УДК 519.61

С. М. Шахно, Г. П. Ярмола

ДВОТОЧКОВИЙ МЕТОД ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНИМ ОПЕРАТОРОМ

S. M. Shakhno, H. P. Yarmola. *Two-point method for solving nonlinear equation with nondifferentiable operator*, Mat. Stud. **36** (2011), 213–220.

In the paper we study a combined differential-difference method for solving nonlinear equations with non-differentiable operator. The semilocal convergence of the method is investigated and the order of convergence is established.

С. М. Шахно, Г. П. Ярмола. *Двухточечный метод для решения нелинейных уравнений с недифференцируемым оператором* // Мат. Студії. – 2011. – Т.36, №2. – С.213–220.

В работе предлагается комбинированный дифференциально-разностный метод для решения нелинейных уравнений с недифференцируемым оператором. Изучена полулокальная сходимость метода и установлен порядок сходимости.

1. Вступ. Розглянемо задачу знаходження наближеного розв'язку нелінійного операторного рівняння

$$H(x) = F(x) + G(x) = 0, \tag{1}$$

де оператори F і G визначені на опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. F — диференційовний за Фреше оператор, G — недиференційовний, але неперервний оператор. Для розв'язування (1) класичний метод Ньютона незастосовний, як і інші методи, що використовують в ітераційних формулах аналітично задані похідні.

Нехай x_{-1}, $x_0 \in D$. Для наближеного знаходження розв'язку x^* рівняння (1) часто застосовують двоточковий метод

$$x_{n+1} = x_n - A_n^{-1}(F(x_n) + G(x_n)), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

де $A_n = A(x_{n-1}, x_n)$ — лінійний обмежений оператор. При $A_n = H(x_{n-1}; x_n)$ отримаємо метод хорд ($H(x_{n-1}; x_n)$ — поділена різниця першого порядку). Цей метод і його модифікації для розв'язування рівняння вигляду (1) досліджено у працях [5, 9]. Поклавши $A_n = F'(x_n) + G(x_{n-1}; x_n)$, отримаємо комбінований метод Ньютона і хорд [6, 7], а у випадку $A_n = F(2x_n - x_{n-1}; x_{n-1}) + G(x_{n-1}; x_n)$ — комбінацію методів лінійної інтерполяції (запропонований В. А. Курчатовим [1]) і хорд [10]. Також у працях [6, 7] розглянуто метод (2) при $A_n = F'(x_n)$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 65H05, 65H10, 65J15, 65L10.
Keywords: nonlinear equation, differential-difference method, semilocal convergence, non-differentiable operator.

У цій статті розглянуто метод, побудований на базі методів Ньютона [2, 3, 12] і Курчатова [1, 4], які мають квадратичний порядок збіжності для розв'язування рівняння (1) з диференційовним оператором,

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n) + G(2x_n - x_{n-1}; x_{n-1})]^{-1}(F(x_n) + G(x_n)), \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{3}$$

Мета нашої праці — вивчити напівлокальну збіжність запропонованого методу, провести числове дослідження та порівняти отримані результати, здійснити перевірку виконання умов теореми.

2. Аналіз збіжності. Нехай $\mathcal{L}(X, Y)$ — простір лінійних обмежених операторів з X в Y.

Означення. Оператор $G(x; y) \in \mathcal{L}(X, Y)$ називається *поділеною різницею першого порядку оператора G за точками x і y*, якщо він задовольняє умову

$$G(x; y)(x - y) = G(x) - G(y).$$

Теорема. *Нехай F і G — нелінійні оператори, які діють з відкритої опуклої множини D банахового простору X в простір Y, F — диференційовний за Фреше оператор, G — недиференційовний, але неперервний оператор. Нехай $G(\cdot;\cdot)$ — поділені різниці першого порядку оператора G, визначені на множині $U_1 = \{x : \|x - x_0\| \le 3r_0\}$. Припустимо, що лінійний оператор $A_0 = F'(x_0) + G(2x_0 - x_{-1}; x_{-1})$, де $x_{-1}, x_0 \in U_0 = \{x : \|x - x_0\| \le r_0\}$, є оборотний і виконуються умови*

$$\|A_0^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \le 2p_0\|x - y\|, \tag{4}$$
$$\|A_0^{-1}(G(x; y) - G(u; v))\| \le q_0(\|x - u\| + \|y - v\|). \tag{5}$$

Нехай a, c, r_0 — невід'ємні числа, такі що

$$\|x_0 - x_{-1}\| \le a, \ \|A_0^{-1}(F(x_0) + G(x_0))\| \le c, \ c > a, \tag{6}$$
$$r_0 \ge c/(1 - \gamma), \ 2q_0a + 2p_0r_0 + 4q_0r_0 < 1, \tag{7}$$
$$\gamma = \frac{p_0r_0 + 2q_0(r_0 + a)}{1 - 2q_0a - 2p_0r_0 - 4q_0r_0}, \ 0 \le \gamma < 1.$$

Нехай замкнена куля U_0 міститься в D. Тоді для всіх $n \in \{-1, 0, 1, 2, ...\}$ правильні нерівності

$$\|x_n - x_{n+1}\| \le t_n - t_{n+1}, \tag{8}$$
$$\|x_n - x^*\| \le t_n - t^*, \tag{9}$$

де

$$t_{-1} = r_0 + a, \quad t_0 = r_0, \ t_1 = r_0 - c,$$
$$t_{n+1} - t_{n+2} = \frac{p_0(t_n - t_{n+1}) + q_0(2t_{n-1} - t_{n+1} - t_n)}{1 - 2q_0a - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - 2q_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})}(t_n - t_{n+1}), \ n \ge 0 \tag{10}$$

$\{t_n\}_{n\ge0}$ — спадна невід'ємна послідовність, яка збігається до t^*, $r_0 - c/(1 - \gamma) \le t^* < t_0$; ітераційний процес (3) є добре визначений і генерована ним послідовність збігається до розв'язку x^* рівняння $H(x) = 0$.

Доведення. Доведення проводиться за схемою запропонованою у [11]. Методом математичної індукції покажемо, що для всіх $k \geq 0$ виконується

$$t_{k+1} \geq t_{k+2} \geq r_0 - \frac{c}{1-\gamma} \geq 0, \tag{11}$$

$$t_{k+1} - t_{k+2} \leq \gamma(t_k - t_{k+1}). \tag{12}$$

З (10) для $k = 0$ отримаємо

$$t_1 - t_2 = \frac{p_0(t_0 - t_1) + q_0(2t_{-1} - t_1 - t_0)}{1 - 2q_0 a - 2p_0(t_0 - t_1) - 2q_0(2t_0 - t_0 - t_1)}(t_0 - t_1) \leq \gamma(t_0 - t_1),$$

$$t_0 \geq t_1, \quad t_1 \geq t_2 \geq t_1 - \gamma(t_0 - t_1) \geq r_0 - (1+\gamma)c = r_0 - \frac{(1-\gamma^2)c}{1-\gamma} \geq r_0 - \frac{c}{1-\gamma} \geq 0.$$

Припустимо, що (11) і (12) виконуються для $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тоді для $k = n$ отримаємо

$$t_{n+1} - t_{n+2} = \frac{p_0(t_n - t_{n+1}) + q_0(2t_{n-1} - t_{n+1} - t_n)}{1 - 2q_0 a - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - 2q_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})}(t_n - t_{n+1}) \leq$$
$$\leq \frac{p_0 t_n + 2q_0 t_{n-1}}{1 - 2q_0 a - 2p_0 t_0 - 4q_0 t_0}(t_n - t_{n+1}) \leq \gamma(t_n - t_{n+1}),$$
$$t_{n+1} \geq t_{n+2} \geq t_{n+1} - \gamma(t_n - t_{n+1}) \geq r_0 - \frac{1-\gamma^{n+2}}{1-\gamma}c \geq r_0 - \frac{c}{1-\gamma} \geq 0.$$

Отже, ми довели, що $\{t_n\}_{n\geq 0}$ — спадна, невід'ємна послідовність і збігається до $t^* \geq 0$.

Якщо $x, y \in U_0$, то

$$\|2x - y - x_0\| = \|2x - y - x_0 + x_0 - x_0\| \leq 2\|x - x_0\| + \|y - x_0\| \leq 3r_0.$$

Тому поділені різниці першого порядку оператора $G(\cdot;\cdot)$ визначені на множині U_1.

Методом математичної індукції доведемо, що ітераційний процес (3) є коректно визначений і для всіх n виконується нерівність (8).

Враховуючи (6) і те, що $t_{-1} - t_0 = a$, $t_0 - t_1 = c$, ми отримаємо, що $x_1 \in U_0$ і (8) виконується для $n \in \{-1, 0\}$.

Позначимо $A_n = F'(x_n) + G(2x_n - x_{n-1}; x_{n-1})$. Використовуючи умови Ліпшиця (4) і (5), матимемо

$$\|I - A_0^{-1}A_{n+1}\| = \|A_0^{-1}[A_0 - A_{n+1}]\| \leq \|A_0^{-1}[F'(x_0) - F'(x_{n+1})]\| +$$
$$+ \|A_0^{-1}[G(2x_0 - x_{-1}; x_{-1}) - G(2x_{n+1} - x_0; x_0) + G(2x_{n+1} - x_0; x_0) - G(2x_{n+1} - x_n; x_n)]\| \leq$$
$$\leq 2p_0\|x_0 - x_{n+1}\| + q_0(\|2x_0 - 2x_{n+1} + x_0 - x_{-1}\| + \|x_0 - x_{-1}\| + 2\|x_0 - x_n\|) \leq$$
$$\leq 2p_0\|x_0 - x_{n+1}\| + 2q_0(\|x_0 - x_{n+1}\| + \|x_0 - x_n\| + \|x_0 - x_{-1}\|) \leq$$
$$\leq 2q_0 a + 2p_0(t_0 - t_{n+1}) + 2q_0(2t_0 - t_{n+1} - t_n) \leq 2q_0 a + (2p_0 + 4q_0)r_0 < 1.$$

За теоремою Банаха про обернений оператор маємо, що A_{n+1} є оборотний і

$$\|A_{n+1}^{-1}A_0\| \leq (1 - 2q_0 a - 2p_0\|x_0 - x_{n+1}\| + 2q_0(\|x_0 - x_{n+1}\| + \|x_0 - x_n\|))^{-1}.$$

Доведемо, що ітераційний процес (3) є добре визначений для $k = n+1$. Враховуючи означення поділеної різниці і умови (4), (5), отримаємо

$$\begin{gathered}
\|A_0^{-1}(F(x_{n+1}) + G(x_{n+1}))\| = \\
= \|A_0^{-1}\left[F(x_{n+1}) + G(x_{n+1}) - F(x_n) - G(x_n) - A_n(x_n - x_{n+1})\right]\| \leq \\
\leq \left\|A_0^{-1}\Big[\int\limits_0^1 \{F'(x_{n+1} + t(x_n - x_{n+1})) - F'(x_n)\}dt\Big]\right\| \|x_n - x_{n+1}\| + \\
+ \left\|A_0^{-1}\left[G(x_{n+1}; x_n) - G(2x_n - x_{n-1}; x_{n-1})\right]\right\| \|x_n - x_{n+1}\| \leq \\
\leq (p_0\|x_n - x_{n+1}\| + q_0(\|x_n - x_{n+1}\| + 2\|x_{n-1} - x_n\|))\|x_n - x_{n+1}\|.
\end{gathered}$$

Звідси, врахувавши умову (8), маємо

$$\begin{gathered}
\|x_{n+1} - x_{n+2}\| = \|A_{n+1}^{-1}(F(x_{n+1}) + G(x_{n+1}))\| \leq \\
\leq \|A_{n+1}^{-1}A_0\|\|A_0^{-1}(F(x_{n+1}) + G(x_{n+1}))\| \leq \\
\leq \frac{p_0\|x_n - x_{n+1}\| + q_0(\|x_n - x_{n+1}\| + 2\|x_{n-1} - x_n\|)}{1 - 2q_0a - 2p_0\|x_0 - x_{n+1}\| - 2q_0(\|x_0 - x_{n+1}\| + \|x_0 - x_n\|)}\|x_n - x_{n+1}\| \leq \\
\leq \frac{p_0(t_n - t_{n+1}) + q_0(2t_{n-1} - t_{n+1} - t_n)}{1 - 2q_0a - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - 2q_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})}(t_n - t_{n+1}) = t_{n+1} - t_{n+2}.
\end{gathered}$$

Отже, ітераційний процес (3) добре визначений для всіх n. Звідси випливає, що

$$\|x_n - x_k\| \leq t_n - t_k, \quad -1 \leq n \leq k, \tag{13}$$

тобто послідовність $\{x_n\}_{n\geq 0}$ є фундаментальною і збіжною в просторі X. З (13) при $k \to \infty$ випливає нерівність (9). Покажемо, що x^* є коренем рівняння (1). Справді

$$\begin{gathered}
\|A_0^{-1}H(x_{n+1})\| = \|A_0^{-1}(F(x_{n+1}; x_n) + G(x_{n+1}; x_n) - A_n)(x_{n+1} - x_n)\| \leq \\
\leq (p_0\|x_n - x_{n+1}\| + q_0(\|x_n - x_{n+1}\| + 2\|x_{n-1} - x_n\|))\|x_n - x_{n+1}\| \to 0, \quad \text{при } n \to \infty.
\end{gathered}$$

Отже, $H(x^*) = 0$. □

Наслідок. *Порядок збіжності методу (3) дорівнює* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Доведення. З (10), врахувавши, що $t_n - t_{n+1} < t_{n-1} - t_n$, отримаємо

$$\begin{gathered}
t_{n+1} - t_{n+2} = \frac{p_0(t_n - t_{n+1}) + q_0(t_n - t_{n+1} + 2(t_{n-1} - t_n))}{1 - 2q_0a - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - 2q_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})}(t_n - t_{n+1}) < \\
< \frac{p_0(t_{n-1} - t_n) + 3q_0(t_{n-1} - t_n)}{1 - 2q_0a - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - 2q_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})}(t_n - t_{n+1}) = \\
= \frac{p_0 + 3q_0}{1 - 2q_0a - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - 2q_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})}(t_{n-1} - t_n)(t_n - t_{n+1}) \leq \\
\leq \frac{p_0 + 3q_0}{1 - 2q_0a - 2p_0t_0 - 4q_0t_0}(t_{n-1} - t_n)(t_n - t_{n+1}).
\end{gathered}$$

Звідси випливає, що порядок збіжності послідовності $\{t_n\}_{n\geq 0}$ дорівнює $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ і, згідно з (9), послідовність $\{x_n\}_{n\geq 0}$ збігається з тим же порядком. □

3. Числові результати і коментарі. Наведемо деякі приклади застосування розглянутого методу до тестових завдань.

Приклад 1 ([6, 7, 9]).

$$\begin{cases} 3x^2y - y^2 - 1 + |x-1| = 0, \\ x^4 + xy^3 - 1 + |y| = 0, \end{cases}$$

$$(x^*; y^*) \approx (0.8946553733346867; 0.3278265217462975).$$

Приклад 2 ([8]). $e^{x-0.5} - 1.05 + 0.2x|x-1| = 0,\ x^* = 0.5.$

Приклад 3 ([8]).

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a^1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a^2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2|u| = f(x,y), \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \tag{14}$$

де $D = (0,1)\times(0,1),\ a^1(x,y) = x(1-y),\ a^2(x,y) = y(1-x),$

$$f(x,y) = (1-x)^2 + (1-y)^2 + 2|(x-1)(y-1) - 0.5|,$$
$$u(t,0) = u(0,t) = 0.5 - t,\ u(t,1) = u(1,t) = -0.5,\ 0 \le t \le 1.$$

Розв'язок крайової задачі — $u^*(x,y) = (x-1)(y-1) - 0.5.$

Нехай $H : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, тобто $F(x) = (F_1(x),\dots,F_m(x))^T$, $G(x) = (G_1(x),\dots,G_m(x))^T$, $x = (x^1,\dots,x^m)^T$. В цьому випадку $G(x;y)$ — це матриця розмірності $m \times m$, елементи якої обчислюються за формулою

$$G(x;y)_{i,j} = \frac{G_i(x^1,\dots,x^j,y^{j+1},\dots,y^m) - G_i(x^1,\dots,x^{j-1},y^j,\dots,y^m)}{x^j - y^j}, \quad i,j = \overline{1,m}.$$

Зупинка обчислювального процесу відбувалася при виконанні умов $\|H(x_{n+1})\|_\infty \le \varepsilon$ і $\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \le \varepsilon$, де $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} |x^i|$. Розрахунки проводилися при $\varepsilon = 10^{-5}$, $\varepsilon = 10^{-10}$, $\varepsilon = 10^{-15}$. Початкове наближення x_{-1} обирали за правилом $x^i_{-1} = x^i_0 - 10^{-4}$, $i = \overline{1,m}$.

У наступних таблицях подано результати, отримані методом (2) для

а) $A_n = F'(x_n) + G(2x_n - x_{n-1}; x_{n-1})$, б) $A_n = H(2x_n - x_{n-1}; x_{n-1})$,
в) $A_n = F'(x_n)$, г) $A_n = F'(x_n) + G(x_{n-1}; x_n)$,
д) $A_n = H(x_{n-1}; x_n)$, е) $A_n = F(2x_n - x_{n-1}; x_{n-1}) + G(x_{n-1}; x_n)$.

У табл. 1 вказано кількість ітерацій, потрібних для знаходження наближеного розв'язку системи із прикладу 1. Як бачимо, метод (2) при $A_n = F'(x_n)$ збігається найповільніше. Кращі результати отримано при застосуванні диференціально-різницевих методів і методу лінійної інтерполяції. У табл. 2 подано значення норми різниці наближення, отриманого на n-ій ітерації, та x^* для методу (2) з A_n у випадках а) і г).

Для рівняння з прикладу 2 здійснимо перевірку виконання умов теореми. Для цього задамо початкові наближення x_0, x_{-1} і r_0, обчислимо константи потрібні для побудови послідовності $\{t_n\}$ та перевіримо виконання умови (8). Виділимо диференційовну і недиференційовну частини цього рівняння: $F(x) = e^{x-0.5} - 1.05$, $G(x) = 0.2x|x-1|$. Оскільки $x^* = 0.5$, то розглянемо випадок, коли $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Тоді

$$F'(x) = e^{x-0.5},\ G(x,y) = \frac{0.2x(1-x) - 0.2y(1-y)}{x-y} = 0.2(1-x-y).$$

Табл. 1: Результати обчислень для прикладу 1 при $x_0 = (1,0)d$, $x_{-1} = x_0 - 10^{-4}$

d	ε	**Кількість ітерацій**					
		а)	**б)**	**в)**	**г)**	**д)**	**е)**
1	10^{-5}	5	6	11	6	6	7
	10^{-15}	7	8	33	8	9	9
10	10^{-5}	13	15	20	13	17	14
	10^{-15}	14	16	41	15	20	16
100	10^{-5}	21	23	27	21	29	23
	10^{-15}	22	25	49	23	31	26

Табл. 2: Значення $\|x_n - x^*\|$ на кожній ітерації при $x_0 = (1,0)$, $\varepsilon = 10^{-10}$

n	**а)**	**г)**
0	$3.278265217462975 \times 10^{-1}$	$3.278265217462975 \times 10^{-1}$
1	$1.05344626665313 \times 10^{-1}$	$1.962537175744041 \times 10^{-1}$
2	$2.958276953888389 \times 10^{-2}$	$4.037959637211380 \times 10^{-2}$
3	$5.449150135182768 \times 10^{-4}$	$1.918922806293871 \times 10^{-2}$
4	$1.906964743336737 \times 10^{-7}$	$2.029551283010411 \times 10^{-4}$
5	$2.08721928629529 \times 10^{-14}$	$8.840746179572534 \times 10^{-8}$
6		$1.654232306691483 \times 10^{-14}$

Оскільки $\|x\| = |x|$, $\|A_0^{-1}\| = \dfrac{1}{|A_0|}$ і

$$|(F'(x) - F'(y))| = |e^{x-0.5} - e^{y-0.5}| = e^{-0.5}|e^x - e^y| \leq e^{0.5}|x-y|,$$
$$|G(x,y) - G(u,v)| = |0.2(1-x-y) - 0.2(1-u-v)| \leq 0.2(|x-u| + |y-v|),$$

то

$$|A_0^{-1}(F'(x) - F'(y))| \leq |A_0^{-1}||F'(x) - F'(y)| \leq \frac{e^{0.5}}{|A_0|}|x-y|,$$
$$|A_0^{-1}(G(x,y) - G(u,v))| \leq |A_0^{-1}||G(x,y) - G(u,v)| \leq \frac{1}{5|A_0|}(|x-u| + |y-v|).$$

Отже, $p_0 = \dfrac{e^{0.5}}{2|A_0|}$ і $q_0 = \dfrac{1}{5|A_0|}$.

Нехай $x_0 = 0.47$, $x_{-1} = 0.47 - 10^{-4} = 0.4699$. Тоді $\dfrac{1}{|A_0|} = 1.01786813$, $p_0 = 0.83909042$, $q_0 = 0.20357363$, $a = 0.0001$, $c = 0.03026577$. Поклавши $t_0 = 0.1$, $t_{-1} = t_0 + a$, $t_1 = t_0 - c$ та обчисливши t_{n+2}, $n \geq 0$ з формули (10), отримаємо

$$t_{-1} = 0.10010000000000, \quad t_0 = 0.10000000000000, \quad t_1 = 0.06973423417775,$$
$$t_2 = 0.06871343609630, \quad t_3 = 0.06869862095491, \quad t_4 = 0.06869861402799, \ldots$$
$$t_* \approx 0.06869861402794, \quad 0.06370742724615 < t^* < 0.1, \quad \gamma = 0.16606171660725.$$

Розв'язок x^* отримується за 4 ітерації при $\varepsilon = 10^{-15}$.

Табл. 3: Значення наближення до розв'язку рівняння та похибки на кожній ітерації

n	x_n	$\lvert x_{n-1}-x_n\rvert$	$t_{n-1}-t_n$
0	0.47000000	10^{-4}	10^{-4}
1	0.50026577	3.02657658×10^{-2}	3.02657658×10^{-2}
2	0.50000002	2.65744630×10^{-4}	1.02079808×10^{-3}
3	0.50000000	2.11923192×10^{-8}	1.48151414×10^{-5}
4	0.50000000	10^{-16}	6.92691324×10^{-9}

Як бачимо з табл. 3, для заданих початкових даних умови теореми задовольняються і виконується оцінка (8). Отже, ітераційний процес (3) є добре визначений і збігається до розв'язку $x^* \in U_0$.

Для розв'язання крайової задачі з прикладу 3 дискретизуємо еліптичне рівняння (14). Введемо сітку

$$\omega = \left\{ (x_i, y_j) : x_i = ih_1, h_1 = \frac{1}{l+1}, i = \overline{0, l+1}; y_j = jh_2, h_2 = \frac{1}{m+1}, j = \overline{0, m+1} \right\}.$$

Позначимо $v_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$, $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$, $a^1_{i\pm\frac{1}{2},j} = a^1(x_i \pm \frac{1}{2}h_1, y_j)$, $a^2_{i,j\pm\frac{1}{2}} = a^2(x_i, y_j \pm \frac{1}{2}h_2)$. Після дискретизації рівняння (14) отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{gathered} -\frac{a^1_{i-\frac{1}{2},j} v_{i-1,j} - \left(a^1_{i-\frac{1}{2},j} + a^1_{i+\frac{1}{2},j}\right) v_{i,j} + a^1_{i+\frac{1}{2},j} v_{i+1,j}}{h_1^2} - \\ -\frac{a^2_{i,j-\frac{1}{2}} v_{i,j-1} - \left(a^2_{i,j-\frac{1}{2}} + a^2_{i,j+\frac{1}{2}}\right) v_{i,j} + a^2_{i,j+\frac{1}{2}} v_{i,j+1}}{h_2^2} + 2|v_{i,j}| - f_{i,j} = 0, \\ i = \overline{1, l}, \quad j = \overline{1, m}. \end{gathered} \tag{15}$$

Система (15) записується у вигляді $H(x) = Ax + g(x) = 0$, де $x = (x_1, x_2, ..., x_{lm})$, $x_{(j-1)l+i} = v_{i,j}$, $g = (g_1, g_2, ..., g_{lm})$, $g_{(j-1)l+i} = 2(h_1 h_2)^2 |v_{i,j}| - (h_1 h_2)^2 f_{i,j}$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, l}$.

Початкове наближення $x_i^0 = 30(-1)^i$, $\quad i = \overline{1, lm}$. Наближений розв'язок задачі при $l = m = 11$, $\varepsilon = 10^{-5}$ отримується за 6 ітерацій, $\max\limits_{i,j} |v_{i,j} - u^*_{i,j}| = 2.463622 \times 10^{-7}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kurchatov V.A. *On one method of linear interpolation for solving functional equations* // Dokl. AN SSSR. Ser. Mathematics. Physics. – 1971. – V.198.– №3. – P. 524–526. (in Russian)
2. Ortega J.M., Rheinboldt W.C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. – Academic Press, New York, 1970.
3. Traub J.F. Iterative methods for the solution of equations. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964.
4. Shakhno S.M. *On the difference method with quadratic convergence for solving nonlinear operator equations*// Mat. Stud. – 2006. – V.26. – P. 105–110. (in Ukrainian)
5. Amat S., Busquier S. *A modified secant method for semismooth equations* // Appl. Math. Lett. – 2003. – V.16. – P. 877–881.
6. Argyros I.K. *A unifying local-semilocal convergenceanalysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space*// J. Math. Anal. Appl. – 2004. – V.298. – P. 374–397.

7. Argyros I.K. *Improving the rate of convergence of Newton methods on Banach spaces wth a convergence structure and applications*// Appl. Math. Lett. – 1997. – V.6. – P. 21–28.
8. Chen X. *On the convergence of Broyden-like methods for nonlinear equations with nondifferentiable terms*// Ann. Inst. Statist. Math. – 1990. – V.42, №2. – P. 387–401.
9. Hernandez M.A., Rubio M.J. *The Secant method for nondifferentiable operators*// Appl. Math. Lett. – 2002. – V.15. – P. 395–399.
10. Ren H., Argyros I.K. *A new semilocal convergence theorem for a fast iterative method with nondifferentiable operators*// J. Appl. Math. Comp. – 2010. – V.34. – №1-2. – P. 39–46.
11. Shakhno S.M. *On an iterative algorithm with superquadratic convergence for solving nonlinear operator equations*// J. Comp. App. Math. – 2009. – V.231. – P. 222–235.
12. Wang X. *Convergence of Newton's method and uniquiness of the solution of equations in Banach space*// IMA Journal of Numerical Analysis. – 2000. – V.20. – P. 123–134.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Факультет прикладної математики та інформатики

Надійшло 30.05.2011
Після переробки 02.11.2011