УДК 512.552.12

І. С. Васюник

УМОВИ, КОЛИ АБЕЛЕВЕ ЧИСТЕ КІЛЬЦЕ БЕЗУ Є КІЛЬЦЕМ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

I. S. Vasyunyk. *Conditions when abelian clean Bezout ring is an elementary divisors ring*, Mat. Stud. **37** (2012), 106–108.

In the paper it is proved that the abelian clean Bezout ring is an elementary divisors ring, if and only if it is a duo-ring and shows that the projective-free right (left) Bezout ring is right (left) Hermite ring if his stable rank not more 2.

И. С. Васюнык. *Условия, когда абелево чистое кольцо Безу является кольцом элементарных делителей* // Мат. Студії. – 2012. – Т.37, №1. – С.106–108.

Доказано, что абелево чистое кольцо Безу является кольцом элементарных делителей, тогда и только тогда, когда оно является дуо-кольцом, а также доказано, что проективно-свободное правое (левое) кольцо Безу является правым (левым) кольцом Эрмита, если его стабильный ранг не превышает 2.

У даній статті під кільцем R розуміємо асоціативне кільце з одиницею, при цьому вважаємо, що $1 \neq 0$.

Якщо в кільці R довільний ідемпотент є центральним, то тоді кільце R називається *абелевим кільцем.* Під *чистим кільцем* розумітимемо кільце R в якому довільний елемент зображається у вигляді суми ідемпотента та оборотного елемента ([2]). *Правим (лівим) кільцем Безу* називається кільце, в якому довільний скінченнопороджений правий (лівий) ідеал є головним правим (лівим) ідеалом. *Кільцем Безу* називається кільце, яке є як правим, так і лівим кільцем Безу ([2]). Скажемо, що матриця A над кільцем R *еквівалентна* до матриці B над R, якщо існують оборотні матриці P і Q відповідних розмірів такі, що $PAQ = B$. Вслід за Капланським ([3]), кільце R називаємо *кільцем елементариних дільників,* якщо довільна матриця A еквівалентна до діагональної матриці відповідних розмірів $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r, 0, ...)$, де $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq \varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i$, $i = 1, ..., r-1$.

Нагадаємо, що кільце R є *правим (лівим) дистрибутивним,* якщо гратка правих (лівих) ідеалів є дистрибутивною. *Дистрибутивне кільце* — кільце, яке є правим і лівим дистрибутивним кільцем ([2]). Скажемо, що кільце R є *правим (лівим) дуо-кільцем,* якщо довільний правий (лівий) ідеал кільця R є двобічним. *Дуо-кільце* — кільце, яке, як правим, так і лівим дуо-кільцем. Кільце R називається *одинично-регулярним,* якщо для довільного елемента $x \in R$ існує оборотний елемент $u \in R$ такий, що $xux = x$ ([4]). Скажемо, що кільце R є *кільцем стабільного рангу* 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ існує елемент $x \in R$ такий, що $a + bx$ — оборотний

2010 *Mathematics Subject Classification:* 19B10.
Keywords: Bezout ring, Hermite ring, stable rank.

елемент R. Кільце R називається *кільцем стабільного рангу* 2, якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$ виконується $(a + cx)R + (b + cy)R = R$ для деяких елементів $x, y \in R$ ([5]). Нагадаємо, що кільце називається *проективно-вільним,* якщо довільний скінченно-породжений проективний R-модуль є вільним ([8]).

Зауважимо, що одинично-регулярне кільце є кільцем стабільного рангу 1 ([4]).

Скажемо, що кільце R є *кільцем ідемпотентного стабільного рангу* 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ існує ідемпотент $e \in R$ такий, що $a + be$ — оборотний елемент R ([1, 6]). Зауважимо, що абелеве кільце є чистим, тоді і тільки тоді, коли воно є кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1 ([6]).

Зауважимо, що одинично-регулярне абелеве кільце є чистим. Хенріксен довів, що над одинично-регулярним кільцем довільна матриця еквівалентна до діагональної матриці ([4]). У випадку абелево-чистих кілець Безу отримуємо аналогічні твердження. Спочатку доведемо такий результат.

Теорема 1. *Абелеве чисте кільце Безу є дистрибутивним кільцем.*

Доведення. Нехай R — абелеве чисте кільце Безу. Згідно з [6], R є кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1. Нехай a, b — довільні елементи з R такі, що $aR + bR = R$. З умов, накладених на R, випливає, що існує ідемпотент $e \in R$ такий, що

$$a + be = u, \tag{1}$$

де u — оборотний елемент кільця R. Оскільки всі ідемпотенти кільця R належать до центру, то з (1) випливає, що $a + be = u$. Звідси $Ra + Rb = R$. Зауважимо, що визначення ідемпотентного стабільного рангу 1 є ліво-право симетричним ([6]), а отже аналогічно, як і вище показано, що з умови $Ra + Rb = R$ випливає, що $aR + bR = R$ для елементів $a, b \in R$. Оскільки R — кільце Безу, то з встановленого в [7] випливає, що R — дистрибутивне кільце. □

Як наслідок отримаємо такий результат.

Теорема 2. *Абелеве чисте кільце Безу є кільцем елементарних дільників, тоді і тільки тоді, коли R є дуо-кільцем.*

Доведення. За теоремою 1, абелеве чисте кільце Безу є дистрибутивним кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1. Це (див. [1, 7]) завершує доведення. □

Наступна теорема дає відповідь на питання, коли праве кільце Безу стабільного рангу 2 є правим кільцем Ерміта у випадку проективно-вільного кільця.

Теорема 3. *Проективно-вільне праве (ліве) кільце Безу є правим (лівим) кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли його стабільний ранг не більший від 2.*

Доведення. Оскільки стабільний ранг правого(лівого) кільця Безу не перевищує 2 ([5]), то достатність теореми очевидна.

Доведемо необхідність. Нехай R — праве кільце Безу. Покажемо, що для довільних елементів $a, b \in R$ існує елемент $d \in R$ і оборотна матриця $P \in GL_2(R)$ такі, що $(a, b)P = (d, 0)$. Справді, оскільки $a, b \in R$, то $aR + bR = cR$ для довільного елемента $c \in R$. Звідси $au + bv = c, a = ca_0, b = cb_0$ для деяких елементів $u, v, a_0, b_0 \in R$. Звідки $ca_0u + cb_0v = c$ і $c(1 - a_0u - b_0v) = 0, a_0u + b_0v + k = 1$, де $k = 1 - a_0u - b_0v, ck = 0$. Оскільки стабільний ранг R не більший від 2, тоді існують $x, y \in R$ такі що $(a_0 + kx)R + (b_0 + ky)R = R$, тобто $(a_0 + kx)\alpha + (b_0 + ky)\beta = 1$ для деяких $\alpha, \beta \in R$. Зауважимо, що $c(a_0 + kx) = a$, $c(b_0 + ky) = b$. Згідно з [9] унімодулярний рядок $(a_0 + kx, b_0 + ky)$ можна доповнити до оборотної матриці P. Звідси $(c, 0)P = (a, b)$, а отже $(a, b)P^{-1} = (c, 0)$, що й потрібно було довести. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. W.K. Nicholson, *Lifting idempotent and exchange rings*, Trans. Amer. Math. Soc., **229** (1977), 269–278.
2. B.V. Zabavskii, N.Ya. Komarnitskii, *Distributive elementary divisor domains*, Ukr. Mat. Zh., **42** (1990), №7, 1000–1004. (in Russian)
3. I. Kaplansky, *Elementary divisors and modules*, Trans. Amer. Math. Soc., **66** (1949), 464–491.
4. M. Henriksen, *On a class of regular rings that are elementary divisor rings*, Arch. Math., **24** (1973), №2, 133–141.
5. B.V. Zabavsky, *Diagonalization of matrices over ring with finite stable range*, Visn. L'viv Univ. Ser. Mekh.-Mat., **61** (2003), 206–210.
6. H. Chen, *Rings with many idempotents*, Internat. J. Math., **22** (1999), №3, 547–558.
7. A.A. Tuganbaev, *Rings of elementary divisors and distributive rings*, Russian Mathematical Surveys, **46** (1991), №6, 230–231.
8. P.M. Cohn, *Some remarks on projective-free rings*, Algebra univers., **49** (2009), 159–164.
9. G. Song, X. Guo, *Diagonability of idempotent matrices over noncomutative rings*, Linear Algebra and its Appl., **297** (1999), 1–7.

Львівський національний університет імені І. Франка
механіко-математичний факультет
mandaruna87@mail.ru

Надійшло 29.09.2011