УДК 517.53

П. В. Філевич

АНАЛІТИЧНЕ ПРОДОВЖЕННЯ ВИПАДКОВИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

P. V. Filevych. *An analytic continuation of random analytic functions*, Mat. Stud. **36** (2011), 128–132.

Let $(\eta_n(\omega))$ be a sequence of independent random variables such that $\eta_n(\omega)$ takes the values -1 and 1 with the probabilities p_n and $1-p_n$, respectively. Put $q_n = \min\{p_n, 1-p_n\}$. Then, for each complex sequence (a_n) such that $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, the circle $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ is the natural boundary for the function $f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta_n(\omega) z^n$ almost surely if and only if the condition $\sum_{k=0}^{\infty} q_{n_k} = +\infty$ holds for every increasing sequence (n_k) of nonnegative integers such that $\varliminf\limits_{k\to\infty} \frac{n_k}{k} < +\infty$.

П. В. Филевич. *Аналитическое продолжение случайных аналитических функций* // Мат. Студії. – 2011. – Т.36, №2. – C.128–132.

Пусть $(\eta_n(\omega))$ — последовательность независимых случайных величин таких, что $\eta_n(\omega)$ принимает значения -1 и 1 с вероятностями p_n и $1-p_n$ соответственно. Положим $q_n = \min\{p_n, 1-p_n\}$. Тогда для любой комплексной последовательности (a_n) такой, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, окружность $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ почти наверное является естественной границей для функции $f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta_n(\omega) z^n$ тогда и только тогда, когда для любой возрастающей последовательности (n_k) неотрицательных целых чисел такой, что $\varliminf\limits_{k\to\infty} \frac{n_k}{k} < +\infty$, выполняется условие $\sum_{k=0}^{\infty} q_{n_k} = +\infty$.

1. Вступ. Нехай $C_R = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = R\}$, $D_R = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\}$ для кожного $R \in (0, +\infty)$. Розглянемо довільну аналітичну в околі точки $z = 0$ функцію f. Кожну таку функцію можна розвинути в степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

з радіусом збіжності $R_f > 0$. Нехай $R_f < +\infty$. Точку $z_0 \in C_{R_f}$ називаємо особливою точкою функції f, якщо не існує числа $\varepsilon > 0$ такого, що цю функцію можна аналітично продовжити в круг $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| < \varepsilon\}$. Сукупність усіх точок з C_{R_f}, які не є особливими, позначатимемо $\mathcal{R}_f$. Добре відомо, що кожна функція f вигляду (1) має на колі C_{R_f} принаймні одну особливу точку, тобто множина $\mathcal{R}_f$ є відкритою строгою підмножиною кола C_{R_f}. Однак, може статися так, що коло C_{R_f} є природною межею для

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30B20, 30D20.
Keywords: random analytic function, singular point, analytic continuation, natural boundary.

функції f, тобто $\mathcal{R}_f = \varnothing$. Відомим прикладом такої функції є функція Вейєрштрасса $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. Загалом, правильна така теорема Е. Фабрі [1].

Теорема A. *Нехай (n_k) — зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел така, що*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{k} = +\infty. \tag{2}$$

Тоді для довільної аналітичної в D_1 функції вигляду $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}$ з $R_f = 1$ коло C_1 є природною межею.

Умова (2) в теоремі A є в певному сенсі остаточною, на що вказує наступна теорема Дж. Пойя [2].

Теорема B. *Нехай (n_k) — зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел така, що*

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{k} < +\infty. \tag{3}$$

Тоді існує аналітична в D_1 функції вигляду $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}$ з $R_f = 1$ така, що $\mathcal{R}_f \neq \varnothing$.

Як виявляється, властивість, за якою коло C_{R_f} є природною межею для функції (1), є в певному сенсі типовою. Такий висновок можна зробити з наведених нижче теорем для випадкових аналітичних функцій.

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — деякий ймовірнісний простір, а $(\eta_n(\omega))$ — послідовність незалежних випадкових величин, заданих на цьому просторі. Поряд з аналітичною функцією (1) розглянемо випадкову аналітичну функцію

$$f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta_n(\omega) z^n. \tag{4}$$

Г. Штейнгауз [3] довів таку теорему.

Теорема C. *Нехай $(\omega_n(\omega))$ — послідовність Штейнгауза, тобто послідовність незалежних випадкових величин, рівномірно розподілених на $[0,1]$, $\eta_n(\omega) = e^{2\pi i \omega_n(\omega)}$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, а (a_n) — довільна послідовність комплексних чисел така, що $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Тоді для функції (4) коло C_1 майже напевно (м. н.) є природною межею.*

Правильна також наступна теорема Пелі–Зигмунда [4].

Теорема D. *Нехай $(\varepsilon_n(\omega))$ — послідовність Радемахера, тобто послідовність незалежних випадкових величин, кожна з яких приймає значення -1 і 1 з ймовірністю $\frac{1}{2}$, $\eta_n(\omega) = \varepsilon_n(\omega)$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, а (a_n) — довільна послідовність комплексних чисел така, що $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Тоді для функції (4) коло C_1 м. н. є природною межею.*

Далі розглянемо загальну випадкову аналітичну функцію

$$f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\omega) z^n, \tag{5}$$

де $(\xi_n(\omega))$ — довільна послідовність комплексних незалежних випадкових величин. Тоді, як добре відомо ([5]), R_{f_ω} є м. н. сталою величиною, а $\mathcal{R}_{f_\omega}$ є м. н. сталою множиною. Ці сталі величину і множину позначатимемо $\widehat{R}_{f_\omega}$ і $\widehat{\mathcal{R}}_{f_\omega}$ відповідно.

Нехай $0 < \widehat{R}_{f_\omega} < +\infty$. К. Риль-Нарджевський [6], підтверджуючи гіпотезу Д. Блекуела, довів таку теорему.

Теорема E. *Нехай $(\xi_n(\omega))$ — послідовність незалежних випадкових величин.*

(i) Якщо випадкові величини $\xi_n(\omega)$ симетричні, то коло $C_{\widehat{R}_{f_\omega}}$ м. н. є природною межею для функції (5).

(ii) У загальному випадку або коло $C_{\widehat{R}_{f_\omega}}$ м. н. є природною межею для функції (5), *або існує звичайний степеневий ряд* (1) *з $R_f = \widehat{R}_{f_\omega}$ такий, що $\widehat{R}_{f_\omega - f} > \widehat{R}_{f_\omega}$ і коло $C_{\widehat{R}_{f_\omega - f}}$ м. н. є природною межею для функції $f_\omega - f$.*

Зауважимо, що теореми C і D є наслідками з твердження (i) теореми E. Отже, наведені результати гарантують, що коло збіжності випадкового степеневого ряду буде природною межею для функції f_ω, лише у випадку, коли коефіцієнти цього ряду є симетричними випадковими величинами. Правильні, однак, наступні теореми [7, 8], які не вимагають симетричності коефіцієнтів.

Теорема F. *Нехай $(\eta_n(\omega))$ — послідовність незалежних випадкових величин, математичні сподівання яких дорівнюють нулю і $|\eta_n(\omega)| = 1$ м. н. для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, а (a_n) — довільна послідовність комплексних чисел така, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Тоді для функції* (4) *коло C_1 майже напевно є природною межею.*

Теорема G. *Нехай (p_n) — послідовність натуральних чисел, яка є лакунарною за Адамаром, тобто існує число $q > 1$ таке, що $\frac{p_{n+1}}{p_n} \ge q$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, $\eta_n(\omega) = e^{ip_n\omega}$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, а (a_n) — довільна послідовність комплексних чисел така, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Тоді для функції* (4) *коло C_1 є природною межею для майже всіх $\omega \in \mathbb{R}$ (в сенсі міри Лебега).*

Метою цієї статті є доведення наступного узагальнення теореми D.

Теорема 1. *Нехай $(\eta_n(\omega))$ — послідовність незалежних випадкових величин, кожна з яких приймає значення -1 і 1 з ймовірностими p_n і $1-p_n$ відповідно, а $q_n = \min\{p_n, 1-p_n\}$. Для того, щоб для довільної комплексної послідовності (a_n) такої, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, коло C_1 м. н. було природною межею для функції* (4), *необхідно і досить, щоб ряд $\sum_{k=0}^{\infty} q_{n_k}$ розбігався для кожної зростаючої послідовності (n_k) невід'ємних цілих чисел, яка задовольняє умову* (3).

2. Доведення теореми. *Достатність.* Припустимо, що $\sum_{k=0}^{\infty} q_{n_k} = +\infty$ для кожної зростаючої послідовності (n_k) невід'ємних цілих чисел, яка задовольняє умову (3), але, всупереч твердженню теореми, існує комплексна послідовності (a_n) така, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, і для функції (4) маємо $\mathcal{R}{:=}\widehat{\mathcal{R}}_{f_\omega} \ne \varnothing$.

Розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega\times\Omega, \mathcal{A}\times\mathcal{A}, P\times P)$ і випадковий степеневий ряд

$$F_{(\omega_1,\omega_2)}(z) = f_{\omega_1}(z) - f_{\omega_2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\eta_n(\omega_1) - \eta_n(\omega_2))z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\beta_n(\omega_1,\omega_2)z^n. \qquad (6)$$

Легко бачити, що випадкові величини $\beta_n(\omega_1,\omega_2) = \eta_n(\omega_1) - \eta_n(\omega_2)$ набувають значень -2, 2 і 0 з ймовірностями $p_n(1-p_n)$, $p_n(1-p_n)$ і $1-2p_n(1-p_n)$ відповідно.

Оскільки $\widehat{\mathcal{R}}_{f_{\omega_1}} = \widehat{\mathcal{R}}_{f_{\omega_2}} = \mathcal{R}$, то за теоремою Фубіні $\mathcal{R} \subset \widehat{\mathcal{R}}_{F_{(\omega_1,\omega_2)}}$, тобто $\widehat{\mathcal{R}}_{F_{(\omega_1,\omega_2)}} \ne \varnothing$. Тоді з симетричності та незалежності випадкових величин $\beta_n(\omega_1,\omega_2)$ і твердження (i) теореми E випливає, що $R{:=}\widehat{R}_{F_{(\omega_1,\omega_2)}} > 1$.

Зафіксуємо довільне $\rho \in (1, R)$. Тоді існує безліч $n \in \mathbb{N}_0$, для яких $|a_n| \geq \frac{1}{\rho^n}$, бо в протилежному випадку $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\rho} < 1$, що неможливо. Нехай, отже, (n_k) — зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел така, що

$$|a_{n_k}| \geq \frac{1}{\rho^{n_k}} \quad (k \in \mathbb{N}_0); \qquad |a_n| < \frac{1}{\rho^n} \quad (n \neq n_k,\ k \in \mathbb{N}_0). \tag{7}$$

Покладемо

$$h_\omega(z) = \sum_{n \neq n_k}^{\infty} a_n \eta_n(\omega) z^n, \qquad g_\omega(z) = f_\omega(z) - h_\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k} \eta_{n_k}(\omega) z^{n_k}.$$

Оскільки, згідно з (7), $\widehat{R}_{h_\omega} \geq \rho > 1$, то $\widehat{R}_{g_\omega} = \widehat{R}_{f_\omega} = 1$, $\widehat{\mathcal{R}}_{g_\omega} = \mathcal{R} \neq \varnothing$. За теоремою A тоді обов'язково виконується (3).

Розглянемо випадковий ряд

$$G_{(\omega_1,\omega_2)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k} \beta_{n_k}(\omega_1, \omega_2) z^{n_k}. \tag{8}$$

Зрозуміло, що його радіус збіжності не менший за радіус збіжності ряду (6), тобто $\widehat{R}_{G_{(\omega_1,\omega_2)}} \geq R$. Отже, якщо $B = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega \colon R_{G_{(\omega_1,\omega_2)}} \geq R\}$, то $P(B) = 1$.

Нехай $A_k = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega \colon |\beta_{n_k}(\omega_1, \omega_2)| = 2\}$, а подія A полягає в тому, що виконується безліч подій A_k. Тоді $P(A_k) = 2p_{n_k}(1 - p_{n_k})$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$. Враховуючи, що розбіжність ряду $\sum_{k=0}^{\infty} q_{n_k}$ за ознакою порівняння рівносильна розбіжності ряду $\sum_{k=0}^{\infty} p_{n_k}(1 - p_{n_k})$, отримуємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} p_{n_k}(1 - p_{n_k}) = +\infty.$$

Оскільки події A_k — незалежні, то $P(A) = 1$ за лемою Бореля-Кантеллі. Зрозуміло, що $P(A \cap B) = 1$.

Зафіксуємо довільне $(\omega_1, \omega_2) \in A \cap B$. Тоді (ω_1, ω_2) сприяє появі безлічі подій A_k. Тому множина $K = \{k \in \mathbb{N}_0 \colon |\beta_{n_k}(\omega_1, \omega_2)| = 2\}$ є нескінченною, причому для всіх невід'ємних цілих $k \notin K$ маємо $\beta_{n_k}(\omega_1, \omega_2) = 0$. Отже,

$$G_{(\omega_1,\omega_2)}(z) = \sum_{k \in K} a_{n_k} \beta_{n_k}(\omega_1, \omega_2) z^{n_k}.$$

Але, з огляду на (7), для всіх $k \in K$ отримуємо

$$|a_{n_k} \beta_{n_k}(\omega_1, \omega_2)| \geq \frac{2}{\rho^{n_k}},$$

звідки випливає, що $R_{G_{(\omega_1,\omega_2)}} \leq \rho < R$, тобто $(\omega_1, \omega_2) \notin B$. Отримали суперечність, що завершує доведення достатності.

Необхідність. Припустимо, що для довільної комплексної послідовності (a_n) такої, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, коло C_1 м. н. є природною межею для функції (4), але, всупереч твердженню теореми, існує зростаюча послідовності (n_k) невід'ємних цілих чисел, що задовольняє умову (3), для якої $\sum_{k=0}^{\infty} q_{n_k} < +\infty$.

За теоремою B для послідовності (n_k) існує аналітична функція $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n_k} z^{n_k}$ така, що $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|b_{n_k}|} = 1$ і $\mathcal{R}_g \neq \varnothing$. Для довільного $k \in \mathbb{N}_0$ покладемо $a_{n_k} = b_{n_k}\varepsilon_{n_k}$, де

$$\varepsilon_{n_k} = \begin{cases} -1, & \text{якщо } p_{n_k} \geq \frac{1}{2}; \\ 1, & \text{якщо } p_{n_k} < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Нехай $a_n = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ такого, що $n \neq n_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$. Зрозуміло, що $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

Розглянемо події $A_k = \{\omega \in \Omega\colon \eta_{n_k}(\omega) = -\varepsilon_{n_k}\}$ і нехай подія A полягає в тому, що виконується лише скінченне число подій A_k. Легко бачити, що $P(A_k) = q_{n_k}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$, а тому

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{n_k} < +\infty.$$

Тоді за лемою Бореля-Кантеллі отримуємо $P(A) = 1$.

Нехай $\omega \in A$. Тоді ω сприяє появі лише скінченного числа подій A_k, тобто $\eta_{n_k}(\omega) = \varepsilon_{n_k}$ для всіх $k \geq k_0(\omega)$. Для випадкового ряду (4) маємо

$$f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta_n(\omega) z^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n_k}\varepsilon_{n_k}\eta_{n_k}(\omega) z^{n_k} = g(z) - \sum_{k=0}^{k_0(\omega)} b_{n_k}\varepsilon_{n_k}\eta_{n_k}(\omega) z^{n_k},$$

звідки випливає, що $\mathcal{R}_{f_\omega} = \mathcal{R}_g$. Отже, $\widehat{\mathcal{R}}_{f_\omega} = \mathcal{R}_g \neq \varnothing$, тобто ряд (4) м. н. можна продовжити через деяку дугу кола C_1. Суперечність. Теорему повністю доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Fabry E. *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement de Taylor*// Ann. éc. norm. sup. Paris (3). – 1896. – V.13. – P. 367–399.
2. Pólya G. *On converse gap theorems*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1942. – V.52. – P. 65–71.
3. Steinhaus H. *Über die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergenzreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grence ist*// Math. Z. – 1929. – V.31. – P. 408–416.
4. Paley R.E.A.C., Zygmund A. *A note on analytic functions in the unit circle*// Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1932. – V.28. – P. 266–272.
5. Kahane J.-P. Some random series of functions. Sec. ed. – Cambridge stud. in adv. math. 5. – Cambridge Univ. Press, 1985. – 308 p.
6. Ryll-Nardzewski C.D. *Blackwell's conjecture on power series with random coefficients*// Stud. Math. – 1953. – V.13. – P. 30—36.
7. Filevych P.V. *On the Phragmén–Lindelöf Indicator for Random Entire Functions*// Ukrainian Mathematical Journal. – 2000. – T.52, №10. – C. 1431–1434. (in Ukrainan)
8. Filevych P.V. *The indicator of entire functions with rapidly oscillating coefficients*// Mat. Stud. – 2011. – V.35, №2. – P. 142–148.

Львівський національний університет ветеринарної
медицини та біотехнологій ім. С. З. Ґжицького,
filevych@mail.ru

Надійшло 12.02.2011