УДК 513.88

Г. М. Качурівська, О. Г. Сторож

АКРЕТИВНІ ТА НЕВІД'ЄМНІ ЗБУРЕННЯ АБСТРАКТНОГО АНАЛОГУ ОПЕРАТОРА ТРЕТЬОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТА ВІДПОВІДНІ ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ

H. M. Kachurivska, O. G. Storozh. *Accretive and nonnegative perturbations of an abstract analogy for the operator of the third boundary problem and corresponding variational problems*, Mat. Stud. **36** (2011), 201–212.

In the paper the role of initial object is played by the positively definite operator L_0 acting in a Hilbert space H. The main object of the investigation is operator $\widetilde{L}_B$. It is interpreted as a perturbation of some proper extension of L_0. Using methods of the extension theory the criteria of maximal accretivity and maximal nonnegativity for $\widetilde{L}_B$ are established. In the case when $\widetilde{L}_B$ is a positively definite operator, its energetic space is constructed and the solvability of corresponding variational problem is proved. Moreover, the situation when L_0 is minimal differential operator generated in the space of infinite-dimensional vector-functions by the Sturm-Liouville differential expression is considered.

Г. М. Качуривская, О. Г. Сторож. *Аккретивные и неотрицательные возмущения абстрактного аналога оператора третьей краевой задачи и соответствующие вариационные задачи* // Мат. Студії. – 2011. – Т.36, №2. – С.201–212.

В работе роль исходного обьекта играет положительно определенный оператор L_0, действующий в гильбертовом пространстве H. Основной обьект исследования – оператор $\widetilde{L}_B$ – интерпретируется как возмущение некоторого собственного расширения оператора L_0. Применяя методы теории расширений, установлены критерии максимальной аккретивности и максимальной неотрицательности оператора $\widetilde{L}_B$. В случае, когда этот оператор является положительно определенным, построено его энергетическое пространство и доказана разрешимость соответствующей вариационной задачи. Более того, рассматривается ситуация, когда L_0 является минимальным оператором, порожденным в пространстве бесконечномерных вектор-функций дифференциальным выражением Штурма-Лиувилля.

1. Вступ та основні позначення. Ця стаття є продовженням праці авторів [1], у якій було обгрунтовано важливість дослідження умов максимальної акретивності різних класів лінійних операторів у гільбертовому просторі. Один з таких класів розглянуто у згаданій роботі. Крім цього, там вказано на зв'язок з попередніми дослідженнями.

Зазначимо, що самоспряжений максимально акретивний оператор є максимально невід'ємним, а тому індукується деякою невід'ємною квадратичною формою, задача про мінімізацію якої еквівалентна питанню про розв'язність вихідного оператора. Деякі з таких форм розглянуто нижче. Систематичне дослідження невід'ємних самоспряжених розширень невід'ємного оператора у гільбертовому просторі почалося, мабуть, зі статті К. Фрідріхса [2] і знайшло свій розвиток у працях багатьох математиків (див., наприклад, [3–15] та цитовану там літературу).

2010 *Mathematics Subject Classification:* 47B44, 81Q15.
Keywords: Hilbert space, operator, nonnegative, extension.

У цій статті, як і в [1], використовуємо такі позначення:
$D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ — відповідно область визначення, область значень та многовид нулів оператора T; $\mathcal{B}(X,Y)$ — простір лінійних неперервних операторів $T\colon X \to Y$ таких, що $D(T) = X$; $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$; $\mathcal{C}(X)$ — сукупність замкнених щільно визначених лінійних операторів $T\colon X \to X$; $T \downarrow E$ — звуження оператора T на множину E; $\mathbf{I}_X$ — оператор тотожного перетворення у просторі X; $\oplus, \dot{+}$ — символи ортогональної та прямої суми відповідно; якщо $A_i\colon X \to Y_i$ $(i = 1, ..., n)$ — лінійні оператори, то запис $A = A_1 \oplus ... \oplus A_n$ означає, що для будь-якого $x \in X$ $Ax = (A_1 x, ..., A_n x)$; s-lim — символ сильної операторної границі. Оператор, спряжений з оператором T, позначатимемо (якщо не омовлено протилежного) через T^*.

2. Додаткові позначення та постановка задачі. У статті роль вихідного об'єкта відіграє додатно визначений оператор $L_0 \in \mathcal{C}(H)$, де H — гільбертів простір зі скалярним добутком $(.|.)$ та відповідною нормою $\|.\|$. Через L_F позначаємо розширення за Фрідріхсом оператора L_0, а через H_e та $(.|.)_e$ — його енергетичний простір та енергетичний скалярний добуток. Як і в [1], під $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ розуміємо фіксований жорсткий простір граничних значень (ПГЗ), тобто позитивний ПГЗ, що відповідає розширенню L_F, оператора L_0 (деталі — див. [4 – 7]), під $D[T]$, де $T \in \mathcal{C}(H)$, — многовид $D(T)$, трактований як гільбертів простір зі скалярним добутком $(.|.)_T$ графіка оператора T та відповідною нормою $\|.\|_T$, а під $\mathcal{P}$ — проектор $H_e \dot{+} \ker L \to H_e$ паралельно до $\ker L$ (тут і далі $L \overset{\mathrm{def}}{=} L_0^*$).

Якщо $\Psi \in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H})$, то (спряжений) оператор $\Psi^\bullet \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, H_e)$ визначаємо виходячи з умови $(\forall u \in H_e)$ $(\forall h \in \mathcal{H})$ $(\Psi u|h)_{\mathcal{H}} = (u|\Psi^\bullet h)_e$.

Ми вважаємо даними оператори $\Phi \in \mathcal{B}(H, \mathcal{H})$ та $\Psi \in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H})$, який задовольняє умови

$$R(\Psi^\bullet) \cap D(L) = \{0\}, \tag{1}$$

$$R(\Psi) = R(\Psi \downarrow D(L_0)) \overset{\mathrm{def}}{=} G \text{ замкнена в } \mathcal{H}, \tag{2}$$

$$\ker L \dot{+} R(\Psi^\bullet) \text{ замкнена в } H. \tag{3}$$

Введемо позначення: $\mathcal{X} = \Psi\mathcal{P} + \Phi$, $\mathcal{X}^\bullet = (\mathcal{X} \downarrow H_e)^\bullet$ $(= \Psi^\bullet + L_F^{-1}\Phi^*)$ і зазначимо, що, як і в [1], під $W^{(\Psi)}$ ми розуміємо продовження за лінійністю нулем на $R(\Psi^\bullet)$ оператора $W \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H})$, а під $\Gamma_3^{(\Psi)}$ — відображення $D_{\max} \overset{\mathrm{def}}{=} D(L) \dot{+} R(\Psi^\bullet) \to G$, яке визначається виходячи з умови $\Gamma_3^{(\Psi)} y = g \Leftrightarrow y + \Psi^\bullet g \in D(L)$.

Припустимо, що $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ і визначимо оператори L_B, $\widetilde{L}_B$, $\widetilde{L}_0$ таким чином:

$$D(L_B) = \{y \in D(L)\colon \Gamma_1^{(\Psi)} y - B\Gamma_2^{(\Psi)} y = \mathcal{X} y\}, \quad L_B \subset L; \tag{4}$$

$$D(\widetilde{L}_B) = \{y \in D_{\max}\colon y + \mathcal{X}^\bullet \Gamma_2^{(\Psi)} y \in D(L),\ \Gamma_1^{(\Psi)} y - B\Gamma_2^{(\Psi)} y = \mathcal{X} y\}, \tag{5}$$

$$(\forall y \in D(\widetilde{L}_B)) \ \ \widetilde{L}_B y = L(y + \mathcal{X}^\bullet \Gamma_2^{(\Psi)} y); \tag{6}$$

$$D(\widetilde{L}_0) = \{y \in D(\widetilde{L}_B)\colon \Gamma_2^{(\Psi)} y = 0\} \quad \widetilde{L}_0 \subset \widetilde{L}_B. \tag{7}$$

Відзначимо, що $\widetilde{L}_B$ можна трактувати як збурення (із зміною області визначення) оператора L_B, який є абстрактним аналогом оператора задачі типу третьої крайової, розглянутої в [7].

Метою цієї статті є встановлення умов максимальної акретивності та максимальної невід'ємності оператора $\widetilde{L}_B$, а у випадку, коли він є додатно визначеним ($\widetilde{L}_B \gg 0$), побудова його енергетичного простору та дослідження питання про мінімум квадратичного функціоналу, який індукує оператор $\widetilde{L}_B$.

Окремо буде розглянуто випадок, коли L_0 — мінімальний оператор, породжений в $L_2(H_0;(a,b))$, де H_0 — допоміжний гільбертів простір, диференціальним виразом Штурма-Ліувілля.

Зазначимо, що весь час припускаємо, що

$$R((\Gamma_1 - \mathcal{X}) \oplus \Gamma_2) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}. \tag{8}$$

3. Про один ПГЗ оператора $\widetilde{L}_0$. Перш за все нагадаємо (див. [16]), що трійка $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, де $\mathcal{H}$ — гільбертів простір, а Γ_1, Γ_2 — лінійні оператори з $D(L)$ в $\mathcal{H}$, називається простором граничних значень (ПГЗ) оператора L_0, якщо

$$R(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \quad \ker\Gamma_1 \cap \ker\Gamma_2 = D(L_0),$$
$$\forall y,z \in D(L) \;\; (Ly|z) - (y|Lz) = (\Gamma_1 y|\Gamma_2 z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 y|\Gamma_1 z)_{\mathcal{H}}.$$

Лема 1. *а)* $\widetilde{L}_B, \widetilde{L}_0 \in \mathcal{C}(H)$;

$$\text{б) } D(\widetilde{L}_B^*) = \{z \in D_{\max} \colon z + \mathcal{X}^\bullet \Gamma_2^{(\Psi)} z \in D(L),\ \Gamma_1^{(\Psi)} z - B^* \Gamma_2^{(\Psi)} z = \mathcal{X} z\}, \tag{9}$$

$$(\forall z \in D(\widetilde{L}_B^*)) \;\; \widetilde{L}_B^* z = L(z + \mathcal{X}^\bullet \Gamma_2^{(\Psi)} z); \tag{10}$$

$$\text{в) } D(\widetilde{L}_0^*) = \{z \in D_{\max} \colon z + \mathcal{X}^\bullet \Gamma_2^{(\Psi)} z \in D(L)\}, \tag{11}$$

$$(\forall z \in D(\widetilde{L}_0^*)) \;\; \widetilde{L}_0^* z = L(z + \mathcal{X}^\bullet \Gamma_2^{(\Psi)} z). \tag{12}$$

Правильність цього твердження випливає безпосередньо з результатів праці [17], при доведенні яких істотну роль відіграють умови (1)–(3) та (8) (див. також [18]).

Зауваження 1. З (7) випливає, що $\widetilde{L}_0 \subset L_F$, зокрема $\widetilde{L}_0$ — додатно визначений оператор, а з леми 1 — що $\widetilde{L}_0 \subset \widetilde{L}_B \subset \widetilde{L}_0^*$, точніше

$$D(\widetilde{L}_B) = \{y \in D(\widetilde{L}_0^*) \colon \Gamma_1^{(\Psi)} y - B\Gamma_2^{(\Psi)} y = \mathcal{X} y\}. \tag{13}$$

Лема 2. *При зроблених припущеннях* $(\mathcal{H}, \Gamma_1^{(\Psi)} - \mathcal{X}, \Gamma_2^{(\Psi)})$ *— ПГЗ оператора* $\widetilde{L}_0$.

Доведення. З (7) і (13) випливає, що $D(\widetilde{L}_0) = \ker(\Gamma_1^{(\Psi)} - \mathcal{X}) \cap \ker\Gamma_2^{(\Psi)}$. Оскільки з (8) випливає, що $R((\Gamma_1^{(\Psi)} - \mathcal{X}) \oplus \Gamma_2^{(\Psi)}) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, то досить довести, що

$$\forall y,z \in D(\widetilde{L}_0^*) \;\; (\widetilde{L}_0^* y|z) - (y|\widetilde{L}_0^* z) = (\Gamma_1^{(\Psi)} y - \mathcal{X} y|\Gamma_2^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2^{(\Psi)} y|\Gamma_1^{(\Psi)} z - \mathcal{X} z)_{\mathcal{H}}. \tag{14}$$

Переконаємось у цьому. З леми 1 та означення операторів $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}^\bullet$, $\Gamma_3^{(\Psi)}$ зрозуміло, що для будь-якого $u \in D(\widetilde{L}_0^*)$

$$\Gamma_3^{(\Psi)} u = P_G \Gamma_2^{(\Psi)} u, \quad \widetilde{L}_0^* u = L(u + \Psi^\bullet \Gamma_2^{(\Psi)} u) + \Phi^* \Gamma_2^{(\Psi)} u, \tag{15}$$

де P_G — ортопроектор $\mathcal{H} \to G$. Далі, (див. [17]),

$$\forall y,z \in D_{\max} \;\; (L(y + \Psi^\bullet \Gamma_3^{(\Psi)} y)|z) - (y|L(z + \Psi^\bullet \Gamma_3^{(\Psi)} z)) =$$
$$= (\Gamma_1^{(\Psi)} y|\Gamma_2^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2^{(\Psi)} y|\Gamma_1^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}} + (\Gamma_3^{(\Psi)} y|\Psi\mathcal{P} z)_{\mathcal{H}} - (\Psi\mathcal{P} y|\Gamma_3^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}},$$

а отже, з огляду на (15),

$$\forall y,z\in D(\widetilde{L}_0^*)\ \ (\widetilde{L}_0^*y|z)-(y|\widetilde{L}_0^*z)=(L(y+\Psi^{\bullet}\Gamma_3^{(\Psi)}y)|z)+$$
$$+(\Gamma_2^{(\Psi)}y|\Phi z)_{\mathcal H}-(y|L(z+\Psi^{\bullet}\Gamma_3^{(\Psi)}z))-(\Phi y|\Gamma_2^{(\Psi)}z)_{\mathcal H}=$$
$$=(\Gamma_1^{(\Psi)}y|\Gamma_2^{(\Psi)}z)_{\mathcal H}-(\Gamma_2^{(\Psi)}y|\Gamma_1^{(\Psi)}z)_{\mathcal H}+(\Gamma_2^{(\Psi)}y|\Psi\mathcal{P}z)_{\mathcal H}-(\Psi\mathcal{P}y|\Gamma_2^{(\Psi)}z)_{\mathcal H}+$$
$$+(\Gamma_2^{(\Psi)}y|\Phi z)_{\mathcal H}-(\Phi y|\Gamma_2^{(\Psi)}z)_{\mathcal H}=(\Gamma_1^{(\Psi)}y-\mathcal{X}y|\Gamma_2^{(\Psi)}z)_{\mathcal H}-(\Gamma_2^{(\Psi)}y|\Gamma_1^{(\Psi)}z-\mathcal{X}z)_{\mathcal H}.\qquad\square$$

4. Функція Вейля оператора $\widetilde{L}_0$ та критерій додатної визначеності оператора $\widetilde{L}_B$. Нагадаємо (див. [5–7]), що ПГЗ $(\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2)$ оператора $L_0\gg 0$ називається позитивним, якщо $\ker\Gamma_1=D(L_0)\dotplus\ker L$ і $\widehat{L}\overset{\text{def}}{=}L\downarrow\ker\Gamma_2\gg 0$. Якщо $\widehat{L}=L_F$, то казатимемо, що $(\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2)$ — жорсткий ПГЗ оператора L_0.

Кожному ПГЗ $(\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2)$ оператора L_0 відповідає введена в [15] функція Вейля $M(\lambda)$, яку еквівалентним чином можна (див. [19]) визначити так.

Нехай $\widehat{L}\gg 0$, $\widehat{L}_\lambda\overset{\text{def}}{=}(\widehat{L}-\lambda\mathbf{I}_H)^{-1}$, $Z_\lambda\overset{\text{def}}{=}(\Gamma_1\widehat{L}_\lambda)^*$ $(\lambda\le 0)$. Функцію Z_λ називатимемо фундаментальною функцією оператора L_0, яка відповідає вказаному ПГЗ.

Відомо [18], [19], що $(\forall\lambda\le 0)$ $(y=Z_\lambda a\Leftrightarrow Ly=\lambda y,\Gamma_2 y=a)$, а згадана функція Вейля має такий вигляд: $M(\lambda)=\Gamma_1 Z_\lambda$.

Використовуючи результати праці [10], неважко довести (див. [8], [9], [15], [20]), що
а) ПГЗ $(\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2)$ оператора L_0 є позитивним тоді і тільки тоді, коли $M(0)=0$;
б) позитивний ПГЗ $(\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2)$ оператора L_0 є жорстким тоді і тільки тоді, коли $\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to-\infty}M(\lambda)^{-1}=0$.

Відомо (див. [5–7]), що якщо $(\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2)$ — жорсткий ПГЗ оператора L_0, то оператор L_B, визначений згідно з (4), є максимально акретивним (максимально невід'ємним; коректно оборотним) тоді і тільки тоді, коли B є акретивним (невід'ємним; оборотним) в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Зокрема, L_B — самоспряжений додатно визначений оператор тоді і тільки тоді, коли $B\gg 0$.

Перш ніж формулювати основні результати, введемо такі позначення:

$$\begin{cases}B_0=2\operatorname{Re}(\mathcal{X}Z_0)-\mathcal{X}\mathcal{X}^{\bullet}, & \widetilde{\Gamma}_1=(\Gamma_1^{(\Psi)}-\mathcal{X})+B_0\Gamma_2^{(\Psi)},\\ B(\lambda)=B_0-2\operatorname{Re}(\mathcal{X}Z_\lambda)+\mathcal{X}(\mathcal{X}L_\lambda)^*, & \widetilde{\Gamma}_2=\Gamma_2^{(\Psi)},\quad \widetilde{B}=B+B_0,\end{cases}\tag{16}$$

де $L_\lambda\overset{\text{def}}{=}(L_F-\lambda\mathbf{I}_H)^{-1}$, $\lambda\le 0$.

Оскільки, з огляду на лему 2, $(\mathcal{H},\Gamma_1^{(\Psi)}-\mathcal{X},\Gamma_2^{(\Psi)})$ — ПГЗ оператора $\widetilde{L}_0$, а $B_0=B_0^*$, то зрозуміло, що $(\mathcal{H},\widetilde{\Gamma}_1,\widetilde{\Gamma}_2)$ — ПГЗ цього оператора. Знайдемо відповідну фундаментальну функцію $\widetilde{Z}_\lambda$.

Лема 3. *Для будь-якого* $\lambda\le 0$

$$\widetilde{Z}_\lambda=Z_\lambda-(\mathbf{I}_{\mathcal H}+\lambda L_\lambda)\mathcal{X}^{\bullet}.\tag{17}$$

Доведення. Зі сказаного вище випливає, що

$$y=\widetilde{Z}_\lambda a\Leftrightarrow\begin{cases}\widetilde{L}_0^*y=\lambda y,\\ \Gamma_2^{(\Psi)}y=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}L(y+\mathcal{X}^{\bullet}\Gamma_2^{(\Psi)}y)=\lambda y,\\ \Gamma_2^{(\Psi)}y=a\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}L(y+\mathcal{X}^{\bullet}\Gamma_2^{(\Psi)}y)-\lambda(y+\mathcal{X}^{\bullet}\Gamma_2^{(\Psi)}y)=-\lambda\mathcal{X}^{\bullet}\Gamma_2^{(\Psi)}y,\\ \Gamma_2^{(\Psi)}y=a\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists\ b \in \mathcal{H}) \ \begin{cases} y + \mathcal{X}^{\bullet}\Gamma_2^{(\Psi)} y = Z_\lambda b - \lambda L_\lambda \mathcal{X}^{\bullet}\Gamma_2^{(\Psi)} y, \\ \Gamma_2^{(\Psi)} y = a. \end{cases}$$

Але $\Gamma_2^{(\Psi)}\mathcal{X}^{\bullet} = \Gamma_2^{(\Psi)} L_\lambda = 0$, $\Gamma_2^{(\Psi)} Z_\lambda = \mathbf{I}_{\mathcal{H}}$, тому $b = a$. Таким чином, $\widetilde{Z}_\lambda a = y = Z_\lambda a - (\mathbf{I}_{\mathcal{H}} + \lambda L_\lambda)\mathcal{X}^{\bullet} a$, тобто справджується (17). □

Лема 4. *Для будь-якого* $\lambda \le 0$

$$(\mathcal{X} L_\lambda)^* = (\lambda L_\lambda + \mathbf{I}_{\mathcal{H}})\mathcal{X}^{\bullet}, \tag{18}$$

$$(\mathcal{X} Z_\lambda)^* = \Gamma_1^{(\Psi)} (\mathcal{X} L_\lambda)^*. \tag{19}$$

Доведення. Оскільки $L_F L_\lambda = \mathbf{I}_H + \lambda L_\lambda$, то для будь-яких $y \in H$, $h \in \mathcal{H}$ маємо

$$(\mathcal{X} L_\lambda y|h)_{\mathcal{H}} = (L_\lambda y|\mathcal{X}^{\bullet} y)_e = (L_F L_\lambda y|\mathcal{X}^{\bullet} h) = ((\mathbf{I}_H + \lambda L_\lambda) y|\mathcal{X}^{\bullet} h) = (y|(\mathbf{I}_H + \lambda L_\lambda)\mathcal{X}^{\bullet} h).$$

Співвідношення (18) доведено.

Далі, $\Phi^{\bullet} = L_F^{-1}\Phi^*$, $\Gamma_1^{(\Psi)}\Psi^{\bullet} = 0$, $\mathcal{P} Z_0 = 0$, а тому, враховуючи (18), бачимо, що

$$(\forall \lambda \le 0) \ \ \Gamma_1^{(\Psi)} (\mathcal{X} L_\lambda)^* = \lambda Z_\lambda^* \mathcal{X}^{\bullet} + (\mathcal{X} Z_0)^*. \tag{20}$$

Дійсно,

$$\begin{gathered} \Gamma_1^{(\Psi)} (\mathcal{X} L_\lambda)^* = \Gamma_1^{(\Psi)} (\lambda L_\lambda + \mathbf{I}_H)\mathcal{X}^{\bullet} = \lambda \Gamma_1^{(\Psi)} L_\lambda \mathcal{X}^{\bullet} + \Gamma_1^{(\Psi)} (\Psi + L_F^{-1}\Phi^*) = \\ = \lambda Z_\lambda^* \mathcal{X}^{\bullet} + Z_0^* \Phi^* = \lambda Z_\lambda^* \mathcal{X}^{\bullet} + (\Phi Z_0)^* = \lambda Z_\lambda^* \mathcal{X}^{\bullet} + (\mathcal{X} Z_0)^*. \end{gathered}$$

З іншого боку, оскільки

$$(\forall \lambda \le 0) \ \ Z_\lambda - Z_0 = \lambda L_F^{-1} Z_\lambda = \lambda L_\lambda Z_0 \tag{21}$$

(див [19]), то

$$\begin{gathered} (\forall a, b \in \mathcal{H}) \ \ ((\mathcal{X} Z_\lambda)^* a|b)_{\mathcal{H}} = (a|\mathcal{X} Z_\lambda b)_{\mathcal{H}} = (a|\mathcal{X} Z_0 b)_{\mathcal{H}} + \\ + (a|\mathcal{X}(Z_\lambda - Z_0) b)_{\mathcal{H}} = (a|\mathcal{X} Z_0 b)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{X}^{\bullet} a|(\Gamma_1(L_\lambda - L_F^{-1}))^* b)_e = \\ = (a|\mathcal{X} Z_0 b)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{X}^{\bullet} a|\lambda(\Gamma_1 L_\lambda L_F^{-1})^* b)_e = (a|\mathcal{X} Z_0 b)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{X}^{\bullet} a|\lambda L_F^{-1} Z_\lambda b)_e = \\ = (a|\mathcal{X} Z_0 b)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{X}^{\bullet} a|\lambda Z_\lambda b) = ((\mathcal{X} Z_0)^* a|b)_{\mathcal{H}} + (\lambda Z_\lambda^* \mathcal{X}^{\bullet} a|b)_{\mathcal{H}}, \end{gathered}$$

тобто

$$(\mathcal{X} Z_\lambda)^* = (\mathcal{X} Z_0)^* + \lambda Z_\lambda \mathcal{X}^{\bullet}. \tag{22}$$

Для завершення доведення досить порівняти (20) і (21). □

Лема 5. $(\mathcal{H}, \widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2)$ *— позитивний ПГЗ оператора* $\widetilde{L}_0$*, якому відповідає функція Вейля*

$$\widetilde{M}(\lambda) = M(\lambda) + B(\lambda) \ \ (\lambda \le 0). \tag{23}$$

Доведення. Оскільки (див. (16)–(19))

$$\begin{gathered} \widetilde{\Gamma}_1 \widetilde{Z}_\lambda = [(\Gamma_1 - \mathcal{X}) + B_0 \Gamma_2^{(\Psi)}][Z_\lambda - (\mathcal{X} L_\lambda)^*] = M(\lambda) - \mathcal{X} Z_\lambda + B_0 - \\ - \Gamma_1^{(\Psi)} (\mathcal{X} L_\lambda)^* + \mathcal{X}(\mathcal{X} L_\lambda)^* - B_0 \Gamma_2^{(\Psi)} (\lambda L_\lambda + \mathbf{I}_H)\mathcal{X}^{\bullet} = M(\lambda) - \mathcal{X} Z_\lambda + B_0 - \\ - (\mathcal{X} Z_\lambda)^* + \mathcal{X}(\mathcal{X} L_\lambda)^* = M(\lambda) + B_0 - 2\,\mathrm{Re}(\mathcal{X} Z_\lambda) + \mathcal{X}(\mathcal{X} L_\lambda)^* = M(\lambda) + B(\lambda), \end{gathered}$$

то функція Вейля $\widetilde{M}(\lambda)$, визначена згідно з (23), є шуканою функцією Вейля.

Беручи до уваги рівність $M(0) = 0$ і враховуючи (16), (18), (23), переконуємося, що $\widetilde{M}(0) = 0$. Іншими словами, $\widetilde{L}_0^* \downarrow \ker \widetilde{\Gamma}_1$ є м'яким в сенсі [3] розширенням оператора $\widetilde{L}_0$ (деталі — див., наприклад, [15]). Для завершення доведення досить зауважити, що $\widetilde{L}_0^* \downarrow \ker \widetilde{\Gamma}_2 = L_F \gg 0$. □

Зауваження 2. Оскільки L_F — невід'ємний самоспряжений оператор, то

$$\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to-\infty} (\lambda L_\lambda + \mathbf{I}_H) = 0. \tag{24}$$

Лема 6. $\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to-\infty} \mathcal{X}(\mathcal{X}L_\lambda)^* = 0.$

Доведення. Беручи до уваги (18), бачимо, що співвідношення, яке ми хочемо довести, рівносильне зі співвідношенням

$$\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to-\infty} \mathcal{X}(\lambda L_\lambda + \mathbf{I}_H)\mathcal{X}^\bullet = 0. \tag{25}$$

Переконаємось у правильності останнього. З (24) випливає, що

$$\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to-\infty} \Phi(\lambda L_\lambda + \mathbf{I}_H)\mathcal{X}^\bullet = 0, \tag{26}$$

а з леми 8 праці [21] — що

$$\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to-\infty} \Psi\mathcal{P}(\lambda L_\lambda + \mathbf{I}_H)\Psi^\bullet = \operatorname*{s-lim}_{\lambda\to-\infty} \Psi(\lambda L_\lambda + \mathbf{I}_H)\Psi^\bullet = 0. \tag{27}$$

Далі, $\Psi\mathcal{P}(\lambda L_\lambda + \mathbf{I}_H)\Phi^\bullet = \Psi(\lambda L_\lambda + \mathbf{I}_H)L_F^{-1}\Phi^* = \Psi L_F^{-1}(\lambda L_\lambda + \mathbf{I}_H)\Phi^*$, тому для будь-яких $h \in \mathcal{H}$, $y_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda L_\lambda + \mathbf{I}_H)\Phi^* h$ маємо

$$\|\Psi\mathcal{P}(\lambda L_\lambda + \mathbf{I}_H)\Phi^\bullet h\|_{\mathcal{H}} \le \|\Psi\|\|L_F^{-1}y_\lambda\|_e = \|\Psi\|\|L_F^{-\frac{1}{2}}y_\lambda\| \le \|\Psi\|\|L_F^{-\frac{1}{2}}\|\|y_\lambda\|.$$

Застосовуючи ще раз (24), бачимо, що $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} y_\lambda = 0$, а отже

$$\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to-\infty} \Psi\mathcal{P}(\lambda L_\lambda + \mathbf{I}_H)\Phi^\bullet = 0. \tag{28}$$

З (26)–(28) випливає (25). □

Лема 7. $\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to-\infty} 2\operatorname{Re}(\mathcal{X}Z_\lambda)M(\lambda)^{-1} = 0.$

Доведення. Беручи до уваги (21) і (24), бачимо, що

$$(\forall h \in \mathcal{H}) \quad \lim_{\lambda\to-\infty} \Phi Z_\lambda h = \lim_{\lambda\to-\infty} \Phi(\lambda L_\lambda)Z_0 h + \Phi Z_0 h = 0.$$

Далі (див. [19]), $\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to-\infty} Z_\lambda^* = 0$. Зі сказаного вище та співвідношення $\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to-\infty} M(\lambda)^{-1} = 0$ зрозуміло, що $\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to-\infty} 2\operatorname{Re}(\Phi Z_\lambda)M(\lambda)^{-1} = 0$. Враховуючи ще раз (21) і (24), а також рівність $\Psi\mathcal{P}Z_0 = 0$, отримуємо

$$\begin{aligned} \Psi\mathcal{P}Z_\lambda M(\lambda)^{-1} = \Psi\mathcal{P}(Z_\lambda - Z_0)M(\lambda)^{-1} = \Psi\mathcal{P}(\lambda L_F^{-1}Z_\lambda)M(\lambda)^{-1} = \\ = \Psi(\lambda L_F^{-1}Z_\lambda)M(\lambda)^{-1} = \Psi(Z_\lambda - Z_0)M(\lambda)^{-1}. \end{aligned}$$

Але $\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to-\infty} [\Psi(Z_\lambda - Z_0)M(\lambda)^{-1}] = \operatorname*{s-lim}_{\lambda\to-\infty} [\Psi(Z_\lambda - Z_0)M(\lambda)^{-1}]^* = 0$, (див. [21], леми 5, 6), тому $\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to-\infty} 2\operatorname{Re}[(\Psi\mathcal{P}Z_\lambda)M(\lambda)^{-1}] = 0$. □

Теорема 1. $(\mathcal{H}, \widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2)$ — *жорсткий ПГЗ оператора* $\widetilde{L}_0$.

Доведення. З (23) випливає, що

$$(\forall \lambda \leq 0) \quad \widetilde{M}(\lambda)^{-1} = (\mathbf{I}_{\mathcal{H}} - \widetilde{M}(\lambda)^{-1} B(\lambda)) M(\lambda)^{-1}, \tag{29}$$

зокрема існує сильна границя у правій частині (29) при $\lambda \to -\infty$. Оскільки, як зазначалося вище, $\widetilde{M}(0) = 0$, $\operatorname{s-lim}_{\lambda \to -\infty} M(\lambda)^{-1} = 0$, то досить показати, що $\operatorname{s-lim}_{\lambda \to -\infty} \widetilde{M}(\lambda)^{-1} = 0$. Але це випливає безпосередньо з лем 6 та 7 (див. також (16)). □

Зауваження 3. Із зауваження 1 і з (16) випливає, що

$$D(\widetilde{L}_B) = \{y \in D(\widetilde{L}_0^*) \colon \widetilde{\Gamma}_1 y = \widetilde{B} \widetilde{\Gamma}_2 y\}, \quad \widetilde{L}_B \subset \widetilde{L}_0^*. \tag{30}$$

Наслідок 1. *Оператор* $\widetilde{L}_B$ *є максимально акретивним (максимально невід'ємним; коректно оборотним) тоді і тільки тоді, коли* $\widetilde{B}$ *є акретивним (невід'ємним; коректно оборотним).*

Зокрема $\widetilde{L}_B$ *є (максимально) додатно визначеним тоді і тільки тоді, коли*

$$\widetilde{B} = B + B_0 = B + 2\operatorname{Re}(\mathcal{X} Z_0) - \mathcal{X}\mathcal{X}^{\bullet} \gg 0.$$

Доведення. Оскільки $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — жорсткий ПГЗ оператора L_0, то правильність теореми випливає з результатів праць [5–7]. Крім цього, потрібно врахувати, що самоспряжений оператор є додатно визначеним тоді і тільки тоді, коли він є невід'ємним і коректно оборотним. □

Зауваження 4. а) Оскільки енергетичний простір додатно визначеного оператора збігається з енергетичним простором його жорсткого розширення, а L_F є жорстким розширенням не тільки для L_0, але й для $\widetilde{L}_0$, то H_e є енергетичним простором не тільки для L_0, але й для $\widetilde{L}_0$.

$$\text{б)} \qquad H_e \dot{+} \ker L = H_e \dot{+} \ker \widetilde{L}_0^*. \tag{31}$$

Дійсно, рівність (31) еквівалентна такій: $H_e \dot{+} R(Z_0) = H_e \dot{+} R(\widetilde{Z}_0)$. Але, з огляду на (17), $\widetilde{Z}_0 = Z_0 - \mathcal{X}^{\bullet}$. Виходячи звідси і з того, що $R(\mathcal{X}^{\bullet}) \subset H_e$, переконуємось у правильності рівності (31).

Відомо (див. [11], [12], [22]), що якщо $B \gg 0$, то оператори $\mathcal{P} \downarrow D(L)$, Γ_2 допускають єдині неперервні продовження $\widehat{\mathcal{P}} (= \mathcal{P})$, $\widehat{\Gamma}_2 (\widehat{\Gamma}_2 \downarrow D_{\max} = \Gamma_2^{(\Psi)})$ до відображень $H_e \dot{+} \ker L \to H_e$, $H_e \dot{+} \ker L \to \mathcal{H}$ відповідно. При цьому

$$\forall u \in H_e \dot{+} \ker L \quad \widehat{\mathcal{P}} u = u - Z_0 \widehat{\Gamma}_2 u, \tag{32}$$

а $H_e \dot{+} \ker L$ трактується як гільбертів простір зі скалярним добутком

$$\forall u, v \in H_e \dot{+} \ker L \quad \pi_B(u, v) = (\widehat{\mathcal{P}} u | \widehat{\mathcal{P}} v)_e + (B \widehat{\Gamma}_2 u | \widehat{\Gamma}_2 v)_{\mathcal{H}}.$$

Більше того, $H_B \stackrel{\text{def}}{=} H_e \dot{+} \ker L$ є енергетичним простором оператора L_B, а $\mathcal{P}$ — оператором (ортогонального) проектування $H_B \to H_e$. Застосовуючи цей результат до оператора $\widetilde{L}_0$ (замість L_0) і беручи до уваги (31), (32), бачимо, що

$$\forall u \in H_e \dot{+} \ker L = H_e \dot{+} \ker \widetilde{L}_0^* \quad \widehat{\widetilde{\mathcal{P}}} u = u - \widetilde{Z}_0 \widehat{\Gamma}_2 u,$$

де $\widetilde{\mathcal{P}}$ — проектор $H_e \dot{+} \ker \widetilde{L}_0^* \to H_e$ паралельно до $\ker \widetilde{L}_0^*$.

Теорема 2. *Нехай* $\widetilde{B} = B + B_0 \gg 0$, *а* $\widetilde{H}_B$, $\widetilde{\pi}_B$ *— відповідно енергетичний простір та енергетичний скалярний добуток оператора* $\widetilde{L}_B$. *Тоді* $\widetilde{H}_B = H_B$ *і*

$$\forall u \in \widetilde{H}_B \quad \widetilde{\pi}_B(u,v) = \pi_B(u,v) + (\mathcal{X}u|\widehat{\Gamma}_2 v)_{\mathcal{H}} + (\widehat{\Gamma}_2 u|\mathcal{X}v)_{\mathcal{H}}.$$

Доведення аналогічне доведенню відповідних тверджень з [22], [23].

Наслідок 2. *Якщо* $\widetilde{B} = B + B_0 \gg 0$, *то для будь-якого* $f \in H$ *варіаційна задача*

$$\widetilde{\pi}_B(u,v) - 2\,\mathrm{Re}(f|u) \to \min, \quad u \in H_e \dotplus \ker L$$

має єдиний розв'язок $u_0 = \widetilde{L}_B^{-1} f$.

Це випливає з теореми про мінімум квадратичного функціоналу [4].

5. Випадок диференціальних операторів. Нехай $-\infty < a < b < +\infty$, H_0 — сепарабельний гільбертів простір і для будь-якого $x \in [a,b]$ $p(x) = p(x)^* \in \mathcal{B}(H_0)$ — додатно визначений оператор, причому оператор-функція $x \mapsto p(x)$ сильно неперервна на $[a,b]$. Розглянемо диференціальний вираз

$$l[y] = -y''(x) + p(x)y \quad (x \in [a,b]) \tag{33}$$

і позначимо через L та L_0 відповідно максимальний та мінімальний оператори, породжені в гільбертовому просторі $H \overset{\text{def}}{=} L_2(H_0;(a,b))$ зі скалярним добутком

$$(\forall y,z \in H) \quad (y|z) = \int_a^b (y(x)|z(x))_{H_0} dx$$

цим виразом. Відомо [24–26], що $L, L_0 \in \mathcal{C}(H)$, $L_0^* = L$, а трійка $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, де

$$\mathcal{H} = H_0 \oplus H_0;\ \forall y \in D(L)\ \Gamma_1 y = (y'(a), -y'(b)),\ \Gamma_2 y = (y(a), y(b)),$$

є простором граничних значень (ПГЗ) оператора L_0. Відомо також, що $(H_e, (.|.)_e)$, де

$$H_e = \{y \in H\colon y \text{ абсолютно неперервна на } [a,b], y' \in H,\ y(a) = y(b) = 0\},$$
$$(\forall u,v \in H_e) \quad (u|v)_e = \int_a^b [(u'(x)|v'(x))_{H_0} + (p(x)u(x)|v(x))_{H_0}]dx, \tag{34}$$

є енергетичним простором оператора L_0, а $L_F \overset{\text{def}}{=} L \downarrow \ker \Gamma_2$ — його жорстким, тобто фрідріхсівським розширенням (деталі — див. [3], [4], [7]).

Далі, нехай $a < c_1 < c_2 < b$. Визначимо оператори $L_{\min}$, $L_{\max}$ за допомогою співвідношень

$$D(L_{\min}) = \{y \in D(L_0)\colon y(c_1) = y(c_2) = 0\}, \quad L_{\min} \subset L_0;$$
$$D(L_{\max}) = \{y \in H\colon y \text{ абсолютно неперервна на } [a,b],$$
$$y' \text{ абсолютно неперервна на } [a,c_1) \cup (c_1,c_2) \cup (c_2,b],\ l_{cl}[y] \in H\},$$
$$\forall y \in D(L_{\max}) \quad L_{\max} y = l_{cl}[y].$$

Під $l_{cl}[y]$ ми маємо на увазі вираз (33), в якому усі похідні потрібно розуміти у класичному сенсі.

Опишемо основний у цьому пункті об'єкт нашого дослідження. Припустимо, що $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{B}(H, H_0)$ $\beta_{ij} \in \mathcal{B}(H_0)$ $(i, j = 1, 2)$, $B \stackrel{\text{def}}{=} (\beta_{ij})_{i,j=1}^2$ і введемо у розгляд оператор T_B, область визначення якого $D(T_B)$ складається з усіх тих $y \in D(L_{\max})$, які задовольняють умови

$$y'(c_1 + 0) - y'(c_1 - 0) = y(a), \qquad y'(c_2 + 0) - y'(c_2 - 0) = y(b), \tag{35}$$

$$\begin{cases} y'(a) - (\beta_{11} y(a) + \beta_{12} y(b)) = \Phi_1 y + y(c_1), \\ -y'(b) - (\beta_{21} y(a) + \beta_{22} y(b)) = \Phi_2 y + y(c_2), \end{cases} \tag{36}$$

а закон дії такий:

$$\forall y \in D(T_B) \quad T_B y = l_{cl}[y] + \Phi_1^* y(a) + \Phi_2^* y(b). \tag{37}$$

Введемо такі позначення:

$$\forall u \in H^1 \stackrel{\text{def}}{=} H_e \dot{+} \ker L (= H_0^1(H_0; (a, b))) \ \ \Psi u = (u(c_1), u(c_2)), \ \Phi = \Phi_1 \oplus \Phi_2, \ \ \mathcal{X} = \Phi + \Psi.$$
$$\forall y \in D(L_{\max}) \ \ \Gamma_1^{[\Psi]} y = (y'(a), -y'(b)), \ \ \Gamma_2^{[\Psi]} y = (y(a), y(b)).$$

Легко переконатися, (див. [17]), що

$$D(T_B) = \{y \in D(L) + R(\mathcal{X}^\bullet) \colon y + \mathcal{X}^\bullet \Gamma_2^{[\Psi]} y \in D(L), \ \Gamma_1^{[\Psi]} y - B \Gamma_2^{[\Psi]} y = \mathcal{X} y\},$$
$$\forall y \in D(T_B) \quad T_B y = L(y + \mathcal{X}^\bullet \Gamma_2^{[\Psi]} y).$$

Нехай $\{\omega_1(x), \omega_2(x)\}$ — фундаментальна система розв'язків рівняння $-Y'' + p(x)Y = 0$, яка задовольняє співвідношення $\omega_1(a) = \omega_2(b) = \mathbf{I}_{H_0}$, $\omega_1(b) = \omega_2(a) = \mathbf{0}$.

Приймемо

$$\forall a = (a_1, a_2) \in \mathcal{H} \ \ Za = \omega_1 a_1 + \omega_2 a_2, \ \Omega = \begin{pmatrix} cc\omega_1'(a) & \omega_2'(a) \\ -\omega_1'(b) & \omega_2'(b) \end{pmatrix}$$

Безпосередньо з результатів праці [27] випливає, що T_B є самоспряженим додатно визначеним оператором тоді і тільки тоді, коли

$$\widehat{B} \stackrel{\text{def}}{=} B - \Omega + 2 \operatorname{Re}(\mathcal{X} Z) - \mathcal{X} \mathcal{X}^\bullet \gg 0. \tag{38}$$

Далі, нехай

$$\forall u, v \in H^1 \quad \pi(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b [(u'(x)|v'(x))_{H_0} + (p(x)u(x)|v(x))_{H_0}] dx + (\beta_{11} u(a)|v(a))_{H_0} +$$
$$+ (\beta_{12} u(b)|v(a))_{H_0} + (\beta_{21} u(a)|v(b))_{H_0} + (\beta_{22} u(b)|v(b))_{H_0} + (\Phi_1 u + u(c_1)|v(a))_{H_0} +$$
$$+ (\Phi_2 u + u(c_2)|v(b))_{H_0} + (u(a)|\Phi_1 v + v(c_1))_{H_0} + (u(b)|\Phi_2 v + v(c_2))_{H_0}, \tag{39}$$

$$\forall u \in H^1 \quad J[u] \stackrel{\text{def}}{=} \pi(u, u) - 2 \operatorname{Re} \int_a^b (u(x)|f(x))_{H_0} dx, \tag{40}$$

де f — фіксований елемент простору $H = L_2(H_0; (a, b))$.

Теорема 3. *Якщо T_B — додатно визначений оператор (тобто якщо справджується умова (38)), то $H^1 = H^1(H_0; (a, b))$ є його енергетичним простором, а форма $\pi(u, v)$, визначена згідно з (39), — відповідним енергетичним скалярним добутком.*

Доведення. Як вже відзначалося, $H_e = H_0^1(H_0;(a,b))$ є енергетичним простором оператора L_0, а відповідний енергетичний скалярний добуток $\pi_0(u,v) = (u|v)_e$ має вигляд (34).

Позначимо через $\mathcal{P}$ проектор $H_e \dot{+} \ker L \to H_e$ паралельно до $\ker L$, а через $\widehat{\Gamma}_2$ — лінійний оператор, визначений умовою

$$\widehat{\Gamma}_2 u = \begin{cases} 0, & u \in H_e \\ \Gamma_2 u, & u \in \ker L. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $\Gamma_2 \subset \widehat{\Gamma}_2$ (тому далі писатимемо Γ_2 замість $\widehat{\Gamma}_2$) і що для будь-якого $u \in H^1 = H_e \dot{+} \ker L$

$$\Gamma_2 u = (u(a), u(b)), \quad \mathcal{P}u = u - Z\Gamma_2 u. \tag{41}$$

Зазначимо, що остання рівність еквівалентна такій:

$$(\mathcal{P}u)(x) = u(x) - \omega_1(x)u(a) - \omega_2(x)u(b). \tag{42}$$

Із зауваження 3 та теореми 2 (див. також [27]) випливає, що енергетичний простір оператора T_B збігається з H^1, а відповідний енергетичний скалярний добуток $\widehat{\pi}_B(.|.)$ має такий вигляд:

$$(\forall u, v \in H^1) \quad \widehat{\pi}_B(u,v) = (\mathcal{P}u|\mathcal{P}v)_e + ((B-\Omega)\Gamma_2 u|\Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{X}u|\Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} + (\Gamma_2 u|\mathcal{X}v)_{\mathcal{H}}. \tag{43}$$

Приймемо $Z(x)(a_1,a_2) \stackrel{\text{def}}{=} Z(a_1,a_2)(x)(= \omega_1(x)a_1 + \omega_2(x)a_2)$. Беручи до уваги рівності $\omega_1(a) = \omega_2(b) = \mathbf{I}_{H_0}$, $\omega_1(b) = \omega_2(a) = \mathbf{0}$, (34), (41), (42) та застосовуючи формулу інтегрування частинами і рівності $\omega_i''(x) = p(x)\omega_i(x)$ $(i = 1,2)$, отримуємо

$$\begin{gathered}
(\mathcal{P}u|\mathcal{P}v)_e = \int_a^b [(u'(x) - Z'(x)\Gamma_2 u|v'(x) - Z'(x)\Gamma_2 v)_{H_0} + \\
+(p(x)(u(x) - Z(x)\Gamma_2 u)|v(x) - Z(x)\Gamma_2 v)_{H_0}]dx = (u'|v') - \\
- \int_a^b (Z'(x)\Gamma_2 u|v'(x))_{H_0}dx - \int_a^b (u'(x)|Z'(x)\Gamma_2 v)_{H_0}dx + \int_a^b (Z'(x)\Gamma_2 u|Z'(x)\Gamma_2 v)_{H_0}dx + \\
+ \int_a^b (p(x)(u(x) - Z(x)\Gamma_2 u)|v(x) - Z(x)\Gamma_2 v)_{H_0}dx = (u'|v') + (Z'(x)\Gamma_2 u|v(x))_{H_0} \,|_b^a + \\
+ \int_a^b (Z''(x)\Gamma_2 u|v(x))_{H_0}dx + (u(x)|Z'(x)\Gamma_2 v)_{H_0} \,|_b^a + \int_a^b (u(x)|Z''(x)\Gamma_2 v)_{H_0}dx + \\
+(Z'(x)\Gamma_2 u|Z(x)\Gamma_2 v)_{H_0} \,|_b^a - \int_a^b (Z''(x)\Gamma_2 u|Z(x)\Gamma_2 v)_{H_0}dx + \\
+ \int_a^b (p(x)u(x)|v(x))_{H_0}dx - \int_a^b (p(x)Z(x)\Gamma_2 u|v(x))_{H_0}dx - \\
- \int_a^b (p(x)u(x)|Z(x)\Gamma_2 v)_{H_0}dx + \int_a^b (p(x)Z(x)\Gamma_2 u|Z(x)\Gamma_2 v)_{H_0}dx = (u'|v') + \\
+ \int_a^b (p(x)u(x)|v(x))_{H_0}dx + [(Z'(a)\Gamma_2 u|v(a))_{H_0} - (Z'(b)\Gamma_2 u|v(b))_{H_0}] + \\
+[(u(a)|Z'(a)\Gamma_2 v)_{H_0} - (u(b)|Z'(b)\Gamma_2 v)_{H_0}] + [(Z'(b)\Gamma_2 u|Z(b)\Gamma_2 v)_{H_0} - \\
-(Z'(a)\Gamma_2 u|Z(a)\Gamma_2 v)_{H_0}] = (u'|v') + \int_a^b (p(x)u(x)|v(x))_{H_0}dx + (\Omega\Gamma_2 u|\Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} +
\end{gathered}$$

$$+(\Gamma_2 u|\Omega\Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} - (\Omega\Gamma_2 u|\Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} = \int_a^b [(u'(x)|v'(x))_{H_0} + (p(x)u(x)|v(x))_{H_0}]dx + (\Omega\Gamma_2 u|\Gamma_2 v)_{\mathcal{H}}$$

(оскільки $\Omega = \Omega^*$). Звідси, з (39) та (43) випливає, що $\widehat{\pi}_B(u,v) = \pi(u,v)$. □

Наслідок 3. *В умовах теореми 3 варіаційна задача* $J[u] \to \min,\ u \in H^1$, *де* J *визначено згідно з (40), для будь-якого* $f \in H$ *має єдиний розв'язок* $u_0 = T_B^{-1}f$. *При цьому* $J[u_0] = -(T_B u_0|u_0) = -(f|u_0)$.

Доведення. Див. доведення наслідку 2. □

ЛІТЕРАТУРА

1. H.M. Pipa, O.G. Storozh, *Accretive perturbations of proper extensions for positively definite operator*, Mat. Stud. **25** (2006), №2, 181–190. (in Ukrainian)
2. K. Friedrichs, *Spektral theorie nalbbeschraanter Operatoren und Anwendungauf die Spektral-zerlegung von Differential operatoren*, Math. Ann. **109** (1934), 465–487.
3. M.G. Krein, *The theory of self-adjoint extensions of semibounded Hermitian operators and its applications, I*, Mat. Sb., **20** (1947), №3, 431–495. (in Russian)
4. S.G. Mihlin, Variational Methods in Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1970. (in Russian)
5. A.N. Kochubei, *On extensions of positively definite symmetric operator,* Dopov. Nats. Acad. Nauk Ukr. **3** (1979), 34–39. (in Ukrainian)
6. V.A. Michailets, *Spectra of operators and boundary problems*, Math. Inst. of the Acad. of Sc. of Ukr. SSR (1980), 106–131. (in Russian)
7. V.I. Gorbachuk. M.L. Gorbachuk, Boundary Value Problems for Differential-Operator Equations, Naukova Dumka, Kyiv, 1984. (in Russian)
8. Yu.M. Arlinskii, Maximal accretive extensions of sectorial operators.-Manuscript. Thesis for doctor's degree by speciality 01.01.01 - math. Anal. - Institute of Math., Nats. Acad. Nauk Ukr., Kyiv, 2000. (in Ukrainian)
9. V.A. Derkach, M.M. Malamud, E.R. Tsekanowskii, *Sectorial extensions of the positive operator and the chararterystic function*, Ukr. Mat. Zh., **41** (1989), №2, 151–158. (in Russian)
10. A.W. Straus, *On the extensions of semibounded optrator*, Dokl Acad. Nauk of the USSR **231** (1973), №3, 543–546. (in Russian)
11. M.Sh. Birman, *On the selfadjoint extensions of positively definite operators*, Mat. Sb. **38 (80)** (1956), №4, 431–450. (in Russian)
12. M.M. Malamud, *On some classes of the extensions of Hermitian operator with the gapes*, Ukr. Mat. Zh. **44** (1992), №2, 215–233. (in Russian)
13. E.A. Coddington, H.S.V. de Snoo, *Positive self-adjoint extensions of positive symmetric subspaces*, Math. Z., **159** (1978), №3, 203–214.
14. Yu.M. Arlinskii, S. Hassi, Z.Sebestien, H.S.V. de Snoo, *On the class of extremal extensions of a nonnegative operator*, Oper. Theory Adv. Appl. **127** (2001), 41–81.
15. V.A. Derkach, M.M. Malamud, Weyl function of Hermitian operator and its connection with characteristic function, Preprint 85-9 (104), Donetsk. Fiz.- Tekhn. Inst. Acad. Nauk Ukrainian SSR, Donetsk, 1985. (in Russian)
16. A.N. Kochubei, *On extensions of symmetric operators and symmetric binary relations*, Mat. Zametki **17** (1975), №1, 41–48. (in Russian)

17. H.M. Pipa, O.G. Storozh, *On some perturbations chainging the domain of proper extension positively definite operator*, Methods of Functional Anal. and Topology **11** (2005), №3, 257–269.
18. V.E. Lyantse, O.G. Storozh, Methods of the theory of Unbounded Operators, Naukova Dumka, Kyiv, 1983. (in Russian)
19. O.G. Storozh, *On some analytic and asymptotic properties of the Weyl function of a nonnegative operator*, Mat. Metody Phys.-Mekh. Polya **43** (2000), №4, 18–23. (in Ukrainian)
20. O.G. Storozh, Extensions theory methods and differential-boundary operators, Doctor of Sciences thesis, Lviv, 1995. (in Ukrainian)
21. O.Ya. Mylyo, H.M. Pipa, O.G. Storozh, *On the Weyl function and extremal extensions of a semsmooth restriction of positively definite operator*, Mat. Metody Phys.-Mekh. Polya **46** (2003), №4, 73–80. (in Ukrainian)
22. O.G. Storozh, *Second order differential-boundary operator in vector-function, associated with quadratic form*, Mat. Stud. **2** (1993), 59–63. (in Ukrainian)
23. O.Ya. Mylyo, O.G. Storozh, *Maximal accretivity and maximal nonnegativity conditions for a class of finite-dimensional perturbations of positively definite operator*, Math. Stud. **12** (1999), №1, 90–100. (in Ukrainian)
24. M.A. Naimark, Linear Differential Operators, Nauka, Moscow, 1969 (in Russian)
25. F.Z. Ziatdinov, *On linear differential operators of the second order in Hilbert space of vector-functions taking values in abstract Hilbert space*, Izv. Vuzov. Mat. **4** (1960), 89–100. (in Russian)
26. F.S. Rofe-Beketov, *Self-adjoint extensions of differential operators in the space of vector-functions*, Dokl. of the Acad. of the Sc. USSR, **184** (1969), №5, 1034–1037. (in Russian)
27. H.M. Pipa, *Nonnegative and accretive perturbations of the operator of the third boundary problem for the Sturm-Liouville differential expression with the bounded operator potentsial*,Visn. L'viv Univ. Ser. Mekh.-Math. **68** (2007), 207–214. (in Ukrainian)
28. O.G. Storozh, O.B. Shuvar, *On a class of almost bounded perturbations of smooth restrictions of closed operator*, Ukr. Mat. Zh. **54** (2002), №10, 1396–1402. (in Russian)

ВП НУБіП України "Бережанський агротехнічний інститут",
a.kachurivska@mail.ru

Львівський національний університет імені Івана Франка,
storog@ukr.net

Надійшло 17.06.2011