УДК 517.51

Г. А. Глушко, В. К. Маслюченко

ФУНКЦІЇ ГАНА І КЛАСИФІКАЦІЯ БЕРА

H. A. Hlushko, V. K. Maslyuchenko. *Hahn's functions and Baire classifications*, Mat. Stud. **36** (2011), 97–106.

Hahn's results about Baire classifications the real values separately continuous functions are moved on the functions with values in arbitrary local convex spaces.

Г. А. Глушко, В. К. Маслюченко *Функции Гана и бэровская класиффикация векторнозначных отображений* // Мат. Студії. – 2011. – Т.36, №1. – С.97–106.

Результаты Гана о бэровской класиффикации действительнозначных раздельно непрерывных функций перенесены на функции со значениями в произвольном локально выпуклом пространстве.

1. Стара задача про класифікацію Бера нарізно неперервних відображень $f\colon X_1 \times ... \times X_{n+1} \to Z$ у даний час далека від свого повного розв'язання. Ще Лебеґ [1,2] встановив, що кожна нарізно неперервна функція $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ належить до n-го класу Бера. Крім того, в [2] він увів свою класифікацію функцій через прообрази, яку іноді помилково називають борелевою. Питання берової та лебеґової класифікацій нарізно неперервних функцій і зв'язків між ними досліджувалося у працях багатьох математиків (Г. Ган, К. Куратовський, Д. Монтґомері, В. Моран, Б. Джонсон, Ж. Сан-Ремо, В. Рудін, Р. Ганселл, Ґ. Вера, М. Фосґерау, В. Маслюченко, О. Собчук, В. Михайлюк, О. Карлова, Т. Банах та ін.), зокрема, вони розглядалися у дисертаціях [3]–[6].

Тут йтиме мова про берову класифікацію нарізно неперервних функцій та їх аналогів зі значеннями в топологічних векторних просторах. Започатковує цей напрямок робота У. Рудіна [7], в якій з допомогою розбиттів одиниці встановлено, що для метризовного простору X, топологічного простору Y і локально опуклого простору Z кожне нарізно неперервне відображення $f\colon X \times Y \to Z$ належить до першого класу Бера. Цей результат був розвинутий у праці [8], де простір X вже σ-метризовний, і досліджувалися функції багатьох змінних, правда, там розглядалися лише дійснозначні функції, а векторнозначні — в [3]. В огляді [9], сформульоване питання [9, с.239, питання 11]: чи правильне твердження теореми Рудіна для довільного топологічного векторного простору Z? Там же за допомогою початкового методу Лебеґа доведено, що відповідь ствердна для $X = \mathbb{R}$. Незважаючи на значний розвиток цього результату в працях [10]–[14] і появу нових методів [6, 15, 16], сформульована проблема залишається нерозв'язаною й досі.

Г. Ган [17, с.328], запропонувавши оригінальну конструкцію, довів, що для сепарабельних метризовних просторів $X_1, ..., X_n$ і довільного топологічного простору X_{n+1} кожна нарізно неперервна функція $f\colon X_1 \times ... \times X_{n+1} \to \mathbb{R}$ належить до n-го класу Бера.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C08.

© Г. А. Глушко, В. К. Маслюченко, 2011

В пошуках нових підходів до розв'язання розглянутої вище проблеми ми досліджуємо у цій статті питання про можливість перенесення методу Гана на векторнозначні функції. Використовуючи побудови Гана, ми вводимо для зліченної скрізь щільної в X множини $A = \{a_1, ..., a_n, ...\}$ розбиття одиниці $\varphi_{n,1}, ..., \varphi_{n,n}$ з функцій $\varphi_{n,k}$, які ми назвали функціями Гана, і з їх допомогою показуємо, що за певних умов для кожної функції $f\colon X \times Y \to Z$, яка неперервна відносно першої змінної і належить до α-го класу Бера відносно другої змінної, функції

$$f_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(x) f(a_k, y)$$

належать до α-го класу Бера і поточково збігаються до f, а звідси виводимо теорему про берівську класифікацію нарізно неперервних відображень $f\colon X_1 \times ... \times X_{n+1} \to Z$.

Хоча метод Гана, на відміну від методу Рудіна, годиться лише для сепарабельних метричних просторів, але він дає явну конструкцію апроксимуючих відображень f_n, у чому є його певна перевага. На жаль, і в цьому випадку метод спрацьовує лише для локально опуклих просторів Z. Для порівняння ми даємо і відповідні теореми з [3], які були отримані методом Рудіна, у новому викладі.

2. Нехай X — метричний простір. Відстань між його точками x' і x'' позначатимемо, як і Г. Ган, символами $x'x''$. Для скінченної послідовності $a_1, ..., a_n$ з n різних точок простору X і довільного $k \in \{1, .., n\}$, як і в [17, §39], введемо функції g і g_k, поклавши $g(x) = \min\{xa_1, ..., xa_n\}$ і $g_k(x) = \max\{2g(x) - xa_k, 0\}$ для кожного x з X. З неперервності метрики на просторі X і операції переходу до максимуму і мінімуму випливає, що функції g і g_k неперервні. Крім того, $g(x) \geq 0$ і $g_k(x) \geq 0$ на X.

Введемо у розгляд додатні числа $\rho_k = \min\{a_i a_k \colon i \neq k \in \{1, .., n\}\}/2$ та $\rho_{i,k} = a_i a_k / 3$ при $i, k \in \{1, .., n\}$.

Лема 1. *Для кожного* $k \in \{1, .., n\}$*:*

а) якщо $xa_k \leq \rho_k$, *то* $g(x) = g_k(x) = xa_k$;

б) якщо $xa_k \leq \rho_{i,k}$, *то* $g_i(x) = 0$ *при* $i \neq k$.

Доведення. а) Нехай $xa_k \leq \rho_k$. Тоді для довільного $i \neq k$ будемо мати

$$xa_i \geq a_i a_k - xa_k \geq a_i a_k - \rho_k \geq a_i a_k - \frac{1}{2} a_i a_k = \frac{1}{2} a_i a_k \geq \rho_k \geq xa_k,$$

отже, $g(x) = xa_k$. При цьому $2g(x) - xa_k = 2xa_k - xa_k = xa_k \geq 0$, отже, і $g_k(x) = 2g(x) - xa_k = xa_k$.

б) Нехай $i \neq k$ і $xa_k \leq \rho_{i,k}$. Зрозуміло, що $g(x) \leq xa_k$. Але $a_i a_k \leq xa_i + xa_k \leq xa_i + \rho_{i,k}$, звідки випливає, що

$$xa_i \geq a_i a_k - \rho_{i,k} = a_i a_k - \frac{1}{3} a_i a_k = \frac{2}{3} a_i a_k = 2\rho_{i,k}.$$

Тому $2g(x) - xa_i \leq 2xa_k - xa_i \leq 2\rho_{i,k} - 2\rho_{i,k} = 0$, отже, $g_i(x) = \max\{2g(x) - xa_i, 0\} = 0$. □

Лема 2. *Для кожного* $k \in \{1, .., n\}$ *існує таке число* $\delta_k > 0$, *що для кожного* x *з нерівності* $xa_k \leq \delta_k$ *випливає, що* $g_k(x) = xa_k$ *і* $g_i(x) = 0$ *для всіх* $i \neq k$.

Доведення. Покладемо $\delta_k = \min\{\rho_{i,k} \colon i \neq k, i = 1, ..., n\}$. Оскільки $\delta_k \leq \rho_k$ і $\delta_k \leq \rho_{i,k}$ при $i \neq k$, то твердження леми 2 негайно випливає з леми 1. □

Лема 3. *Нехай* $h(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j(x)$ *на* X*. Тоді функція* h *неперервна,* $h(x) > 0$ *при* $x \neq a_k$*,* $k \in \{1, .., n\}$ *і* $h(a_k) = 0$ *для кожного* $k \in \{1, .., n\}$*.*

Доведення. Функція h буде неперервною як скінченна сума неперервних функцій.

Далі для довільного $k, j \in \{1, .., n\}$ $g(a_k) = \min\{a_k a_1, ..., a_k a_k, ..., a_k a_n\} = 0,$ бо $a_k a_k = 0$, і $g_j(a_k) = \max\{2g(a_k) - a_k a_k, 0\} = \max\{0, 0\} = 0$. Тому і $h(a_k) = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j(a_k) = 0$.

Нехай $x \neq a_k$ для кожного $k \in \{1, .., n\}$ і $x \in X$. Тоді $xa_k > 0$ для кожного k. Існує такий номер $m \in \{1, .., n\}$, що $g(x) = xa_m$. Тоді $2g(x) - xa_m = xa_m > 0$. Тому і $g_m(x) = xa_m > 0$, звідки випливає, що $h(x) \geq g_m(x) > 0$. $\square$

Введемо функції

$$\varphi_{n,k}(x) = \begin{cases} \frac{g_k(x)}{h(x)}, & x \neq a_i \text{ при } j \in \{1, .., n\}, \\ 1, & x = a_k, \\ 0, & x = a_j \text{ при } j \neq k, \end{cases}$$

які ми назвемо функціями Гана, хоча Ган розглядав тільки функції g і g_k. Оскільки за лемою 3 $h(x) > 0$ при $x \neq a_j$, то означення цих функцій можливе.

Лема 4. *а) Функції* $\varphi_{n,k} \colon X \to [0, 1]$ *неперервні для кожного* $k \in \{1, .., n\}$*, причому* $\varphi_{n,k}(x) = 1$ *і* $\varphi_{n,j}(x) = 0$ *при* $j \neq k$*, як тільки* $xa_k \leq \delta_k = \min\{\rho_{i,k} \colon i \neq k\}$*.*

б) $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(x) = 1$ на X.

Доведення. а) Зрозуміло, що $0 \leq \varphi_{n,k}(x) \leq 1$, бо $0 \leq g_k(x) \leq h(x)$ на X. Неперервність функцій $\varphi_{n,k}$ у точках, відмінних від a_j, випливає з неперервності функцій g_k та h.

Нехай $xa_k \leq \delta_k$ і $x \neq a_j$ для кожного j. Тоді $g_k(x) = xa_k$ і $g_i(x) = 0$ при $i \neq k$ згідно з лемою 2, а значить, $h(x) = g_k(x) > 0$. Тому

$$\varphi_{n,k}(x) = \frac{g_k(x)}{h(x)} = \frac{g_k(x)}{g_k(x)} = 1 \text{ і } \varphi_{n,j}(x) = \frac{g_j(x)}{h(x)} = \frac{g_j(x)}{g_k(x)} = 0, \text{ якщо } j \neq k.$$

Оскільки за означенням функцій Гана $\varphi_{n,k}(a_k) = 1$ і $\varphi_{n,j}(a_k) = 0$ при $j \neq k$, то $\varphi_{n,k}(x) = 1$ і $\varphi_{n,j}(x) = 0$ при $j \neq k$, як тільки $xa_k \leq \delta_k$.

Для кожного $j \in \{1, .., n\}$ розглянемо відкриту кулю $U_j = \{x \in X \colon xa_j < \delta_j\}$. За доведеним $\varphi_{n,k} |_{U_k} = 1$ і $\varphi_{n,k} |_{U_j} = 0$ при $j \neq k$, отже, функції $\varphi_{n,k}$ локально сталі в точках $a_1, ..., a_n$, звідки негайно випливає їх неперервність у цих точках.

б) Якщо $x \neq a_j$ при $j \in \{1, .., n\}$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(x) = \frac{1}{h(x)} \sum_{k=1}^{n} g_k(x) = \frac{h(x)}{h(x)} = 1.$$

Якщо ж $x = a_j$ для деякого $j \in \{1, .., n\}$, то $\varphi_{n,k}(a_j) = 1$ при $k = j$ і $\varphi_{n,k}(a_j) = 0$ при $k \neq j$, тому знову

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(x) = \varphi_{n,j}(a_j) = 1.$$

$\square$

3. Для топологічних просторів X і Y символ $C(X,Y)$ означає сукупність усіх неперервних відображень $f\colon X\to Y$, а символ $C_p(X,Y)$ — простір $C(X,Y)$ з топологією поточкової збіжності.

Нехай X — метричний простір, Z — топологічний векторний простір, $a_1,...,a_n$ — різні точки з X і $\varphi_{n,k}$ — відповідні функції Гана. Співставивши кожній функції $f\in C(X,Z)$ функцію $f_n=H_nf$, яка визначається рівністю

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{n,k}(x)f(a_k),$$

ми одержимо відображення $H_n\colon C(X,Z)\to C(X,Z)$, яке будемо називати *оператором Гана.*

Теорема 1. *Оператор Гана H_n є лінійним неперервним відображенням у просторі $C_p(X,Z)$.*

Доведення. Зауважимо, що для топологічного векторного простору Z простір $C_p(X,Z)$ — це теж топологічний векторний простір, базу околів нуля якого утворюють множини $O_{W;x_1,...,x_n}=\{f\in C(X,Z)\colon f(x_i)\in W$ при $i\in\{1,..,n\}\}$, де $x_1,...,x_n\in X$ і W — окіл нуля в Z. Для кожної точки $x_0\in X$ відображення $\delta_{x_0}\colon C_p(X,Y)\to Z$, $\delta_{x_0}(f)=f(x_0)$, очевидно лінійне і неперервне.

Для кожної неперервної функції $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$ визначимо оператор M_φ, який співставляє вектору $z\in Z$ функцію $M_\varphi z=\varphi z$, що діє з X в Z, за правилом $(\varphi z)(x)=\varphi(x)z$. З неперервності операції множення на скаляри у просторі Z випливає, що функція φz неперервна. Отже, M_φ — це оператор, що діє з простору Z у простір $C(X,Z)$. Так само з неперервності операції множення на скаляр легко отримуємо, що M_φ є неперервним оператором, що діє з простору Z у простір $C_p(X,Z)$.

Нарешті з неперервності операції додавання в Z легко вивести, що відображення

$$S\colon C_p(X,Z)^n\to C_p(X,Z),\quad S(f_1,...,f_n)=\sum_{k=1}^{n}f_k,$$

теж неперервне.

З неперервності відображень $M_{\varphi_{n,k}}\colon Z\to C_p(X,Z)$ негайно випливає неперервність відображення $M=M_{\varphi_{n,1}}\times...\times M_{\varphi_{n,n}}\colon Z^n\to C_p(X,Z)^n$ яке співставляє набору векторів $z=(z_1,...,z_n)\in Z^n$ набір функцій $Mz=(\varphi_{n,1}z_1,...,\varphi_{n,n}z_n)$, а з неперервності відображень $\delta_{a_k}\colon C_p(X,Z)\to Z$ отримуємо неперервність відображення $D=(\delta_{a_1},...,\delta_{a_n})\colon C_p(X,Z)\to Z^n$, для якого $Df=(f(a_1),...,f(a_n))$.

Для кожної функції $f\in C(X,Z)$ будемо мати

$$S(M(Df))=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{n,k}f(a_k)=H_nf,$$

отже, $H_n=SMD$ — це композиція неперервних відображень $D\colon C_p(X,Z)\to Z^n$, $M\colon Z^n\to C_p(X,Z)^n$ і $S\colon C_p(X,Z)^n\to C_p(X,Z)$. Тому і оператор Гана $H_n\colon C_p(X,Z)\to C_p(X,Z)$ буде неперервним. □

Теорема 2. *Нехай X — сепарабельний метричний простір, Z — локально опуклий простір над полем $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ і $A=\{a_k\colon k\in\mathbb{N}\}$ — скрізь щільна в X множина, що* *складається з різних точок a_k. Нехай $f \in C(X,Z)$, $\varphi_{n,k}$ — функції Гана, що відповідають точкам $a_1,...,a_n$, H_n — відповідний оператор Гана і $f_n = H_n f$. Тоді $f_n \in C(X,Z)$ і для кожного $x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$* при $n \to \infty$ *у просторі Z.*

Доведення. Нехай $x \in X$ і W — окіл нуля в Z. Знайдемо такий опуклий окіл нуля V в Z, що $V \subseteq W$. З неперервності f у точці x отримуємо, що існує таке число $\delta > 0$, що для будь-якого $u \in X$ з нерівності $ux < 2\delta$ випливає, що $f(u) - f(x) \in V$. Оскільки $\overline{A} = X$, то існує такий номер N, що $a_N x < \delta$.

Нехай $n \geq N$. Тоді $g(x) = \min\{xa_1,...,xa_n\} \leq a_N x < \delta$. Припустимо, що k — це такий з номерів $1,...,n$, що для нього $a_k x \geq 2\delta$. Тоді $2g(x) < 2\delta \leq a_k x$, отже, $2g(x) - a_k x < 0$, а тому, $g_k(x) = 0$. Тоді, $\varphi_{n,k}(x) = 0$.

Оскільки $\sum_{k=1}^n \varphi_{n,k}(x) = 1$, то

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \varphi_{n,k}(x) f(x).$$

Тому

$$f_n(x) - f(x) = \sum_{k=1}^n \varphi_{n,k}(x)(f(a_k) - f(x)) = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

де

$$\Sigma_1 = \sum_{n \in I_1} \varphi_{n,k}(x)(f(a_k) - f(x)), \ \ \Sigma_2 = \sum_{n \in I_2} \varphi_{n,k}(x)(f(a_k) - f(x)),$$

$I_1 = \{k \colon k \leq n \text{ і } a_k x < 2\delta\}$ і $I_2 = \{k \colon k \leq n \text{ і } a_k x \geq 2\delta\}$. Але, як ми зауважили вище, якщо $k \in I_2$, то $\varphi_{n,k}(x) = 0$, тому $\Sigma_2 = 0$. Отже,

$$f_n(x) - f(x) = \Sigma_1 \in \sum_{k \in I_1} \varphi_{n,k}(x) V,$$

бо $f(a_k) - f(x) \in V$ при $k \in I_1$. Оскільки

$$\sum_{k \in I_1} \varphi_{n,k}(x) \leq \sum_{k=1}^n \varphi_{n,k}(x) = 1,$$

числа $\lambda_k = \varphi_{n,k}(x) \geq 0$ і $0 \in V$, то з опуклості множини V випливає, що $\sum\limits_{k \in I_1} \lambda_k V \subseteq V$. Тому $f_n(x) - f(x) \in V \subseteq W$. Ми довели, що для довільного околу нуля W в Z існує такий номер N, що $f_n(x) - f(x) \in W$, як тільки $n \geq N$, а це і означає, що $f_n(x) \to f(x)$ в Z. □

4. Для топологічних просторів X і Y символом $B_1(X,Y)$ ми позначаємо сукупність усіх відображень $f \colon X \to Y$ *першого класу Бера*, тобто таких f, що для них існує послідовність неперервних відображень $f_n \colon X \to Y$, для якої $f_n(x) \to f(x)$ в Y для кожного $x \in X$.

Нехай X, Y і Z — топологічні простори, $f \colon X \times Y \to Z$ відображення і $p = (x,y) \in X \times Y$. Покладемо, як звичайно, $f^x(y) = f_y(x) = f(p)$.

Відображення f називається *нарізно неперервним*, якщо для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ відображення $f^x \colon Y \to Z$ і $f_y \colon X \to Z$ неперервні. Сукупність усіх нарізно неперервних функцій $f \colon X \times Y \to Z$ ми позначаємо символом $CC(X \times Y, Z)$. Неперервні відносно топології добутку на $X \times Y$ відображення $f\colon X \times Y \to Z$ називаються *сукупно неперервними* і множина таких відображень позначається символом $C(X \times Y, Z)$. Символом $B_1(X \times Y, Z)$ позначається множина всіх відображень $f\colon X \times Y \to Z$ першого класу Бера, тобто поточкових границь послідовності сукупно неперервних відображень $f_n\colon X \times Y \to Z$.

З теореми 2 легко вивести наступний результат.

Теорема 3. *Нехай X — сепарабельний метричний простір, Y — топологічний простір, Z — локально опуклий простір над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, $A = \{a_k\colon k \in \mathbb{N}\}$ — скрізь щільна в X множина, що складається з різних точок, $\varphi_{n,k}$ — функції Гана, що породжені точками $a_1, ..., a_n$, H_n — відповідний оператор Гана, $f \in CC(X \times Y, Z)$ і $f_n(x, y) = H_n(f_y)(x)$ для довільних $(x, y) \in X \times Y$. Тоді $f_n \in C(X \times Y, Z)$ і $f_n(p) \to f(p)$* у просторі Z *для кожної точки $p \in X \times Y$. Зокрема, $f \in B_1(X \times Y, Z)$ і $CC(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$.*

Доведення. Зауважимо, що для кожної неперервної функції $\varphi\colon X \to \mathbb{K}$ і довільного неперервного відображення $\psi\colon Y \to Z$ відображення $\varphi \otimes \psi\colon X \times Y \to Z, (\varphi \otimes \psi)(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$, є неперервним за сукупністю змінних, адже воно подається у вигляді композиції $\varphi \otimes \psi = m \circ (\varphi \times \psi)$ неперервних відображень $(\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))\colon X \times Y \to \mathbb{K} \times Z$ і $m(\lambda, z) = \lambda z\colon \mathbb{K} \times Z \to Z$. Оскільки

$$f_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(x) f(a_k, y),$$

то

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k} \otimes f^{a_k}.$$

Тому $f_n \in C(X \times Y, Z)$, адже $\varphi_{n,k} \otimes f^{a_k} \in C(X \times Y, Z)$ для кожного $k \in \{1, .., n\}$, бо $\varphi_{n,k} \in C(X, \mathbb{R})$ і $f^{a_k} \in C(Y, Z)$. Крім того, скінченна сума неперервних відображень зі значеннями в топологічному векторному просторі залишається неперервним відображенням.

Оскільки функції $f_y\colon X \to Z$ неперервні, то за теоремою 2 для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ $f_n(x, y) = (H_n f_y)(x) \to f_y(x) = f(x, y)$ у просторі Z. Отже, $f \in B_1(X \times Y, Z)$. $\square$

5. Щоб перенести отриманий результат на випадок нарізно неперервних відображень $f\colon X_1 \times ... \times X_{n+1} \to Z$, ми повинні узагальнити теорему 3.

Для топологічних просторів X і Y і не більш ніж зліченного порядкового числа α символом $B_\alpha(X, Y)$ позначаємо сукупність усіх відображень $f\colon X \to Y$, які є α-го класу Бера. Це поняття вводиться індуктивно. А саме, $B_0(X, Y) = C(X, Y)$, якщо $\alpha > 0$ і класи $B_\xi(X, Y)$ вже введені при $\xi < \alpha$, то $f \in B_\alpha(X, Y)$, якщо існує така послідовність порядкових чисел $\xi_n < \alpha$ і послідовність відображень $f_n \in B_{\xi_n}(X, Y)$, що $f_n(x) \to f(x)$ в Y для кожного $x \in X$. Зауважимо, що класи $B_\alpha(X, Y)$ з ростом α зростають.

Для топологічних просторів X, Y і Z символом $CB_\alpha(X \times Y \to Z)$ ми позначаємо сукупність усіх відображень $f\colon X \times Y \to Z$, у яких $f_y \in C(X, Z)$ для кожного $y \in Y$ і $f^x \in B_\alpha(Y, Z)$ для кожного $x \in X$. Клас $B_\alpha(X \times Y, Z)$ — це клас $B_\alpha(T, Z)$, де $T = X \times Y$ — топологічний добуток просторів X і Y.

Лема 5. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — топологічний векторний простір над $\mathbb{K}$, $\varphi_k\colon X \to \mathbb{K}$ — неперервні скалярні функції і $f_k\colon Y \to Z$ — функції α-го класу*

Бера при $k \in \{1,..,n\}$. *Тоді*

$$f = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \otimes f_k \in B_\alpha(X \times Y, Z).$$

Доведення. Застосуємо трансфінітну індукцію. При $\alpha = 0$ функції $f_1, ..., f_n$ неперервні і належність $f \in B_0(X \times Y, Z) = C(X \times Y, Z)$, яка випливає з неперервності операцій у топологічному векторному просторі, була фактично встановлена при доведенні теореми 3.

Припустимо, що $\alpha > 0$ і наше твердження справджується для всіх порядкових чисел, які менші від α. Доведемо, що воно справджується і для порядкового числа α.

Оскільки $f_k \in B_\alpha(Y, Z)$, то існують такі послідовності порядкових чисел $\xi_{k,j} < \alpha$ і функцій $f_{k,j} \in B_{\xi_{k,j}}(Y, Z)$, що $f_{k,j}(y) \to f_k(y)$ в Z при $j \to \infty$ для кожного $y \in Y$. Нехай $\xi_j = \max\{\xi_{1,j}, ..., \xi_{n,j}\}$. Тоді $\xi_j < \alpha$ для кожного j і $f_{k,j} \in B_{\xi_j}(Y, Z)$ для будь-яких $k \in \{1,..,n\}$ і довільного j. За індуктивним припущенням

$$h_j = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k} \otimes f_{k,j} \in B_{\xi_j}(X \times Y, Z)$$

для кожного j. При цьому з неперервності операцій у топологічному векторному просторі Z випливає, що

$$h_j(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) f_{k,j}(y) \to \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) f_k(y) = f(x, y)$$

на добутку $X \times Y$. Тому $f \in B_\alpha(X \times Y, Z)$. □

Теорема 4. *Нехай виконуються усі умови теореми 3, як тільки* $f \in CB_\alpha(X \times Y, Z)$. *Тоді функції* $f_n(x, y) = H_n(f_y)(x)$ *належать до* $B_\alpha(X \times Y, Z)$ *і* $f_n(x, y) \to f(x, y)$ *на* $X \times Y$ *у просторі* Z *при* $n \to \infty$. *Зокрема,* $f \in B_{\alpha+1}(X \times Y, Z)$ *і виконується включення* $CB_\alpha(X \times Y, Z) \subseteq B_{\alpha+1}(X \times Y, Z)$.

Доведення. Оскільки

$$f_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(x) f(a_k, y),$$

тобто

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k} \otimes f^{a_k},$$

функції Гана $\varphi_{n,k}$ неперервні і $f^{a_k} \in B_\alpha(X, Y)$, то $f_n \in B_\alpha(X \times Y, Z)$ за лемою 5. Решта випливає з теореми 1, адже функції f_y неперервні, як і в теоремі 2. □

6. Нехай $X_1, ..., X_n, Z$ — топологічні простори і $f\colon X_1 \times ... \times X_n \to Z$ — відображення. Для точки $a = (a_1, ..., a_n) \in X = X_1 \times ... \times X_n$ і довільного індексу $k \in \{1,..,n\}$ позначимо $\hat{a}_k = (a_1, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_n)$ і визначимо функцію $f_{\hat{a}_k}\colon X_k \to Z$, поклавши $f_{\hat{a}_k}(x_k) = f(a_1, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n)$ Відображення f називається нарізно неперервним у точці a, якщо для кожного $k \in \{1,..,n\}$ відображення $f_{\hat{a}_k}\colon X_k \to Z$ є неперервним у точці a_k. Відображення f називається нарізно неперервним, якщо воно є таким у кожній точці з добутку $X = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Теорема 5. *Нехай $X_1, ..., X_n$ — сепарабельні метричні простори, X_{n+1} — топологічний простір, Z — локально опуклий простір і $f\colon X_1 \times ... \times X_{n+1} \to Z$ — нарізно неперервне відображення. Тоді $f \in B_n(X_1 \times ... \times X_{n+1}, Z)$.*

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n. При $n = 1$ наше твердження випливає з теореми 2.

Нехай $n > 1$ і твердження теореми справджується, коли число просторів дорівнює n. Доведемо, що воно справджується і коли їх $n + 1$.

Розглянемо топологічний добуток $Y = X_2 \times ... \times X_{n+1}$ усіх просторів без першого і покладемо $X = X_1$. Для точки $(x_1, ..., x_{n+1}) \in X_1 \times ... \times X_{n+1}$ покладемо $x = x_1$, $y = (x_2, ..., x_{n+1})$ і $f(x, y) = f(x_1, ..., x_{n+1})$. За умовою $f_y \in C(X, Z)$ для кожного $y \in Y$, а за індуктивним припущенням $f^x \in B_{n-1}(Y, Z)$ для кожного $x \in X$. Тому $f \in CB_{n-1}(X \times Y, Z)$. Тоді $f \in B_n(X \times Y, Z) = B_n(X_1 \times ... \times X_{n+1}, Z)$ за теоремою 4, що й треба було довести. □

7. Тепер доведемо, що з допомогою методу Рудіна можна зняти умову сепарабельності в отриманих вище результатах. Цей метод базується на теоремі Стоуна про паракомпактність метричного простору [18, с.414] і теоремі Майкла про розбиття одиниці [18, с.447]. Наш виклад містить новий методичний момент у порівнянні з [3, 7] — апроксимаційну теорему і оператори Рудіна. Нехай X — метричний простір. Для кожного номера n розглянемо покриття $\mathcal{B}_n$ простору X відкритими кулями

$$B\Big(x, \frac{1}{n}\Big) = \Big\{u \in X\colon ux < \frac{1}{n}\Big\},$$

де $x \in X$. За теоремою Стоуна у кожне покриття $\mathcal{B}_n$ можна вписати відкрите локально скінченне покриття $\mathcal{U}_n$. За теоремою Майкла для кожного n існує розбиття одиниці $(\varphi_{n,i})_{i \in I_n}$, яке підпорядковане покриттю $\mathcal{U}_n$ і складається з ненульових неперервних функцій $\varphi_{n,i}\colon X \to [0, 1]$. Виберемо в кожному з носіїв $supp\varphi_{n,i} = \{x \in X\colon\ \varphi_{n,i}(x) \neq 0\}$ деяку точку $x_{n,i}$.

Нехай Z — топологічний векторний простір і $f\colon X \to Z$ — неперервне відображення. Для довільного n і кожного x з X покладемо

$$f_n(x) = (R_n f)(x) = \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(x) f(x_{n,i}).$$

Для кожної точки $x_0 \in X$ існує такий її окіл U, що множина $I_n(U) = \{i \in I_n\colon U \cap \mathrm{supp}\varphi_{n,i} \neq \varnothing\}$ є скінченною. Тоді $\varphi_{n,i}(x) = 0$ на U, якщо $i \notin I_n(U)$, і

$$f_n(x) = \sum_{i \in I_n(U)} \varphi_{n,i}(x) f(x_{n,i})$$

на U. Це показує, що функція f_n визначена і неперервна у точці x_0. Тому відображення R_n — це лінійний оператор у просторі $C(X, Z)$. Ми назвемо його *оператором Рудіна.*

Теорема 6. *Нехай X — метричний простір, Z — локально опуклий простір, R_n — оператор Рудіна, $f \in C(X, Z)$ і $f_n = R_n f$. Тоді $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ в Z на X.*

Доведення. Нехай $x \in X$, W — окіл нуля в Z і V — такий опуклий окіл нуля в Z, що $V \subseteq W$. З неперервності функції f у точці x випливає, що існує таке $\delta > 0$, що з нерівності $ux < \delta$ випливає, що $f(u) - f(x) \in V$. Візьмемо номер N настільки великим, що $1/N < \delta/2$. Нехай $n \ge N$. Множина $I_n(x) = \{i \in I_n \colon \varphi_{n,i}(x) \ne 0\}$ скінченна і

$$f_n(x) - f(x) = \sum_{i \in I_n(x)} \varphi_{n,i}(x)(f(x_{n,i}) - f(x)).$$

Якщо $i \in I_n(x)$, то точки $x_{n,i}$ і x належать до носія $\mathrm{supp}\varphi_{n,i}$ функції $\varphi_{n,i}$, який міститься у деякому елементі U покриття $\mathcal{U}_n$, а той у свою чергу в деякій кулі $B(a, \frac{1}{n})$ з $\mathcal{B}_n$. Тому $x_{n,i}x \le x_{n,i}a + xa < 2/n \le 2/N < \delta$, а отже, $f(x_{n,i}) - f(x) \in V$. В такому разі

$$f_n(x) - f(x) \in \sum_{i \in I_n(x)} \varphi_{n,i}(x) V \subseteq V,$$

адже множина V опукла, $0 \in V$ і $\varphi_{n,i}(x) \ge 0$ і

$$\sum_{i \in I_n(x)} \varphi_{n,i}(x) \le \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(x) = 1.$$

Тому $f_n(x) - f(x) \in W$ при $n \ge N$, отже, $f_n(x) \to f(x)$ в Z. □

8. Для топологічних просторів X, Y і Z і порядкового числа α символом $C\overline{B}_\alpha(X \times Y, Z)$ ми будемо позначати сукупність усіх відображень $f\colon X \times Y \to Z$, для яких $f_y \in C(X, Z)$ для кожного $y \in Y$ і множина $X_{B_\alpha}(f) = \{x \in X \colon f^x \in B_\alpha(Y, Z)\}$ скрізь щільна в X.

Наступне твердження подібно до леми 5 легко довести індукцією за α.

Лема 6. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — топологічний векторний простір, $(\varphi_i)_{i \in I}$ — локально скінченне розбиття одиниці на X і $(g_i)_{i \in I}$ — сім'я відображень з класу $B_\alpha(Y, Z)$. Тоді формулою*

$$g(x, y) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) g_i(y)$$

визначається відображення $f\colon X \times Y \to Z$, що входить у клас $B_\alpha(X \times Y, Z)$.

З цієї леми і теореми 6 виводимо наступний результат.

Теорема 7. *Нехай X — метричний простір, Y — топологічний простір, Z — локально опуклий простір, R_n — оператор Рудіна, побудований за точками $x_{n,i} \in X_{B_\alpha}(f) \cap \mathrm{supp}\varphi_{n,i}$, $f \in C\overline{B}_\alpha(X \times Y, Z)$ і $f_n(x, y) = (R_n f_y)(x)$. Тоді $f_n \in B_\alpha(X \times Y, Z)$ і $f_n(x, y) \to f(x, y)$ на $X \times Y$. Зокрема, $f \in B_{\alpha+1}(X \times Y, Z)$ і виконується включення*

$$C\overline{B}_\alpha(X \times Y, Z) \subseteq B_{\alpha+1}(X \times Y, Z).$$

Доведення. Зауважимо, що $\overline{X_{B_\alpha}(f)} = X$, а $\mathrm{supp}\varphi_{n,i}$ — це відкрита непорожня множина, отже, $X_{B_\alpha}(f) \cap \mathrm{supp}\varphi_{n,i} \ne \varnothing$ і тому для кожного $i \in I_n$ можна вибрати точку

$$x_{n,i} \in X_{B_\alpha}(f) \cap \mathrm{supp}\varphi_{n,i}$$

і за цими точками побудувати оператор Рудіна R_n. Оскільки $f^{x_{n,i}} \in B_\alpha(Y, Z)$ і

$$f_n(x, y) = \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(x) f^{x_{n,i}}(y),$$

то $f_n \in B_\alpha(X \times Y, Z)$ згідно з лемою 6. Крім того, з теореми 6 випливає, що $f_n(x, y) = (R_n f_y)(x) \to f_y(x) = f(x, y)$ на $X \times Y$, що й треба було довести. □

З цієї теореми негайно випливає

Теорема 8. *Нехай $X_1, ..., X_n$ — метризовані простори, Y — топологічний простір, Z — локально опуклий простір і $f : X_1 \times ... \times X_{n+1} \to Z$ — нарізно неперервне відображення. Тоді $f \in B_n(X_1 \times ... \times X_{n+1}, Z)$.*

Доведення легко провести, застосувавши, як і в теоремі 5, індукцію за n.

ЛІТЕРАТУРА

1. Lebesgue H. *Sur l'approximation des fonction*// Bull. Sci. Math. – 1898. – V.22. – P. 278–287.
2. Lebesgue H. *Sur les fonctions représentables analytiqment*// J. de Math. Sér.6. – 1905. – V.1. – P. 139–216.
3. Маслюченко В.К. Нарізно неперервні відображення і простори Кете. Дис. ... доктора фіз.-мат. наук. – Львів, 1999. – 345с.
4. Михайлюк В.В. Координатний метод і теорія нарізно неперервних відображень. Дис. ... доктора фіз.-мат. наук. – Львів, 2009. – 333с.
5. Собчук О.В. Берівська класифікація нарізно неперервних відображень та дискретні обернені задачі. Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1996. – 82с.
6. Карлова О.О. Берівська та лебеґівська класифікації векторнозначних та многозначних відображень. Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2006. – 137с.
7. Rudin W. *Lebesgue first theorem*// Math. Anal. a. Appl. Part B. Ed. by Nachbin. Adv. in Math. Suplem. Stud. 78, Academic Press, 1981. – P. 741–747.
8. Maslyuchenko V.K., Sobchuk O.V. *Baire classification and σ-metrizable spaces*// Mat. Stud. – 1994. – V.3. – P. 95–101. (in Ukrainian)
9. Маслюченко В.К., Михайлюк О.В., Собчук О.В. Дослідження про нарізно неперервні відображення, Матеріали міжнар. мат. конф., присв. пам. Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 192–246.
10. Каланча А.К., Маслюченко В.К. *Берівська класифікація векторнозначних нарізно неперервних функцій на добутках із скінченновимірним співмножником*// Зб. наук. пр. Кам'янець-Под. пед. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. (математика). – 1998. – Т.4. – С. 43–46.
11. Каланча А.К., Маслюченко В.К., Михайлюк В.В. *Застосування теореми Дугунджі до питань берівської класифікаціїї векторнозначних відображень*// Мат. методи і фіз.–мех. поля. – 2000. – Т.43, №4. – С. 12–17.
12. Каланча А.К., Маслюченко В.К. *Розмірність Лебеґа-Чеха та берівська класифікація векторнозначних нарізно неперервних відображень*// Укр. мат. журн. – 2003. – Т.55, №11. – С. 1596–1599.
13. Карлова О.О., Маслюченко В.К. *Нарізно неперервні відображення зі значеннями в не локально опуклих просторах*// Укр. мат. журн. – 2007. – Т.59, №11. – С. 1639–1645.
14. Banakh T.O. *(Metrically) quarter-stratifiable spaces and their applications in the theory of separately continuous functions*// Mat. Stud. – 2002. – V.18, №1. – P. 10–28.
15. Маслюченко В.К., Маслюченко О.В., Михайлюк В.В. *Паракомпактність і лебеґівська класифікація*// Мат. методи та фіз.-мех поля – 2004. – Т.47, №2. – С. 65–72.
16. Maslyuchenko V.K., Maslyuchenko O.V., Mykhaykyuk V.V., Sobchuk O.V. *Paracompactness and separately continuous mappings*// General Topology in Banach Spaces. Nova Sci. Publ. Nantintong-New York – 2001. – P. 147–169.
17. Hahn H. Reelle Functionen. 1. Teil. Punktfunktionen. – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft M.B. H., 1932. – 416p.
18. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
math.analysis.chnu@gmail.com

Надійшло 07.10.2010