченною системою звичайних диференціальних рівнянь.

Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці ([7], [10]–[12]). У статтях [1], [3], [13] та [14] досліджувались біжучі хвилі в системах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірних ґратках, у статті [17] — періодичні розв'язки, а у статті [2] — питання коректності задачі Коші для таких систем. Відмітимо, що в статті [12] вивчались бризери для нескінченної системи Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці, а у статті [18] — періодичні розв'язки для системи Фермі-Пасти-Улама на ґратці розміру $n \times m$. Огляд відомих результатів про системи Фермі-Пасти-Улама на одновимірній ґратці зроблено в [15].

У цій статті отримано умови існування періодичних біжучих хвиль для нескінченної системи Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. Дана робота узагальнює результати, отримані в [15].

2010 *Mathematics Subject Classification*: 35Q51, 35Q55, 39A12.

Keywords: system of differential equation, periodic travelling waves, 2D-lattice.

doi:10.30970/ms.37.1.76-88

2. Постановка задачі. Біжуча хвиля має вигляд

$$q_{n,m}(t) = u(n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct)$$

і для її профілю $u(s)$, де $s = n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct$, отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} c^2 u''(s) = & U'(u(s + \cos \varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s - \cos \varphi)) + \\ & + U'(u(s + \sin \varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s - \sin \varphi)). \end{aligned} \quad (2)$$

Відмітимо, що функція $u = u(s): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається профілем хвилі. Стала $c \neq 0$ є сталою швидкістю хвилі. Якщо $c > 0$, то хвиля зміщується праворуч, а якщо $c < 0$, то ліворуч. Цікавими є нетривіальні хвилі з профілем, який тотожно не дорівнює нулю.

Зауважимо, що профіль періодичної біжучої хвилі задовольняє умову

$$u'(s + 2k) = u'(s), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Відмітимо, що у випадку, коли $\varphi \equiv 0, \pi/2 \pmod{\pi}$, хвиля поширюється вздовж відповідної координатної осі. Такі хвилі зводяться до хвиль на одновимірній ґратці, що досліджені в [15]. Зазначимо, що в рівняння (2) швидкість c входить в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(t)$ задовольняє рівняння (2), то існують дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$. Одна з них рухається направо, інша — наліво.

Скрізь далі під розв'язком рівняння (2) розуміємо функцію $u(s)$ з класу $C^2(\mathbb{R})$, яка задовольняє рівняння (2) для всіх $s \in \mathbb{R}$.

3. Варіаційне формулювання задачі. Позначимо через E_k гільбертів простір

$$E_k = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}): u'(s + 2k) = u'(s), u(0) = 0\}$$

зі скалярним добутком $(u, v)_k = \int_{-k}^k u'(s)v'(s)ds$ і відповідною нормою $\|u\|_k = (u, u)_k^{\frac{1}{2}}$.

Нагадаємо, що за теоремою вкладення $E_k \subset C([-k, k])$, де $C([-k, k])$ — простір неперервних функцій на $[-k, k]$. Через $\|\cdot\|_{k,*}$ позначимо норму на просторі E_k^* , який є спряженим (дуальним) до простору E_k .

Фактично, E_k є 1-ковимірним підпростором гільбертового простору

$$\tilde{E}_k = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}): u'(s + 2k) = u'(s)\}$$

зі скалярним добутком $\int_{-k}^k u'(s)v'(s)ds + u(0)v(0)$.

На просторі $\tilde{E}_k$ означимо оператори $\tilde{E}_k \rightarrow \tilde{E}_k$:

$$(Au)(s) := u(s + \cos \varphi) - u(s) = \int_s^{s+\cos \varphi} u'(\tau) d\tau, \quad (Bu)(s) := u(s + \sin \varphi) - u(s) = \int_s^{s+\sin \varphi} u'(\tau) d\tau.$$

Тоді правильне таке твердження.

Лема 1. Оператори A та $B: E_k \rightarrow L^2(-k, k) \cap L^\infty(-k, k)$ є обмеженими лінійними операторами, що задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} \|Au\|_{L^\infty(-k,k)} &\leq |\cos \varphi| \|u\|_k, \quad \|Au\|_{L^2(-k,k)} \leq |\cos \varphi| \|u\|_k, \\ \|Bu\|_{L^\infty(-k,k)} &\leq |\sin \varphi| \|u\|_k, \quad \|Bu\|_{L^2(-k,k)} \leq |\sin \varphi| \|u\|_k. \end{aligned}$$

Доведення. За нерівністю Шварца маємо

$$|Au(s)|^2 = \left| \int_s^{s+\cos \varphi} u'(\tau) d\tau \right|^2 \leq \left(\left(\int_s^{s+\cos \varphi} |u'(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left(\left(\int_s^{s+\cos \varphi} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 = |\cos \varphi| \|u\|_k^2.$$

Інтегруючи останню нерівність, отримуємо

$$\int_{-k}^k |Au(s)|^2 ds \leq |\cos \varphi| \int_{-k}^k \int_s^{s+\cos \varphi} |u'(\tau)|^2 d\tau ds = |\cos \varphi| \iint_D |u'(t)|^2 d\tau ds,$$

де $D = \{(s, \tau): -k \leq s \leq k, s \leq \tau \leq s + \cos \varphi\}$.

Змінюючи порядок інтегрування, неважко побачити, що подвійний інтеграл в правій частині збігається з інтегралом

$$|\cos \varphi| \iint_{D_1} |u'(t)|^2 d\tau ds,$$

де $D_1 = \{(s, \tau): -k + \cos \varphi \leq \tau \leq k + \cos \varphi, \tau - \cos \varphi \leq s \leq \tau\}$. Переходячи в останньому інтегралі до повторного і використовуючи періодичність $u'(\tau)$, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{-k}^k |Au(s)|^2 ds &\leq |\cos \varphi| \int_{-k+\cos \varphi}^{k+\cos \varphi} \int_{\tau-\cos \varphi}^{\tau} |u'(\tau)|^2 d\tau ds = \\ &= |\cos \varphi| \int_{-k}^k \int_{\tau-\cos \varphi}^{\tau} |u'(\tau)|^2 d\tau ds = \cos^2 \varphi \int_{-k}^k |u'(\tau)|^2 d\tau ds = \cos^2 \varphi \|u\|_k^2. \end{aligned}$$

Добуваючи корінь квадратний від обох частин нерівності, остаточно маємо

$$\|Au\|_{L^2(-k,k)} \leq |\cos \varphi| \|u\|_k.$$

Всі інші нерівності доводяться подібно. □

Скрізь надалі передбачається, що потенціал $U(r)$ задовольняє умову:

(i) *функція $U(r)$ неперервно диференційовна, причому $U(0) = U'(0) = 0$.*

На просторі E_k розглянемо функціонал

$$J_k(u) := \int_{-k}^k \left\{ \frac{c^2}{2} |u'(s)|^2 - U(Au(s)) - U(Bu(s)) \right\} ds.$$

Лема 2. *Нехай виконується умова (i), тоді J_k — функціонал з класу C^1 на E_k , а його похідна виражається формулою*

$$\langle J'_k(u), h \rangle = \int_{-k}^k \{ c^2 u'(s) h'(s) - U'(Au(s)) Ah(s) - U'(Bu(s)) Bh(s) \} ds \quad (4)$$

для $u, h \in E_k$.

Доведення. Подамо функціонал J_k у вигляді

$$J_k(u) = \frac{c^2}{2}(u, u)_k - \Phi_k(u), \quad \Phi_k(u) := \int_{-k}^k \{U(Au(s)) + U(Bu(s))\} ds.$$

Отже, достатньо розглянути тільки функціонал Φ_k , оскільки для квадратичної частини твердження очевидне.

Оскільки для будь-якого $u \in E_k$ функції Au і Bu неперервні, то $\Phi_k < \infty$. Безпосереднім обчисленням неважко показати, що похідна функціоналу Φ_k існує і обчислюється за формулою

$$\langle \Phi'_k(u), h \rangle = \int_{-k}^k \{U'(Au(s))Ah(s) + U'(Bu(s))Bh(s)\} ds.$$

І, нарешті, перевіримо неперервність цієї похідної.

Нехай $\|h\|_k \leq 1$ і $u_n \rightarrow u$ ($n \rightarrow +\infty$) в E_k . Тоді $Au_n \rightarrow Au$ ($n \rightarrow +\infty$) рівномірно на $[-k, k]$ і

$$\begin{aligned} & |\langle \Phi'_k(u_n) - \Phi'_k(u), h \rangle| \leq \\ & \leq \|Ah\|_{L^1} \cdot \|U'(Au_n) - U'(Au)\|_{L^\infty} + \|Bh\|_{L^1} \cdot \|U'(Bu_n) - U'(Bu)\|_{L^\infty} \leq \\ & \leq (2k)^{1/2} [\|Ah\|_{L^1} \cdot \|U'(Au_n) - U'(Au)\|_{L^\infty} + \|Bh\|_{L^1} \cdot \|U'(Bu_n) - U'(Bu)\|_{L^\infty}] \leq \\ & \leq (2k)^{1/2} [\|U'(Au_n) - U'(Au)\|_{L^\infty} + \|U'(Bu_n) - U'(Bu)\|_{L^\infty}], \end{aligned}$$

де всі L^p -норми беруться над відрізком $[-k, k]$. Оскільки $U'(Au_n) \rightarrow U'(Au)$ і $U'(Bu_n) \rightarrow U'(Bu)$ при $n \rightarrow +\infty$ рівномірно на $[-k, k]$, то лему доведено. $\square$

Лема 3. Критичні точки функціоналу $J_k \in C^2$ -розв'язками рівняння (2), що задовольняють умову (3).

Доведення. Нехай $g(s)$ $2k$ -періодична функція з класу C^∞ . Тоді $h(s) = g(s) - g(0) \in E_k$. Якщо u є критичною точкою функціоналу J_k , то

$$\begin{aligned} 0 = \langle J'_k(u), h \rangle &= \int_{-k}^k \{c^2 u'(s)h'(s) - U'(Au(s))Ah(s) - U'(Bu(s))Bh(s)\} ds = \\ &= \int_{-k}^k \{c^2 u'(s)g'(s) - U'(u(s + \cos \varphi) - u(s))(g(s + \cos \varphi) - g(s)) - \\ &\quad - U'(u(s + \sin \varphi) - u(s))(g(s + \sin \varphi) - g(s))\} ds = \int_{-k}^k \{c^2 u'(s)g'(s) - \\ &\quad - [U'(u(s) - u(s - \cos \varphi)) - U'(u(s + \cos \varphi) - u(s))]g(s) - \\ &\quad - [U'(u(s) - u(s - \sin \varphi)) - U'(u(s + \sin \varphi) - u(s))]g(s)\} ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-k}^k \{-c^2 u''(s)g(s) - [U'(u(s) - u(s - \cos \varphi)) - U'(u(s + \cos \varphi) - u(s))]g(s) - \\
&\quad - [U'(u(s) - u(s - \sin \varphi)) - U'(u(s + \sin \varphi) - u(s))]g(s)\} ds = \\
&= \int_{-k}^k \{-c^2 u''(s) + U'(u(s + \cos \varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s - \cos \varphi)) + \\
&\quad + U'(u(s + \sin \varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s - \sin \varphi))\} g(s) ds.
\end{aligned}$$

Це означає, що u задовольняє рівняння (2) в сенсі узагальнених функцій, тобто u — слабкий розв'язок рівняння (2). Оскільки $u(s)$ і $U'(r)$ неперервні функції, то права частина рівняння (2) є неперервною. Звідси отримуємо, що $u''(s)$ — неперервна, тобто $u \in C^2$ — розв'язок рівняння (2) у звичайному розумінні. $\square$

4. Основні результати. Спочатку доведемо існування монотонних періодичних біжучих хвиль за таких умов:

(i') $U(r) = \frac{c_0^2}{2} + V(r)$, де $c_0 \geq 0$, $V \in C^1(\mathbb{R})$, причому $V(0) = V'(0) = 0$ і $V'(r) = o(|r|)$ при $r \rightarrow 0$,

і також

(ii⁺) існують $r_0 > 0$ і $\theta > 2$ такі, що $V(r_0) > 0$ і для $r \geq 0$

$$0 \leq \theta V(r) \leq rV'(r),$$

або

(ii₋) існують $r_0 < 0$ і $\theta > 2$ такі, що $V(r_0) > 0$ і для $r \leq 0$

$$0 \leq \theta V(r) \leq rV'(r).$$

Зауважимо, що умову (ii⁺) можна записати у вигляді диференціальної нерівності

$$r^{\theta+1} \frac{d}{dr}(r^{-\theta} V(r)) \geq 0, \quad r > 0.$$

Безпосереднє інтегрування показує, що $V(r) \geq a_0 r^\theta$, для $r > r_0$ з $a_0 = r_0^{-\theta} V(r_0)$. Разом з умовою (i') це означає, що

$$V(r) \geq a_1(r^\theta - r^2), \quad r \geq 0. \quad (5)$$

Аналогічно у випадку умови (ii₋) остання нерівність виконується для $r \leq 0$.

Нас цікавлять $2k$ -періодичні біжучі хвилі, які мають неспадний або незростаючий профіль.

Теорема 1. Нехай виконується умова (i') і $k \geq 1$. Тоді

- (a) за умови (ii⁺) для будь-якого $c > c_0$ існує нетривіальна неспадна $2k$ -періодична біжуча хвиля $u_k \in E_k$, яка є розв'язком рівняння (2);
- (b) за (ii₋) для будь-якого $c > c_0$ існує нетривіальна незростаюча $2k$ -періодична біжуча хвиля $u_k \in E_k$, яка є розв'язком рівняння (2).

Більше того, в обидвох випадках існують сталі $\delta > 0$ і $M > 0$, які не залежать від k такі, що критичне значення $J_k(u_k)$ задовольняє нерівності $0 < \delta \leq J_k(u_k) \leq M$.

Доведення цієї теореми ґрунтується на використанні теореми про гірський перевал. Сформулюємо теорему про гірський перевал у потрібному нам вигляді і перевіримо її умови для функціоналу J_k ([16], [19]).

Теорема 2 (про гірський перевал). Нехай I — функціонал з класу C^1 на гільбертовому просторі H , який задовольняє умову Пале-Смейла:

(PS) якщо послідовність $u_n \in H$ така, що $I'(u_n) \rightarrow 0$, $(n \rightarrow +\infty)$ і $I(u_n)$ обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність.

Нехай існують такі $e \in H$ і $r > 0$, що $\|e\| > r$ і

$$\beta := \inf_{\|v\|=r} I(v) > 0 = I(0) \geq I(e).$$

I нехай

$$b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

де $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$. Тоді b — критичне значення функціоналу I , тобто існує така критична точка $u \in H$ функціоналу I , що $I(u) = b$, причому $b \geq \beta$.

Далі нам ще знадобиться теорема, доведення якої можна знайти в статті [9].

Теорема 3. Нехай виконуються умови теореми про гірський перевал і $P: H \rightarrow H$ таке неперервне відображення, що $I(Pu) \leq I(u)$ для всіх $u \in H$, причому $P(0) = 0$ і $P(e) = e$. Тоді існує критична точка $u \in PH$ (замикання PH) функціоналу I з критичним значенням $b = I(u)$.

Покладемо

$$(Pu)(s) := \int_0^s |u'(t)| dt.$$

Неважко перевірити, що P неперервно відображає простір E_k в себе і PE_k складається з неспадних функцій.

Оскільки ми шукаємо монотонні хвилі, то ми можемо припустити, що $V(r) \equiv 0$ для $r < 0$ у випадку (a) і $V(r) \equiv 0$ для $r > 0$ у випадку (b). (З таким же успіхом можна припустити, що в обидвох випадках $V(r)$ є парною функцією). Зокрема, це означає, що модифікований потенціал задовольняє нерівності $0 \leq \theta V(r) \leq rV'(r)$ для всіх $r \in \mathbb{R}$.

Надалі будемо розглядати тільки випадок (a), оскільки випадок (b) розглядається подібно.

Лема 4. За умов теореми 1 існують $\delta > 0$ і $\varrho > 0$ такі, що $J_k(u) \geq \delta$ при $\|u\|_k = \varrho$. До того ж, існує $e_k \in PE_k$ таке, що $\|e_k\|_k > \varrho$ і $J_k(e_k) = J_1(e_1) \leq 0$.

Доведення. Умова (i') означає, що для $\varepsilon > 0$ існує таке $\varrho > 0$, що $|V(r)| \leq \varepsilon r^2$ при $|r| \leq \varrho$. Якщо $\|u\|_k \leq \varrho$, то за лемою 1 $\|Au\|_{L^\infty} \leq |\cos \varphi| \varrho$, $\|Bu\|_{L^\infty} \leq |\sin \varphi| \varrho$ і

$$\begin{aligned} J_k(u) &\geq \int_{-k}^k \left\{ \frac{c^2}{2} |u'(s)|^2 - \frac{c_0^2}{2} |Au(s)|^2 - \varepsilon |Au(s)|^2 - \frac{c_0^2}{2} |Bu(s)|^2 - \varepsilon |Bu(s)|^2 \right\} ds \geq \\ &\geq \frac{c^2}{2} \|u\|_k^2 - \frac{c_0^2}{2} |\cos \varphi|^2 \|u\|_k^2 - \varepsilon |\cos \varphi|^2 \|u\|_k^2 - \frac{c_0^2}{2} |\sin \varphi|^2 \|u\|_k^2 - \varepsilon |\sin \varphi|^2 \|u\|_k^2 = \\ &= \frac{c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon}{2} \|u\|_k^2. \end{aligned}$$

Вибираючи ε достатньо малим, ми отримуємо перше твердження леми.

Для того, щоб побудувати функцію e_k , спочатку виберемо функцію $v \in PE_k$ таку, що $v(t) = 0$ при $0 \leq t \leq 1$, $v'(-1) = 0$ і $Av(t_0) > 0$, $Bv(t_0) > 0$ для деякого t_0 . Зауважимо, що v' може бути відмінним від нуля тільки на інтервалі вигляду $(2l-1, 2l)$, $l \in \mathbb{Z}$. Оскільки $Av \geq 0$ і $Bv \geq 0$, то за нерівністю (5) маємо

$$\begin{aligned} J_1(\tau v) &\leq \tau^2 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{c^2}{2} |v'(s)|^2 + (a_1 - \frac{c_0^2}{2})(|Av(s)|^2 + |Bv(s)|^2) \right\} ds - \\ &\quad - \tau^\theta a_1 \int_{-1}^1 (|Av(s)|^\theta + |Bv(s)|^\theta) ds \leq \\ &\leq \tau^2 \left\{ \frac{c^2}{2} \|v(s)\|_1^2 + a_1 (\|Av(s)\|_{L^2}^2 + \|Bv(s)\|_{L^2}^2) \right\} - \tau^\theta a_1 \{ \|Av(s)\|_{L^\theta}^\theta + \|Bv(s)\|_{L^\theta}^\theta \}. \end{aligned}$$

Оскільки $\theta > 2$, то $J_1(\tau v) \rightarrow -\infty$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Отже, ми можемо зафіксувати $e_1 = \tau_0 v$, яке задовольняє умови $J_1(e_1) \leq 0$ і $\|e_1\|_1 > \varrho$.

Означимо тепер $e_k \in E_k$ так: $e_k(s) = e_1(s)$ при $|s| \leq 1$ і $e'_k(s) = 0$ при $1 \leq s \leq k$ (Продовжуючи e'_k на $\mathbb{R}$ завдяки $2k$ -періодичності, ми означаємо e_k однозначно). Очевидно, що e'_k може бути відмінною від нуля тільки на інтервалах $(2kl-1, 2kl)$, $l \in \mathbb{Z}$. Звідси негайно слідує, що $\|e_k\|_k = \|e_1\|_1$. Більше того,

$$\begin{aligned} (Ae_k)(s) &= e_k(s + \cos \varphi) - e_k(s) = \\ &= \begin{cases} e_1(s + \cos \varphi) - e_1(s), & s \in [-1 - \cos \varphi, 1 - \cos \varphi], \\ 0, & s \in [-k, k] \setminus [-1 - \cos \varphi, 1 - \cos \varphi], \end{cases} \\ (Be_k)(s) &= e_k(s + \sin \varphi) - e_k(s) = \\ &= \begin{cases} e_1(s + \sin \varphi) - e_1(s), & s \in [-1 - \sin \varphi, 1 - \sin \varphi], \\ 0, & s \in [-k, k] \setminus [-1 - \sin \varphi, 1 - \sin \varphi]. \end{cases} \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_{-k}^k V(Ae_k(s)) ds &= \int_{-1-\cos \varphi}^{1-\cos \varphi} V(Ae_k(s)) ds = \int_{-1-\cos \varphi}^{1-\cos \varphi} V(e_1(s + \cos \varphi) - e_1(s)) ds = \\ &= \int_{-1}^1 V(e_1(s) - e_1(s - \cos \varphi)) ds = \int_{-1}^1 V(Ae_1(s)) ds, \end{aligned}$$

оскільки різниця $e_1(s + \cos \varphi) - e_1(s)$ 2-періодична. Аналогічно

$$\int_{-k}^k V(Be_k(s))ds = \int_{-1-\sin \varphi}^{1-\sin \varphi} V(Be_k(s))ds = \int_{-1}^1 V(Be_1(s))ds.$$

Зокрема, ми отримуємо, що $J_k(e_k) = J_1(e_1) \leq 0$. $\square$

Слід відмітити, що $J_k(te_k) = J_1(te_1)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Лема 5. Нехай виконується умова (i') і $c > c_0$. Якщо потенціал V задовольняє нерівність $\theta V(r) \leq rV'(r)$, $r \in \mathbb{R}$, з $\theta > 2$, то функціонал J_k задовольняє умову Пале-Смейла.

Доведення. Нехай $u_n \in E_k$ послідовність Пале-Смейла рівня b (тобто b критичне значення функціоналу J_k). Тоді, для достатньо великого n , $\|J'_k(u_n)\|_{k,*} \leq 1$ і $|J_k(u_n)| \leq b + 1$. Тому,

$$\begin{aligned} b + 1 + \frac{1}{\theta} \|u_n\|_k &\geq J_k(u_n) - \frac{1}{\theta} \langle J'_k(u_n), u_n \rangle = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \int_{-k}^k (c^2 |u'_n(s)|^2 - c_0^2 |Au_n(s)|^2 - c_0^2 |Bu_n(s)|^2) ds + \\ &+ \int_{-k}^k \left[\frac{1}{\theta} (V'(Au_n)Au_n + V'(Bu_n)Bu_n) - V(Au_n) - V(Bu_n) \right] ds. \end{aligned}$$

Відповідно до умови леми (нерівності для V) другий інтеграл невід'ємний і тому, за лемою 1, маємо

$$b + 1 + \frac{1}{\theta} \|u_n\|_k \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) (c^2 - c_0^2) \|u_n\|_k^2.$$

Отже, послідовність (u_n) є обмеженою у просторі E_k .

Обмеженість послідовності (u_n) означає, що переходячи до підпослідовності, $u_n \rightarrow u$ ($n \rightarrow +\infty$) слабо в E_k , а отже, $Au_n \rightarrow Au$ слабо в $\tilde{E}_k$, і сильно в $L^2(-k; k)$ (за компактністю вкладавання Соболева).

Безпосередніми обчисленнями отримуємо, що

$$\begin{aligned} c^2 \|u_n - u\|_k^2 &= \int_{-k}^k c^2 |u'_n - u'|^2 ds = \langle J'_k(u_n) - J'_k(u), u_n - u \rangle + \\ &+ c_0^2 \|Au_n - Au\|_{L^2}^2 + c_0^2 \|Bu_n - Bu\|_{L^2}^2 + \int_{-k}^k (V'(Au_n(s)) - V'(Au(s)))(Au_n(s) - Au(s)) ds + \\ &+ \int_{-k}^k (V'(Bu_n(s)) - V'(Bu(s)))(Bu_n(s) - Bu(s)) ds. \end{aligned}$$

Очевидно, що всі доданки в правій частині збігаються до нуля. Перший через слабку збіжність, а наступні два згідно з сильною збіжністю в $L^2(-k; k)$. За лемою 1, (Au_n)

є обмеженою в $L^\infty(-k, k)$. А оскільки $Au_n \rightarrow Au$ сильно в $L^2(-k, k)$ при $n \rightarrow +\infty$, то останні два інтеграли також збігаються до нуля. Отже, $\|u_n - u\|_k \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), що й доводить лему. $\square$

Доведення теореми 1. Розглянемо випадок (а). Леми 4 та 5 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал, а отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$. За лемою 3, u — C^2 -розв'язок задачі (2), (3). Залишається тільки перевірити виконання нерівності $J_k(Pu) \leq J(u)$ для всіх $u \in E_k$.

Оскільки

$$\begin{aligned} (APu)(s) &= \int_s^{s+\cos \varphi} (Pu)'(t)dt = \int_s^{s+\cos \varphi} |u'(t)|dt \geq \left| \int_s^{s+\cos \varphi} u'(t)dt \right|, \\ (BPu)(s) &= \int_s^{s+\sin \varphi} (Pu)'(t)dt = \int_s^{s+\sin \varphi} |u'(t)|dt \geq \left| \int_s^{s+\sin \varphi} u'(t)dt \right|, \end{aligned}$$

то

$$((APu)(s)) \geq |(Au(s))| \geq (Au)(s), \quad ((BPu)(s)) \geq |(Bu(s))| \geq (Bu)(s).$$

Модифікований потенціал $V(r)$ є неспадним на $\mathbb{R}$, тому

$$\begin{aligned} J_k(Pu) &= \int_{-k}^k [c^2 |(Pu)'(s)|^2 - c_0^2 ((APu(s))^2 + (BPu(s))^2) - V(APu(s)) - V(BPu(s))] ds = \\ &= \int_{-k}^k [c^2 |u'(s)|^2 - c_0^2 ((APu(s))^2 + (BPu(s))^2) - V(APu(s)) - V(BPu(s))] ds \leq \\ &\leq \int_{-k}^k [c^2 |u'(s)|^2 - c_0^2 ((Au(s))^2 + (Bu(s))^2) - V(Au(s)) - V(Bu(s))] ds = J_k(u). \end{aligned}$$

За теоремою 3 існує нетривіальна критична точка $u_k \in PX_k$ функціоналу J_k така, що $J_k(u_k) \geq \delta$ з $\delta > 0$ з леми 4, і

$$J_k(u_k) \leq \max_{t \in [0,1]} J_k(te_k).$$

До того ж, $J_k(te_k) = J_1(te_1)$ і

$$J_k(u_k) \leq M := \max_{t \in [0,1]} J_1(te_1).$$

Випадок (b) розглядається подібно (із заміною P на $-P$). $\square$

Подано тепер версію теореми 1 для необов'язково монотонних хвиль.

Теорема 4. Нехай виконуються умови

(i'') $U(r) = \frac{a}{2}r^2 + V(r)$, де $V \in C^1(\mathbb{R})$, $V(0) = V'(0) = 0$ і $V'(r) = o(|r|)$ при $r \rightarrow 0$;

(ii') існують такі $r_0 \in \mathbb{R}$ і $\theta > 2$, що $V(r_0) > 0$ і $\theta V(r) \leq rV'(r)$, $r \in \mathbb{R}$.

І нехай $c^2 > \max\{a, 0\}$. Тоді для будь-якого $k \geq 1$ рівняння (2) має розв'язок u_k , що задовольняє умову (3). Більше того, відповідне критичне значення $J_k(u_k)$ задовольняє нерівності $0 < \delta \leq J_k(u_k) \leq M$, з $\delta > 0$ і $M > 0$, не залежать від k .

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 1. Достатньо використати теорему про гірський перевал і теорему 3.

За допомогою теореми про зачеплення встановимо існування нетривіальних періодичних біжучих хвиль з періодичним профілем. Для цього, за лемою 3, достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k . Відмітимо, що $u = 0$ завжди є тривіальною критичною точкою та дає тривіальну біжучу хвилю, яка тотожно дорівнює нулю.

Теорема 5. Нехай виконуються умови (i') , (ii^+) та (ii^-) . Тоді для будь-яких $k \geq 1$ і $c \in (0, c_0]$ рівняння (2) має розв'язок $u_k \in E_k$.

Сформулюємо теорему про зачеплення ([15], [16], [19]).

Нехай H — гільбертів простір, $H = Y \oplus Z$. Нехай також $\rho > r > 0$ і $z \in Z$: $\|z\| = r$. Позначимо

$$M := \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| \leq \rho, \lambda \geq 0\},$$

$$M_0 := \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| = \rho \text{ і } \lambda \geq 0, \text{ або } \|u\| \leq \rho \text{ і } \lambda = 0\},$$

тобто M_0 — межа M (∂M). Нехай $N := \{u \in Z : \|u\| = r\}$.

Розглянемо функціонал φ на H і припустимо, що

$$\beta := \inf_{u \in N} \varphi(u) > \alpha := \sup_{u \in M_0} \varphi(u).$$

У такому випадку говорять, що функціонал φ задовольняє геометрію зачеплення.

Теорема 6 (про зачеплення). Нехай φ — функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H , що задовольняє геометрію зачеплення та умову Пале–Смейла:

(PS) якщо послідовність $u_n \in H$ така, що $\varphi'(u_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) і $(\varphi(u_n))$ обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність.

Нехай

$$b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)),$$

де $\Gamma := \{\gamma \in C(M; H) : \gamma = \text{id на } M_0\}$. Тоді b — критичне значення φ і $\beta \leq b \leq \sup_{u \in M} \varphi(u)$.

Почнемо з умови Пале–Смейла.

Лема 6. За умов теореми 5 функціонал J_k задовольняє умову Пале–Смейла.

Доведення. Нехай $u_n \in E_k$ — послідовність Пале–Смейла на деякому рівні b (b — критичне значення функціоналу J_k). Виберемо $\beta \in (\theta^{-1}; 2^{-1})$. Тоді для достатньо великих n маємо

$$b + 1 + \beta \|u_n\|_k \geq J_k(u_n) - \beta \langle J'_k(u_n), u_n \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \int_{-k}^k (c^2 |u'_n(s)|^2 - c_0^2 |Au_n(s)|^2 - c_0^2 |Bu_n(s)|^2) ds + \\
&+ \int_{-k}^k (\beta(V'(Au_n(s))Au_n(s) + V'(Bu_n(s))Bu_n(s)) - V(Au_n(s)) - V(Bu_n(s))) ds \geq \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c^2 \|u_n\|_k^2 - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c_0^2 (\|Au_n\|_{L^2}^2 + \|Bu_n\|_{L^2}^2) + \\
&+ (\beta\theta - 1) \int_{-k}^k (V(Au_n(s)) + V(Bu_n(s))) ds \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c^2 \|u_n\|_k^2 - \\
&- \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c_0^2 (\|Au_n\|_{L^2}^2 + \|Bu_n\|_{L^2}^2) + C(\beta\theta - 1) (\|Au_n\|_{L^\theta}^\theta + \|Bu_n\|_{L^\theta}^\theta) - C_0.
\end{aligned}$$

Оскільки для $\theta > 2$ маємо

$$\|Au_n\|_{L^2}^2 + \|Bu_n\|_{L^2}^2 \leq C (\|Au_n\|_{L^\theta}^2 + \|Bu_n\|_{L^\theta}^2) \leq K(\varepsilon) + \varepsilon (\|Au_n\|_{L^\theta}^\theta + \|Bu_n\|_{L^\theta}^\theta),$$

де $K(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned}
b + 1 + \beta \|u_n\|_k &\geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c^2 \|u_n\|_k^2 - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c_0^2 K(\varepsilon) - \\
&- \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c_0^2 \varepsilon (\|Au_n\|_{L^\theta}^\theta + \|Bu_n\|_{L^\theta}^\theta) + C(\beta\theta - 1) (\|Au_n\|_{L^\theta}^\theta + \|Bu_n\|_{L^\theta}^\theta) - C_0.
\end{aligned}$$

Вибираючи ε достатньо малим, отримаємо

$$b + 1 + \beta \|u_n\|_k \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c^2 \|u_n\|_k^2 + C(\beta\theta - 1) (\|Au_n\|_{L^\theta}^\theta + \|Bu_n\|_{L^\theta}^\theta) - C_0.$$

Оскільки $\beta\theta - 1 > 0$, то

$$b + 1 + \beta \|u_n\|_k \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c^2 \|u_n\|_k^2 - C_0.$$

Остання нерівність і доводить обмеженість (u_n) . Аналогічно як і в доведенні лема 5, $\|u_n - u\|_k \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), що і доводить лему. $\square$

Далі нам знадобиться така, доведена в [8], лема.

Лема 7. Якщо V задовольняє (i') , (ii^+) , (ii^-) , то існують такі сталі $d > 0$ та $d_0 \geq 0$, що

$$V(r) \geq d|r|^\theta - d_0. \quad (6)$$

Лема 8. За умов теореми 5 функціонал J_k задовольняє геометрію зачеплення.

Доведення. Відзначимо спочатку, що простір E_k розпадається на ортогональну суму одновимірних підпросторів, породжених функцією $h_0(t) = t$, і простору $H_{k,0}^1$ всіх $2k$ -періодичних функцій з E_k з нульовим власним значенням.

Розглянемо оператор $(Lu)(s) := -c^2 u''(s) + c_0^2(Au(s) + Bu(s))$ з $2k$ -періодичними умовами. Оператор L є самоспряженим в $L^2(-k; k)$, обмеженим знизу та має дискретний спектр, який накопичується біля $+\infty$, тобто ліворуч від нуля власних чисел є скінченна кількість. Власні значення та власні функції можна обчислити. Нагадаємо, що всі власні значення λ_j з несталими власними функціями є подвійними. Позначимо через $h_j^\pm \in E_k$ лінійно незалежні пари власних функцій з власними значеннями λ_j .

Нехай Z — підпростір E_k , утворений функціями $h_j^\pm$ з $\lambda_j > 0$, і Y — підпростір E_k , утворений функціями $h_j^\pm$ з $\lambda_j \leq 0$ та функцією h_0 , тобто такі лінійні оболонки

$$Z = \text{Span}\{h_j^\pm : \lambda_j > 0\}, \quad Y = \text{Span}\{h_0, h_j^\pm : \lambda_j \leq 0\}.$$

Відмітимо, що $\dim Y < \infty$. Легко перевірити, що $Y \perp Z$ і $E_k = Y \oplus Z$.

Позначимо через Q_k квадратичну частину функціоналу J_k

$$Q_k(u) = \frac{1}{2} \int_{-k}^k (c^2 |u'|^2 - c_0^2 |Au|^2 - c_0^2 |Bu|^2) ds.$$

Легко бачити, що $Q_k(y + z) = Q_k(y) + Q_k(z)$, де $y \in Y, z \in Z$.

Зауважимо, що квадратична форма Q_k додатно визначена на Z , тобто $Q_k(u) \geq \alpha \|u\|_k^2$, з $\alpha > 0$. З умов (i') , (ii^+) , (ii^-) випливає, що для деякого $\varepsilon > 0$ існує таке $r_0 > 0$, що $|V(r)| \leq \varepsilon r^2$, при $|r| \leq r_0$. Тоді

$$J_k(u) \geq Q_k(u) - \varepsilon \int_{-k}^k |u|^2 ds \geq Q_k(u) - \varepsilon \|u\|_k^2 \geq \delta \|u\|_k^2,$$

де $\delta > 0$. Отже, $J_k(u) > 0$ на $N = \{u \in Z : \|u\|_k = r\}$ з достатньо малим $r > 0$.

Зафіксуємо $z \in Z, \|z\|_k = 1$ та множину $M = \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\|_k \leq \rho, \lambda \leq 0\}$. Доведемо, що $J_k(u) \leq 0$ на $M_0 = \partial M$ за умови, що ρ достатньо велике.

Нагадаємо, що $M_0 = \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\|_k = \rho \text{ і } \lambda \geq 0, \text{ або } \|u\|_k \leq \rho \text{ і } \lambda = 0\}$. Маємо

$$J_k(y + \lambda z) = Q_k(y) + \lambda^2 Q_k(z) - \int_{-k}^k [V(A(y + \lambda z)) + V(B(y + \lambda z))] ds.$$

За лемою 7 маємо, що існують такі сталі $d > 0$ і $d_0 \geq 0$, що правильна нерівність (6) $V(r) \geq d|r|^\theta - d_0$, де $\theta > 2$. Тоді, враховуючи, що $Q_k(y) \leq 0$

$$J_k(y + \lambda z) \leq \lambda^2 \gamma_0 + 4kd_0 - d(\|A(y + \lambda z)\|_{L^\theta}^\theta + \|B(y + \lambda z)\|_{L^\theta}^\theta) \leq \lambda^2 \gamma_0 + 4kd_0 - C\|y + \lambda z\|_{L^\theta}^\theta,$$

де $\gamma_0 = Q_k(z)$, $C > 0$. Оскільки $\rho^2 = \|y + \lambda z\|_k^2 = \|y\|_k^2 + \lambda^2$, то $\lambda^2 \leq \rho^2$. До того ж, у скінченновимірних просторах всі норми еквівалентні. Отже,

$$\|y + \lambda z\|_{L^\mu} \geq c\|y + \lambda z\|_k = c\rho, \quad J_k(y + \lambda z) \leq \gamma_0 \rho^2 + 4kd_0 - C\rho^\theta.$$

Оскільки $\theta > 2$, то права частина від'ємна, якщо ρ — достатньо велике. Тому, $J_k(y + \lambda z) \leq 0$. Якщо $u \in M_0, \|u\|_k \leq \rho$ і $\lambda = 0$, то $u = y \in Y$ і, очевидно, що $J_k(u) \leq 0$. Отже, функціонал J_k задовольняє геометрію зачеплення. $\square$

Доведення теореми 5. Лема 6 та лема 8 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про зачеплення. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$. За лемою 3, u — C^2 -розв'язок задачі (2), (3). $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Bak S.M. *Existence of periodic travelling waves in systems of nonlinear oscillators on 2D-lattice*// Mat. Stud. – 2011. – V.35, №1. – P. 60–65. (in Ukrainian)
2. Бак С.М., Баранова О.О., Білик Ю.П. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. – Вип. 4. – С. 18–24.
3. Bak S.M., Pankov A.A. *The travelling waves in systems of oscillators on 2Dlattice*// Ukr. Mat. Visn. – 2010. – V.7, №2. – P. 154–175. (in Ukrainian)
4. Вайнберг М.М., Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
5. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1956. – 392 с.
6. Reed M., Simon B., *Methods of modern mathematical physics*. Academic press, New York–San Fransisco, London, 1975.
7. Aubry S. *Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization*// Physica D. – 1997. – V.103. – P. 201–250.
8. Bak S.M. *Peridoc traveling waves in chains of oscillators*// Communications in Mathematical Analysis. – 2007. – V.3, №1. – P. 19–26.
9. Berestycki H., Capuzzo-Dolcetta I., Nirenberg L. *Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems*// Nonlin. Diff. Equat. Appl. – 1995. – V.2. – P. 553–572.
10. Braun O.M., Kivshar Y.S. *Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model*// Physics Repts. – 1998. – V.306. – P. 1–108.
11. Braun O.M., Kivshar Y.S., *The Frenkel–Kontorova model*. – Berlin: Springer, 2004. – 427 p.
12. Butt L., Wattis J. *Discrete breathers in a two-dimensional Fermi–Pasta–Ulam lattice*// J. Phys. A: Math. Gen. – 2006. – V.39. – P. 4955–4984.
13. Feckan M., Rothos V. *Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions*// Nonlinearity. – 2007. – V.20. – P. 319–341.
14. Friesecke G., Matthies K. *Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice*// Discrete and continuous dynamical systems. – 2003. – V.3, №1. – P. 105–114.
15. Pankov A., *Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi–Pasta–Ulam Lattices*. – London – Singapore: Imperial College Press, 2005. – 196 p.
16. Rabinowitz P., *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. – Providence, R. I.: American Math. Soc. – 1986. – 100 p.
17. Srikanth P. *On periodic motions of two-dimentional lattices*// Functional analysis with current applications in science, technology and industry. – 1998. – V.377. – P. 118–122.
18. Tang C., Guo B. *Multiple periodic solutions for two-dimensional lattice dynamic systems*// Nonlin. Analysis. – 2006. – V.65. – P. 1306–1317.
19. Willem M., *Minimax theorems*. – Boston, Birkhäuser, 1996. – 162 p.

Вінницький державний педагогічний
університет ім. М. Коцюбинського
Sergiy.Bak@gmail.com

Надійшло 29.09.2011
Після переробки 27.12.2011