УДК 517.52

В. Ю. Слюсарчук

# ОПЕРАТОРНІ АНАЛОГИ ОЗНАКИ КУММЕРА

V. Yu. Slyusarchuk. *Operator analogues of Kummer's test*, Mat. Stud. **36** (2011), 188–196.

We obtain the conditions for convergence of operator series.

В. Е. Слюсарчук. *Операторные аналоги признака Куммера* // Мат. Студії. – 2011. – Т.36, №2. – С.188–196.

Приведены условия сходимости операторных рядов.

**1. Основний об'єкт досліджень.** Нагадаємо загальну ознаку збіжності числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

де $a_n \in (0, +\infty)$, $n \geqslant 1$, що належить Е. Е. Куммеру.

**Теорема 1** (**Ознака Куммера.** [1]). *Нехай $(c_n)_{n\geqslant 1}$ — довільна послідовність додатних чисел. Якщо $c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geqslant \delta$ для деякого числа $\delta > 0$ і всіх досить великих $n$, то ряд* (1) *збігається. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ розбігається і $c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leqslant 0$ для всіх досить великих $n$, то ряд* (1) *розбігається.*

Узагальнення цієї ознаки містяться в [2].

Метою статті є встановлення для операторних рядів тверджень, аналогічних до наведеної ознаки.

**2. Допоміжні результати про конуси і додатні оператори та ознаки порівняння.** При встановленні операторних аналогів ознаки Куммера використовуватимемо деякі відомості про конуси та додатні оператори, теорія яких викладена в [3], та операторний аналог ознаки порівняння.

**2.1. Конуси.** Нехай $E$ — дійсний банаховий простір. Опуклу замкнену множину $K \subset E$ називають *конусом*, якщо ця множина містить разом із кожною точкою промінь, що проходить через точку і виходить із нуля, тобто, якщо $x + y, \alpha x \in K$ для всіх $x, y \in K$ і $\alpha \geqslant 0$, і $K \cap (-K) = \{0\}$.

Покладемо $x \leqslant y$, якщо $y - x \in K$. Очевидно, що $x \leqslant x$ і з $x \leqslant y$, $y \leqslant z$ випливає нерівність $x \leqslant z$. Таким чином, кожний конус визначає в $E$ деяку напівупорядкованість. Ця напівупорядкованість узгоджена з лінійністю простору $E$ в тому сенсі, що з $x \leqslant y$ випливає $tx \leqslant ty$ при $t \geqslant 0$ і випливає $tx \geqslant ty$ при $t \leqslant 0$, а з $x_1 \leqslant y_1$ і $x_2 \leqslant y_2$ випливає $x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$. З $x \leqslant y$ і $y \leqslant x$ випливає рівність $x = y$.

Далі будемо вважати, що банаховий простір $E$ напівупорядкований конусом $K$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 41-06, 47A11.
*Keywords:* operator series, Kummer's test.

Конус $K$ називають *тілесним*, якщо він містить кулю ненульового радіуса, і *відтворювальним*, якщо кожний елемент $x \in E$ подається у вигляді

$$x = u - v, \tag{2}$$

де $u, v \in K$.

Конус $K$ називають *несплющеним*, якщо існує таке число $c > 0$, що кожний елемент $x \in E$ має зображення (2), в якому

$$\|u\|_E \leqslant c\|x\|_E \text{ і } \|v\|_E \leqslant c\|x\|_E. \tag{3}$$

Зазначимо, що кожний тілесний конус є відтворювальним. Справді, якщо замкнена куля $B[a, r] = \{y \in E\colon \|y - a\|_E \leqslant r\}$, де $a \in K$ і $r \in (0, +\infty)$, є підмножиною конуса $K$, то для кожного елемента $x \in E$ справджується співвідношення

$$x = \frac{\|x\|_E}{r}a - \left(\frac{\|x\|_E}{r}a - x\right),$$

в якому $\frac{\|x\|_E}{r}a,\ \frac{\|x\|_E}{r}a - x \in K$.

Кожний відтворювальний конус в банаховому просторі є несплющеним [3].

Норму в $E$ називають *монотонною*, якщо з $0 \leqslant x \leqslant y$ випливає $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$. Якщо з $0 \leqslant x \leqslant y$ випливає $\|x\|_E \leqslant b\|y\|_E$, де $b$ — універсальна стала, то норму називають *напівмонотонною.*

Конус $K$ називають *гострим*, якщо норма в $E$ монотонна, і *нормальним*, якщо норма напівмонотонна.

Послідовність $(x_n)_{n\geqslant 1}$ називають *монотонно зростаючою*, якщо

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots .$$

Цю послідовність називають *обмеженою* (*зверху*), якщо $x_n \leqslant z$, $n = 1, 2, \ldots$, для деякого елемента $z \in E$. Аналогічно визначається *монотонно спадна* і *обмежена* (*знизу*) послідовність. Послідовність $(x_n)_{n\geqslant 1}$ називають *обмеженою за нормою*, якщо $\|x_n\|_E \leqslant M$, $n = 1, 2, \ldots$, для деякого числа $M \in (0, +\infty)$.

Конус $K$ називають *правильним*, якщо кожна обмежена монотонна послідовність збігається за нормою. Конус $K$ називають *цілком правильним*, якщо кожна обмежена за нормою монотонна послідовність збігається за нормою.

Зазначимо, що кожний цілком правильний конус правильний, а кожний правильний конус нормальний [3].

**2.2. Додатні і додатно оборотні оператори.** Нехай оператор $A$ діє з банахового простору $E_i$ з клином $K_i$ у банаховий простір $E_j$ з клином $K_j$, де $i, j \in \{1, 2\}$. Оператор $A$ називають *додатним*, якщо $AK_i \subset K_j$, тобто з $x \geqslant 0$ випливає $Ax \geqslant 0$.

Оператор $A$ називають *монотонним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає $Ax \leqslant Ay$. Очевидно, що лінійний додатний оператор $A\colon E_i \to E_j$ є монотонним.

Лінійний неперервний оператор $B$, що діє з банахового простору $E_i$ з клином $K_i$ у банаховий простір $E_j$ з клином $K_j$, називають *додатно оборотним*, якщо цей оператор має неперервний обернений $B^{-1}$ і $B^{-1}K_j \subset K_i$.

Зазначимо, що загальні теореми про додатну оборотність операторів наведено в [3].

Якщо для операторів $A, B \in L(E_i, E_j)$ оператор $A - B$ є додатним, то будемо записувати $A \geqslant B$. Очевидно, що множина всіх додатних операторів $A \in L(E_i, E_j)$ є конусом у просторі $L(E_i, E_j)$. Цей конус позначатимемо через $K(E_i, E_j)$. Також очевидно, що $K(E_j, E_s)K(E_i, E_j) \subset K(E_i, E_s)$, $s \in \{1, 2\}$.

**2.3. Деякі відомості про операторні ряди.** Нехай $E_1$ і $E_2$ — довільні дійсні банахові простори. Операторний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n, \tag{4}$$

де $U_n \in L(E_1, E_2)$, $n \geqslant 1$, називається *збіжним*, якщо існує такий елемент $S \in L(E_1, E_2)$, що

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} U_k - S \right\|_{L(E_1,E_2)} = 0.$$

Якщо такого елемента не існує, то ряд (4) називається *розбіжним.*

Важливим для операторних рядів є наступне твердження.

**Теорема 2.** *Ряд* (4) *збігається тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{n_1\to\infty,\ n_2\to\infty} \left\| \sum_{k=n_1}^{n_2} U_k \right\|_{L(E_1,E_2)} = 0.$$

Ця теорема доводиться аналогічним чином, як і у випадку числових рядів.

**Зауваження 1.** Якщо ряд (4) збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|U_n\|_{L(E_1,E_2)} = 0$.

**Зауваження 2.** Якщо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|U_n\|_{L(E_1,E_2)} \neq 0$, то ряд (4) розбігається.

У подальшому крім теореми 2 використовуватимемо також наступну властивість операторних рядів: для довільних лінійних неперервних операторів $C \in L(E_2, E_i)$ і $D \in L(E_j, E_1)$, $i, j \in \{1, 2\}$, що мають неперервні обернені оператори, ряди (4) і

$$\sum_{n=1}^{\infty} C U_n D$$

одночасно збігаються або розбігаються.

**2.4. Ознаки порівняння для операторних рядів.** Розглянемо операторні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n, \tag{6}$$

де $A_n, B_n \in L(E_1, E_2)$, $n \geqslant 1$.

Будемо використовувати наступні умови.

**Умова А**. Банаховий простір $E_1$ напівупорядкований відтворювальним конусом $K_1$, а банаховий простір $E_2$ напівупорядкований правильним конусом $K_2$.

**Умова Б**. Лінійні неперервні оператори $A_n\colon E_1 \to E_2$ і $B_n\colon E_1 \to E_2$, $n \geqslant 1$, є додатними.

**Теорема 3.** *Нехай:*

*1) виконуються умови А і Б;*

*2) для всіх $n \geqslant 1$*

$$A_n \leqslant B_n. \tag{7}$$

*Тоді із збіжності ряду (6) випливає збіжність ряду (5), а із розбіжності ряду (5) випливає розбіжність ряду (6).*

*Доведення.* Розглянемо частинні суми

$$S_{n,A} = \sum_{k=1}^{n} A_k \quad \text{і} \quad S_{n,B} = \sum_{k=1}^{n} B_k$$

рядів (5) і (6). Завдяки (7) і додатності операторів $A_n$ і $B_n$, $n \geqslant 1$, справджується співвідношення

$$S_{n,A} \leqslant S_{n,B} \leqslant S_{m,B} \tag{8}$$

для всіх $n \geqslant 1$ і $m \geqslant n$.

Нехай ряд (6) збігається і його сумою є оператор $S_B \in L(E_1, E_2)$, тобто

$$\lim_{m\to\infty} \|S_{m,B} - S_B\|_{L(E_1,E_2)} = 0. \tag{9}$$

Оскільки на підставі (8) $(S_{m,B} - S_{n,A})x \geqslant 0$ для всіх $x \in K_1$, $n \geqslant 1$ і $m \geqslant n$, то завдяки (9) і замкненості конуса $K_1$

$$\lim_{m\to\infty} (S_{m,B} - S_{n,A})x = (S_B - S_{n,A})x \geqslant 0$$

для всіх $x \in K_1$ і $n \geqslant 1$. Тому

$$S_{n,A} \leqslant S_B, \quad n \geqslant 1. \tag{10}$$

Отже, на підставі (10) і додатності операторів $A_n$, $n \geqslant 1$, для кожного вектора $x \in K_1$ послідовність $(S_{n,A}x)_{n\geqslant 1}$ монотонно зростаюча і обмежена зверху. Завдяки правильності конуса $K_2$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n,A}x$ для кожного $x \in K_1$. Оскільки конус $K_1$ відтворювальний, то існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n,A}x$ для кожного $x \in E_1$. Тому за допомогою рівності $S_Ax = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n,A}x$ визначається оператор $S_A$, що діє з $E_1$ в $E_2$. Цей оператор лінійний, оскільки оператори $S_{n,A}$, $n \geqslant 1$, лінійні, і неперервний на підставі теореми Банаха–Штейнгауза [4] (умови теореми виконуються, оскільки кожна збіжна послідовність $(S_{n,A}x)_{n\geqslant 1}$, $x \in E_1$, обмежена).

Далі покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{n,A} - S_A\|_{L(E_1,E_2)} = 0. \tag{11}$$

Зазначимо, що на підставі (7) і додатності операторів $A_n$ і $B_n$, $n \geqslant 1$,

$$S_{m,A} - S_{n,A} \leqslant S_{m,B} - S_{n,B}, \quad 1 \leqslant n < m,$$

тобто

$$(S_{m,A} - S_{n,A})y \leqslant (S_{m,B} - S_{n,B})y, \quad 1 \leqslant n < m,$$

для кожного $y \in K_1$. Використовуючи це співвідношення, несплющеність конуса $K_1$, співвідношення (2) і (3) та нормальність конуса $K_2$, отримаємо

$$\|S_{m,A} - S_{n,A}\|_{L(E_1,E_2)} = \sup_{\|x\|_{E_1}=1} \|(S_{m,A} - S_{n,A})x\|_{E_2} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{u,v\in K_1,\ \|u-v\|_{E_1}=1,\ \|u\|_{E_1}\leqslant c,\ \|u\|_{E_1}\leqslant c} \left\|(S_{m,A} - S_{n,A})(u-v)\right\|_{E_2} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{u,v\in K_1,\ \|u\|_{E_1}\leqslant c,\ \|v\|_{E_1}\leqslant c} \left\|(S_{m,A} - S_{n,A})(u-v)\right\|_{E_2} \leqslant 2 \sup_{u\in K_1,\ \|u\|_{E_1}\leqslant c} \|(S_{m,A} - S_{n,A})u\|_{E_2} =$$
$$= 2 \sup_{u\in K_1,\ \|u\|_{E_1}=c} \|(S_{m,A} - S_{n,A})u\|_{E_2} = 2c \sup_{u\in K_1,\ \|u\|_{E_1}=1} \|(S_{m,A} - S_{n,A})u\|_{E_2} \leqslant$$
$$\leqslant 2bc \sup_{u\in K_1,\ \|u\|_{E_1}=1} \|(S_{m,B} - S_{n,B})u\|_{E_2} \leqslant 2bc \sup_{x\in E_1,\ \|x\|_{E_1}=1} \|(S_{m,B} - S_{n,B})x\|_{E_2} =$$
$$= 2bc\|S_{m,B} - S_{n,B}\|_{L(E_1,E_2)}.$$

Тут $b$ і $c$ — сталі, що використовуються в означенні напівмонотонної норми та несплющеного конуса.

Отже, $\|S_{m,A} - S_{n,A}\|_{L(E_1,E_2)} \leqslant 2bc\|S_{m,B} - S_{n,B}\|_{L(E_1,E_2)}$, якщо $1 \leqslant n < m$. Звідси і (9) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty,\ m\to\infty} \|S_{m,A} - S_{n,A}\|_{L(E_1,E_2)} = 0.$$

Цього співвідношення на підставі теореми 2 достатньо для виконання рівності (11).

Таким чином, ряд (5) збігається, якщо збігається ряд (6).

У випадку розбіжного ряду (5) ряд (6) не може бути збіжним на підставі наведених вище міркувань. □

**Зауваження 3.** Твердження теореми 2 справджується, якщо в умовах А і Б $E_1 = E_2$ і $K_1 = K_2$.

**3. Операторні аналоги ознаки Куммера.** Основними твердженнями статті є наступні дві теореми.

**Теорема 4.** *Нехай:*

1) *виконується умова А;*
2) *лінійні неперервні оператори $A_n \colon E_1 \to E_2$, $n \geqslant 1$, є додатними і додатно оборотними;*
3) *$C_n \in L(E_2, E_i)$, $n \geqslant 1$, — довільні додатні і додатно оборотні оператори, де $i \in \{1, 2\}$.*

*Якщо для деякого додатного і оборотного оператора $D \in L(E_2, E_i)$ виконується співвідношення*

$$C_n A_n A_{n+1}^{-1} - C_{n+1} \geqslant D \tag{12}$$

*для всіх досить великих $n$ і конус $K(E_1, E_i)$ є правильним, то ряд (5) збігається.*

*Якщо ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{-1} \tag{13}$$

*розбігається і*

$$C_n A_n A_{n+1}^{-1} \leqslant C_{n+1} \tag{14}$$

*для всіх досить великих $n$, то ряд (5) розбігається.*

**Теорема 5.** *Нехай:*

1) *виконується умова А;*
2) *лінійні неперервні оператори $A_n\colon E_1 \to E_2$, $n \geqslant 1$, є додатними і додатно оборотними;*
3) *$C_n \in L(E_i, E_1)$, $n \geqslant 1$, — довільні додатні і додатно оборотні оператори, де $i \in \{1, 2\}$.*

*Якщо для деякого додатного і оборотного оператора $D \in L(E_i, E_1)$ виконується співвідношення $A_{n+1}^{-1} A_n C_n - C_{n+1} \geqslant D$для всіх досить великих $n$ і конус $K(E_i, E_2)$ є правильним, то ряд (5) збігається.*

*Якщо ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{-1}$$

*розбігається і $A_{n+1}^{-1} A_n C_n \leqslant C_{n+1}$ для всіх досить великих $n$, то ряд (5) розбігається.*

**Зауваження 4.** Умова про правильність конусів $K(E_1, E_i)$ і $K(E_i, E_2)$, $i \in \{1, 2\}$, в теоремах 4 і 5, якої немає в теоремі 1, для числових рядів завжди виконується. Для цих рядів $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$ і $K_1 = K_2 = K(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = [0, +\infty)$.

**Доведення теореми 4.** Спочатку доведемо першу частину твердження теореми. Завдяки (12) і додатності операторів $A_n$, $n \geqslant 1$, для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$ справджується співвідношення

$$C_n A_n - C_{n+1} A_{n+1} \geqslant D A_{n+1}, \ n \geqslant n_0. \tag{15}$$

Тому $C_n A_n \geqslant C_{n+1} A_{n+1} \geqslant O$, $n \geqslant n_0$, де $O$ — нульовий елемент конуса $K(E_1, E_i)$. На підставі цього співвідношення та правильності і замкненості конуса $K(E_1, E_i)$ існує такий оператор $V \in K(E_1, E_i)$, що

$$\lim_{n \to \infty} \| C_n A_n - V \|_{L(E_1, E_i)} = 0. \tag{16}$$

Розглянемо операторний ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} (C_n A_n - C_{n+1} A_{n+1})$. Цей ряд збігається в силу (16), означення збіжного ряду і того, що для кожного $m \geqslant n_0$

$$\sum_{n=n_0}^{m} (C_n A_n - C_{n+1} A_{n+1}) = C_{n_0} A_{n_0} - C_{m+1} A_{m+1}.$$

Тоді завдяки (15) та теоремі 3 і зауваженню 1 збіжним є ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} D A_{n+1}$. Оскільки оператор $D$ має неперервний обернений оператор, то збіжним є ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_{n+1}$. Отже, збіжним є і ряд (5).

Тепер доведемо другу частину твердження теореми. Завдяки (14) для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$

$$C_n A_n A_{n+1}^{-1} \leqslant C_{n+1}, \ n \geqslant n_0.$$

Тому на підставі додатності операторів $A_n$, $n \geqslant 1$, $C_n A_n \leqslant C_{n+1} A_{n+1}, \ n \geqslant n_0$.

Отже, $C_{n_0} A_{n_0} \leqslant C_n A_n, \ n \geqslant n_0$. Звідси та з додатності і додатної оборотності операторів $A_n$, $C_n$, $n \geqslant 1$, отримуємо, що

$$C_n^{-1} \leqslant A_n D, \ n \geqslant n_0, \tag{17}$$

де $D = A_{n_0}^{-1} C_{n_0}^{-1}$. Із співвідношення (17), теореми 3, зауваження 1 і розбіжності ряду (13) випливає розбіжність ряду $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n D$. Оскільки оператор $D$ має неперервний обернений оператор, то ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n$ розбігається. Отже, розбігається і ряд (5). $\square$

Теорема 5 доводиться подібно.

**Зауваження 5.** Умови про правильність конусів $K(E_1, E_i)$ і $K(E_i, E_2)$, $i \in \{1, 2\}$, в теоремах 4 і 5, не можна відкинути. Правильність цих конусів не випливає з відтворювальності конуса $K_1$ і правильності конуса $K_2$, що підтверджується наступним прикладом.

**Приклад.** Використаємо дійсний банаховий простір $l_1$ числових послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, для кожної з яких $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$, з нормою $\|x\|_{l_1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Вважатимемо, що простір $l_1$ напівупорядкований конусом $K$ послідовностей з невід'ємними компонентами. Цей конус відтворювальний. Справді, кожний елемент $x \in l_1$ можна подати у вигляді (2), де $u = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$ і $v = (v_1, v_2, \dots, v_n, \dots)$ — елементи конуса $K$, що визначаються наступним чином. Для кожного натурального числа $n \leqslant 1$

$$u_n = \begin{cases} x_n, & \text{якщо } x_n \geqslant 0, \\ 0, & \text{якщо } x_n < 0, \end{cases} \text{ і } v_n = \begin{cases} -x_n, & \text{якщо } x_n < 0, \\ 0, & \text{якщо } x_n \geqslant 0. \end{cases}$$

Конус $K$ також є правильним, оскільки норма в $l_1$ монотонна. Справді, якщо для послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ і $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ справджується співвідношення $0 \leqslant x \leqslant y$, то $0 \leqslant x_n \leqslant y_n$ для всіх $n \leqslant 1$. Тому $\|x\|_{l_1} \leqslant \|y\|_{l_1}$.

Далі вважатимемо, що $E_1 = E_2 = l_1$ і $K_1 = K_2 = K$.

Покажемо, що конус $K(l_1, l_1)$ не являється правильним.

Розглянемо оператори $L_m \colon l_1 \to l_1$, $m \geqslant 1$, що визначаються рівностями

$$(L_m x)_n = \begin{cases} x_n, & \text{якщо } n \leqslant m, \\ \dfrac{x_n}{2}, & \text{якщо } n > m, \end{cases} \quad m \geqslant 1.$$

Очевидно, що ці оператори є елементами конуса $K(l_1, l_1)$. Вони додатно оборотні й утворюють монотонно зростаючу послідовність, обмежену зверху одиничним елементом $I \in K(l_1, l_1)$. Ця послідовність не являється збіжною за нормою, оскільки для кожних $m \geqslant 1$ і $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in l_1$

$$(L_{m+1} - L_m) y = \begin{cases} \dfrac{y_{m+1}}{2}, & \text{якщо } n = m + 1, \\ 0, & \text{якщо } n \in \mathbb{N} \setminus \{m + 1\}, \end{cases}$$

і тому $\|L_{m+1} - L_m\|_{L(l_1, l_1)} = \frac{1}{2}$, $m \geqslant 1$.

**Зауваження 6.** Умови про правильність конусів $K(E_1, E_i)$ і $K(E_i, E_2)$ в теоремах 4 і 5 можна замінити на умови існування границь $\lim\limits_{n \to \infty} C_n A_n$ і $\lim\limits_{n \to \infty} A_n C_n$ відповідно. На практиці цю умову легше перевіряти, ніж умову про правильність конусів.

**4. Приклади застосувань основних теорем.** За допомогою теорем 4 і 5 можна отримувати для операторних рядів ознаки, аналогічні до ознак Даламбера, Раабе, та до інших ознак.

Позначимо через $l_{-1}(x), l_0(x), l_1(x), \dots, l_m(x)$ функції $1, x, \ln x, \dots, \underbrace{\ln \ln \dots \ln}_{m \text{ разів}} s$ відповідно і розглянемо для кожного $m \in \{-1, 0\} \cup \mathbb{N}$ функцію $\Pi_m(x) = \prod\limits_{k=-1}^{m} l_k(x)$. Очевидно, що числовий ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty}(\Pi_m(n))^{-1}$, де $n_0$ — таке натуральне число, що $l_m(n_0) > 0$, є розбіжним. Тому розбіжними є операторні ряди

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}(\Pi_m(n))^{-1}I_i,\ i=\overline{1,2},$$

де $I_i$ — одиничний елемент простору $L(E_i, E_i)$.

Далі будемо вважати, що виконуються перші дві умови теорем 4 і 5.

Покладаючи в теоремах 4 і 5 $C_n = \Pi_m(n)I_2$, $i=2$ і $C_n = \Pi_m(n)I_1$, $i=1$ відповідно, отримуємо наступні твердження.

**Теорема 6.** *Нехай $m \in \{-1, 0\} \cup \mathbb{N}$.*

*Якщо для деякого додатного і оборотного оператора $D \in L(E_2, E_2)$ виконується співвідношення*

$$A_n A_{n+1}^{-1} \geqslant \Pi_m(n+1)(\Pi_m(n))^{-1}I_2 + (\Pi_m(n))^{-1}D$$

*для всіх досить великих $n$ і конус $K(E_1, E_2)$ є правильним, то ряд (5) збігається.*

*Якщо $A_n A_{n+1}^{-1} \leqslant \Pi_m(n+1)(\Pi_m(n))^{-1}I_2$ для всіх досить великих $n$, то ряд (5) розбігається.*

**Теорема 7.** *Нехай $m \in \{-1, 0\} \cup \mathbb{N}$.*

*Якщо для деякого додатного і оборотного оператора $D \in L(E_1, E_1)$ виконується співвідношення*

$$A_{n+1}^{-1} A_n \geqslant \Pi_m(n+1)(\Pi_m(n))^{-1}I_1 + (\Pi_m(n))^{-1}D$$

*для всіх досить великих $n$ і конус $K(E_1, E_2)$ є правильним, то ряд (5) збігається.*

*Якщо $A_{n+1}^{-1} A_n \leqslant \Pi_m(n+1)(\Pi_m(n))^{-1}I_1$ для всіх досить великих $n$, то ряд (5) розбігається.*

У випадку $m = -1$ ці твердження мають вигляд.

**Теорема 8.** *Якщо для деякого додатного і оборотного оператора $D \in L(E_2, E_2)$ виконується співвідношення $A_n A_{n+1}^{-1} \geqslant I_2 + D$ для всіх досить великих $n$ і конус $K(E_1, E_2)$ є правильним, то ряд (5) збігається.*

*Якщо $A_n A_{n+1}^{-1} \leqslant I_2$ для всіх досить великих $n$, то ряд (5) розбігається.*

**Теорема 9.** *Якщо для деякого додатного і оборотного оператора $D \in L(E_1, E_1)$ виконується співвідношення $A_{n+1}^{-1} A_n \geqslant I_1 + D$ для всіх досить великих $n$ і конус $K(E_1, E_2)$ є правильним, то ряд (5) збігається.*

*Якщо $A_{n+1}^{-1} A_n \leqslant I_1$ для всіх досить великих $n$, то ряд (5) розбігається.*

Ці теореми є оператоними аналогами теореми д'Аламбера [1].

У випадку $m = 0$ твердження теорем 6 і 7 мають вигляд.

**Теорема 10.** *Якщо для деякого додатного і оборотного оператора $D \in L(E_2, E_2)$ виконується співвідношення*

$$A_n A_{n+1}^{-1} \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) I_2 + \frac{1}{n} D$$

*для всіх досить великих $n$ і конус $K(E_1, E_2)$ є правильним, то ряд (5) збігається.*

*Якщо $A_n A_{n+1}^{-1} \leqslant (1 + 1/n)\, I_2$ для всіх досить великих $n$, то ряд (5) розбігається.*

**Теорема 11.** *Нехай* $m \in \{-1, 0\} \cup \mathbb{N}$.

*Якщо для деякого додатного і оборотного оператора* $D \in L(E_1, E_1)$ *виконується співвідношення*

$$A_{n+1}^{-1} A_n \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) I_1 + \frac{1}{n} D$$

*для всіх досить великих* $n$ *і конус* $K(E_1, E_2)$ *є правильним, то ряд* (5) *збігається.*

*Якщо*

$$A_{n+1}^{-1} A_n \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) I_1$$

*для всіх досить великих* $n$, *то ряд* (5) *розбігається.*

Ці теореми є операторними аналогами ознаки Раабе [1].

Очевидно, що процес отримання ознак збіжності операторних рядів можна було б продовжувати і далі.

Завершуючи статтю, зазначимо, що збіжність операторних рядів з недодатними членами досліджувалися в [5]–[8].

## ЛІТЕРАТУРА


1. Fichtengolz G.M. Course of the differential and integral calculus, V.2. – Moskow: Nauka, 1966. – 800p. (in Russian)
2. Slyusarchuk V.Yu. General theorems of converging numerical series. – Rivne: Rivne State Technical University Publishing House, 2001. – 240p. (in Ukrainian)
3. Krasnosel'skii M.A., Lifshic E A., Sobolev A.V. Positive linear systems: method of positive operators. – Moskow: Nauka, 1985. – 256p. (in Russian)
4. Lyusternik L.A., Sobolev V.I. Elements of functional analysis. – Moskow: Nauka, 1965. – 520 p. (in Russian)
5. Slyusarchuk V.Yu. *Conditions of converging operator series* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-A}$// Nauk. Visn. Chernivets'kogo Univ. Mat. – 2009. – №485. – P. 113–117. (in Ukrainian)
6. Slyusarchuk V.Ye. *Operator analogue of D'Alembert's test*// Mathematics today '09. – Kiev: Osvita Ukraine, 2009. – №15. – P. 101–115. (in Russian)
7. Slyusarchuk V.Yu. *Operator analogue of Cauchy's test*// Mat. Stud. – 2010. – V.33, №1. – P. 97–100. (in Ukrainian)
8. Slyusarchuk V.Yu. *Operator analogue of Bertrand's test*// Mat. Stud. – 2011. – V.35, №2. – P. 181–195. (in Ukrainian)



Національний університет водного
господарства та природокористування,
V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua


*Надійшло 20.04.2011*