УДК 517.53

Ю. Б. Захарко, П. В. Філевич

ХАРАКТЕРИСТИКА НЕВАНЛІННИ І МАКСИМУМ МОДУЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ З ВИПАДКОВИМИ НУЛЯМИ

Yu. B. Zakharko, P. V. Filevych. *The Nevanlinna characteristic and maximum modulus of entire functions of finite order with random zeros*, Mat. Stud. **36** (2011), 40–50.

Let (r_n) be a positive nondecreasing sequence of finite genus tending to $+\infty$, and $(\eta_n(\omega))$ be a sequence of independent random variables such that $\eta_n(\omega)$ are uniformly distributed on the circles $|z| = r_n$. Then for almost all ω the following assertion holds: if f is an entire function of finite order with zeros at the points $\eta_n(\omega)$ and only at them, then for every $\varepsilon > 0$ we have $\ln M_f(r) = o(T_f^{3/2}(r)\ln^{3+\varepsilon} T_f(r))$, $r \to +\infty$, where $M_f(r)$ is the maximum modulus and $T_f(r)$ is the Nevanlinna characteristic of the function f.

Ю. Б. Захарко, П. В. Филевич. *Характеристика Неванлинны и максимум модуля целых функций конечного порядка со случайными нулями* // Мат. Студії. – 2011. – Т.36, №1. – С.40–50.

Пусть (r_n) — положительная неубывающая стремящаяся к $+\infty$ последовательность конечного рода, а $(\eta_n(\omega))$ — последовательность независимых случайных величин таких, что $\eta_n(\omega)$ равномерно распределены на окружностях $|z| = r_n$. Тогда для почти всех ω имеет место такое утверждение: если f — целая функция конечного порядка с нулями в точках $\eta_n(\omega)$ и только в них, то для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение $\ln M_f(r) = o(T_f^{3/2}(r)\ln^{3+\varepsilon} T_f(r))$, $r \to +\infty$, где $M_f(r)$ — максимум модуля, а $T_f(r)$ — характеристика Неванлинны функции f.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathcal{E}$ — клас трансцендентних цілих функцій, а $\mathcal{Z}$ — клас комплексних послідовностей $\zeta = (\zeta_n)$ таких, що $0 < |\zeta_0| \le |\zeta_1| \le \dots$ і $\zeta_n \to \infty$, $n \to \infty$. Через $\mathcal{E}(\zeta)$, де $\zeta \in \mathcal{Z}$, позначимо клас функцій $f \in \mathcal{E}$, послідовність нулів яких, занумерована з урахуванням їх кратності в порядку неспадання модулів, співпадає з послідовністю ζ.

Для послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$ її рід q_ζ, лічильну функцію $n_\zeta(r)$ і усереднену лічильну функцію $N_\zeta(r)$ визначаємо відповідно за формулами

$$q_\zeta = \sup\left\{m \in \mathbb{N}_0 \colon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\zeta_n|^m} = +\infty\right\}, \quad n_\zeta(r) = \sum_{|\zeta_n|\le r} 1, \quad N_\zeta(r) = \int_0^r \frac{n_\zeta(t)}{t}dt.$$

Нехай $L \subset \mathbb{C}$. Будемо говорити, що множина L лежить на скінченній системі променів, якщо $0 \notin L$ і існує скінченна множина $M \subset [0, 2\pi)$ така, що $\arg z \in M$ для всіх $z \in L$ (через $\arg z$ позначаємо те значення $\operatorname{Arg} z$, яке належить до $[0, 2\pi)$). Для зручності вважатимемо, що порожня множина $\varnothing$ лежить на скінченній системі променів.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30B20, 30D20.

Покладемо $\ln^+ x = \ln\max\{x, 1\}$. Для функції $f \in \mathcal{E}$ визначимо її характеристику Неванлінни, максимум модуля і порядок відповідно за рівностями

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|d\theta, \quad M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z| = r\}, \quad \rho_f = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}.$$

Добре відомо [1, с.54], що для кожної $f \in \mathcal{E}$ правильні нерівності

$$T_f(r) \le \ln^+ M_f(r) \le \frac{\varrho + r}{\varrho - r} T_f(\varrho), \quad \varrho > r \ge 0. \tag{1}$$

Розглянемо довільну функцію $f \in \mathcal{E}$ скінченного порядку. Тоді $\ln\ln M_f(r) = O(\ln r)$, $r \to +\infty$, і, оскільки f є трансцендентною, то $\ln r = o(T_f(r))$, $r \to +\infty$. Отже,

$$\ln\ln M_f(r) = o(T_f(r)), \quad r \to +\infty. \tag{2}$$

Оцінка (2) є точною в класі цілих функцій скінченного порядку. Цей факт випливає з наступної теореми А. І. Щерби ([2]).

Теорема А [2]. *Нехай $\rho \in (0, +\infty)$, а h — додатна на $(x_0, +\infty)$ функція така, що $h(x) = o(x)$, $x \to +\infty$. Тоді існує $f \in \mathcal{E}$, для якої $\rho_f = \rho$ і*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{h(T_f(r))} = +\infty. \tag{3}$$

Вибираючи в (1) $\rho = Cr$, $C > 1$, з теореми А отримуємо такий наслідок.

Наслідок А. *Нехай $\rho \in (0, +\infty)$, а h — додатна на $(x_0, +\infty)$ функція така, що $h(x) = o(x)$, $x \to +\infty$. Тоді існує $f \in \mathcal{E}$, для якої $\rho_f = \rho$ і*

$$\forall\, C > 1\colon \quad \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln T_f(Cr)}{h(T_f(r))} = +\infty.$$

За умови певної "правильності" розподілу нулів цілої функції скінченного порядку, для неї може бути справедливим значно точніше за (2) співвідношення. Такий висновок дозволяє зробити наступна теорема Дж. Майлза ([3]) і наслідок з неї та (1).

Теорема B [3]. *Нехай $f \in \mathcal{E}$ — ціла функція скінченного порядку, множина усіх нулів якої лежить на скінченній системі променів. Тоді*

$$T_f(2r) = O(T_f(r)), \quad r \to +\infty. \tag{4}$$

Наслідок B. *Нехай $f \in \mathcal{E}$ — ціла функція скінченного порядку, множина усіх нулів якої лежить на скінченній системі променів. Тоді*

$$\ln M_f(r) = O(T_f(r)), \quad r \to +\infty. \tag{5}$$

Зауваження 1. Використовуючи добре відомі властивості характеристики Неванлінни [1, с.44–45], легко довести таке твердження: *якщо для цілих функцій f_1 і f_2 виконується співвідношення $T_{f_2}(r) = o(T_{f_1}(r))$, $r \to +\infty$, то $T_{f_1 f_2}(r) \sim T_{f_1}(r)$, $r \to +\infty$.*

Зауваження 2. Твердження теореми B і наслідку B елементарні, якщо функція $f \in \mathcal{E}$ має скінченну кількість нулів. Справді, у цьому випадку $f(z) = e^{P_k(z)} Q_m(z)$, де $P_k(z) =$

$a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k$ і $Q_m(z) = b_0 + \dots + b_m z^m$ — многочлени степеня $k \in \mathbb{N}$ і $m \in \mathbb{N}_0$ відповідно. Оскільки [4, с.24–26]

$$T_{e^{P_k}}(r) \sim \frac{|a_k|}{\pi} r^k, \quad r \to +\infty; \qquad T_{Q_m}(r) \sim m \ln r + O(1), \quad r \to +\infty, \tag{6}$$

то (див. зауваження 1)

$$T_f(r) \sim \frac{|a_k|}{\pi} r^k, \quad r \to +\infty, \tag{7}$$

звідки випливає (4), а тому й (5).

Зауваження 3. Нехай $\zeta \in \mathcal{Z}$, $f \in \mathcal{E}(\zeta)$. Тоді, як добре відомо (див., наприклад, [1, с.80]), $\rho_f \geq q_\zeta$. Отже, якщо функція $f \in \mathcal{E}(\zeta)$ має скінченний порядок, то послідовність ζ є скінченного роду.

Зауваження 4. Нехай послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$ є скінченного роду, а функція $f \in \mathcal{E}(\zeta)$ має скінченний порядок. Ввівши за рівністю

$$E(z,p) = \begin{cases} 1 - z, & p = 0; \\ (1-z)e^{z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}}, & p \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

первинний множник Вейєрштрасса, функцію f можемо зобразити [1, с. 80] у вигляді

$$f(z) = e^{P_k(z)} \pi_\zeta(z), \tag{8}$$

де $P_k(z) = a_0 + \ldots + a_k z^k$ — многочлен степеня $k \in \mathbb{N}_0$, а

$$\pi_\zeta(z) = \prod_{n=0}^{\infty} E\left(\frac{z}{\zeta_n}, q_\zeta\right) \tag{9}$$

є канонічним добутком Вейєрштрасса роду q_ζ, побудованим за послідовністю ζ. Добре відомо (див., наприклад, [1, с.79]), що $T_{\pi_\zeta}(r) = o(r^{q_\zeta+1})$, $r \to +\infty$. Тому, враховуючи перше зі співвідношень (6), зауваження 1 і відому нерівність $T_{f_1 f_2}(r) \leq T_{f_1}(r) + T_{f_2}(r)$ (f_1, f_2 — цілі функції), можемо зробити такі висновки: співвідношення

$$T_f(r) = o(r^{q_\zeta+1}), \quad r \to +\infty, \tag{10}$$

правильне тоді і лише тоді, коли $k \leq q_\zeta$; з нерівності

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{T_f(r)}{r^{q_\zeta+1}} > 0 \tag{11}$$

(чи рівносильної нерівності $k \geq q_\zeta + 1$) випливає, що для функції f виконується співвідношення (7), а тому й кожне зі співвідношень (4) і (5).

Згідно з наслідком B, послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$ скінченного роду, множина елементів якої лежить на скінченній системі променів, має наступну властивість: для кожної функції $f \in \mathcal{E}(\zeta)$ скінченного порядку оцінку (2) можна істотно уточнити. У нашій роботі буде показано, що близькою властивістю володіє більшість (у сенсі ймовірнісної міри) послідовностей $\zeta \in \mathcal{Z}$ скінченного роду.

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — деякий ймовірнісний простір, а $(\xi_n(\omega))$ — послідовність незалежних комплексних випадкових величин рівномірно розподілених на одиничному колі

$\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$. Поряд з послідовністю $\zeta \in \mathcal{Z}$ розглянемо випадкову послідовність $\zeta(\omega) = (\zeta_n \xi_n(\omega))$. Тоді $\zeta(\omega)$ — це послідовність незалежних випадкових величин таких, що $\zeta_n \xi_n(\omega)$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ є рівномірно розподіленою на колі $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = |\zeta_n|\}$. Зауважимо, що $q_{\zeta(\omega)} = q_\zeta$, $n_{\zeta(\omega)}(r) = n_\zeta(r)$ і $N_{\zeta(\omega)}(r) = N_\zeta(r)$ для майже всіх $\omega \in \Omega$.

Теорема 1. *Нехай послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$ має скінченний рід. Тоді випадкова послідовність $\zeta(\omega)$ майже напевно володіє наступною властивістю: якщо $f \in \mathcal{E}(\zeta(\omega))$ — ціла функція скінченного порядку, то для довільних $C > 1$ і $\varepsilon > 0$ правильне співвідношення*

$$T_f(Cr) = o\left(T_f^2(r) \ln^{6+\varepsilon} T_f(r)\right), \quad r \to +\infty. \tag{12}$$

Теорема 2. *Нехай послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$ має скінченний рід. Тоді випадкова послідовність $\zeta(\omega)$ майже напевно володіє наступною властивістю: для кожної цілої функції $f \in \mathcal{E}(\zeta(\omega))$ скінченного порядку і довільного $\varepsilon > 0$ виконується співвідношення*

$$\ln M_f(r) = o\left(T_f^{\frac{3}{2}}(r) \ln^{3+\varepsilon} T_f(r)\right), \quad r \to +\infty. \tag{13}$$

Теорема 2 є наслідком з теореми 1. При доведенні теореми 1 скористаємося наступним твердженням.

Теорема 3. *Нехай $\zeta \in \mathcal{Z}$ — довільна послідовність скінченного роду, а $f \in \mathcal{E}(\zeta)$ — деяка ціла функція, для якої виконується співвідношення* (10).

(i) Якщо h — визначена на $[0, +\infty)$ функція, що задовольняє нерівність $h(x) \geq x$ для всіх $x \geq 0$, і існують натуральне число $p \geq q_\zeta + 1$ та дійсні числа $\delta \in (0,1)$, $C_0 > 0$ і $r_0 \geq 0$ такі, що $T_f(r_0) > 0$ і

$$S_p(r, \delta) := \sum_{|\zeta_n| > \delta r} \left(\frac{r}{|\zeta_n|}\right)^p \leq C_0 h(T_f(r)), \quad r \geq r_0, \tag{14}$$

то для кожного $C_1 > 1$ існує $C_2 > 0$ таке, що

$$T_f(C_1 r) \leq C_2 h(T_f(r)), \quad r \geq r_0. \tag{15}$$

(ii) Якщо

$$D_m(r, \delta) = \sum_{|\zeta_n| > \delta r} \left(\frac{r}{\zeta_n}\right)^m,$$

то для довільного натурального числа $m \geq q_\zeta + 1$ та всіх $\delta \in (0,1)$ правильна нерівність $|D_m(r,\delta)| \leq C_m(\delta) T_f(r)$, $r \geq r_0$, де $C_m(\delta)$ — стала, залежна лише від m та δ.

В доведенні теореми 3 використовуємо деякі ідеї з роботи Дж. Майлза [3]. Нижче покажемо, що теорема B випливає з теореми 3.

2. Допоміжні результати. Насамперед зауважимо, що якщо $\zeta \in \mathcal{Z}$ і $f \in \mathcal{E}(\zeta)$, то $f(0) \neq 0$ (див. означення класу $\mathcal{Z}$). Тоді існує аналітична в деякому околі точки $z = 0$ функція $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m z^m$ така, що $f(z) = e^{g(z)}$, тобто $\ln f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m z^m$.

Ввівши для довільної цілої функції f її коефіцієнти Фур'є за формулами

$$c_m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad m \in \mathbb{Z},$$

сформулюємо наступну добре відому лему (див., наприклад, [1, с.16–17], [5, с.10]).

Лема 1. *Нехай* $\zeta \in \mathcal{Z}$. *Якщо* $f \in \mathcal{E}(\zeta)$, $\ln f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m z^m$ *в деякому околі точки* $z = 0$, *то*

$$c_0(r,f) = \operatorname{Re}\alpha_0 + N_\zeta(r);$$

$$c_m(r,f) = \frac{1}{2}\alpha_m r^m + \frac{1}{2m}\sum_{|\zeta_n|\le r}\left(\left(\frac{r}{\zeta_n}\right)^m - \left(\frac{\overline{\zeta_n}}{r}\right)^m\right), \quad m \in \mathbb{N};$$

$$c_{-m}(r,f) = \overline{c_m(r,f)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Використовуючи лему 1, легко отримати таке твердження (див., наприклад, [3]).

Лема 2. *Нехай послідовність* $\zeta \in \mathcal{Z}$ *є скінченного роду. Тоді для добутку Вейєрштраса* (10), *кожного* $m \in \mathbb{N}$ *і всіх* $r > 0$ *правильні рівності*

$$c_0(r,\pi_\zeta) = N_\zeta(r);$$

$$c_m(r,\pi_\zeta) = \frac{1}{2m}\sum_{|\zeta_n|\le r}\left(\left(\frac{r}{\zeta_n}\right)^m - \left(\frac{\overline{\zeta_n}}{r}\right)^m\right), \quad m \le q_\zeta;$$

$$c_m(r,\pi_\zeta) = -\frac{1}{2m}\left(\sum_{|\zeta_n|\le r}\left(\frac{\overline{\zeta_n}}{r}\right)^m + \sum_{|\zeta_n|>r}\left(\frac{r}{\zeta_n}\right)^m\right), \quad m \ge q_\zeta + 1.$$

Нехай $(\xi_n(\omega))$ — послідовність випадкових величин, заданих на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Тоді $(\xi_n(\omega))$ є, очевидно, послідовністю незалежних рівномірно розподілених на одиничному колі $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ випадкових величин тоді і лише тоді, коли існує послідовність $(\omega_n(\omega))$ незалежних рівномірно розподілених на відрізку $[0,1]$ випадкових величин така, що $\xi_n(\omega) = e^{2\pi i \omega_n(\omega)}$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ і $\omega \in \Omega$. Тому лему 3.4 з роботи А. К. Оффорда [6] можемо переформулювати в такому вигляді.

Лема 3. *Існує абсолютна стала* $C > 0$ *така, що для довільної послідовності* $(\xi_n(\omega))$ *незалежних рівномірно розподілених на одиничному колі* $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ *випадкових величин, кожної комплексної послідовності* (a_n) *і будь-яких* $N \in \mathbb{N}_0$ *та* $t > 0$ *правильна нерівність*

$$P\left(\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\xi_n(\omega)\right| \le t\left(\sum_{n=0}^{N}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \le C\max\left\{t, t^{\frac{1}{3}}\right\}.$$

Далі для кожного $r \in (0,R)$ і аналітичної в крузі $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$ функції f її характеристику Неванлінни $T_f(r)$ і максимум модуля $M_f(r)$ визначимо так, як і для цілої функції. Покладемо $K_f(r) = r(\ln M_f(r))'_+$. Якщо f не є тотожно сталою, то, як добре відомо, $K_f(r)$ — додатна неспадна на $(0,R)$ функція. Для довільної функції $f \in \mathcal{E}$, крім того, $K_f(r) \nearrow +\infty$, $r \to +\infty$.

Нехай f — аналітична в крузі $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$ функція, відмінна від тотожно сталої. Якщо існує $r_0 \in (0,R)$ таке, що $M_f(r_0) \ge 1$, то для довільних $r \in (r_0, R)$ і $\delta > 0$ справджується нерівність

$$\ln M_f(r) \le (1+\delta)T_f(r)\left(1 + \frac{2(1+\delta)}{\delta}\frac{K_f(r)}{\ln M_f(r)}\right). \tag{16}$$

Цей факт, з урахуванням того, що $\frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 + \frac{2}{e^x-1} \le 1 + \frac{2}{x}$, $x > 0$, випливає при $\varepsilon = \frac{\delta}{1+\delta}$ з наступної леми.

Лема 4. *Для кожної відмінної від тотожної сталої аналітичної в крузі* $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$ *функції* f *і довільних* $r \in (0, R)$ *та* $\varepsilon \in (0, 1)$ *правильна нерівність*

$$T_f(r) \geq \frac{\exp\left\{\varepsilon \frac{\ln^+ M_f(r)}{K_f(r)}\right\} - 1}{\exp\left\{\varepsilon \frac{\ln^+ M_f(r)}{K_f(r)}\right\} + 1}(1-\varepsilon)\ln^+ M_f(r). \tag{17}$$

Доведення. Насамперед зауважимо, що для аналітичної в крузі $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$ функції f за умови $0 \leq r < \varrho < R$ виконуються ([4, с.39–40]) нерівності (1).

Якщо $M_f(r) \leq 1$ для всіх $r \in (0, R)$, то нерівність (17) тривіальна. В протилежному випадку нехай $r_0 = \inf\{r \in (0, R)\colon M_f(r) > 1\}$. Тоді нерівність (17) потребує доведення лише у випадку $r \in (r_0, R)$. Для кожного такого r і довільного $r' \in (0, r)$ маємо

$$T_f(r) \geq \frac{r-r'}{r+r'}\ln^+ M_f(r') \geq \frac{r-r'}{r+r'}\ln M_f(r') = \frac{r-r'}{r+r'}\left(\ln M_f(r) - \int_{r'}^{r}\frac{K_f(t)}{t}dt\right) \geq$$
$$\geq \frac{r-r'}{r+r'}\left(\ln M_f(r) - K_f(r)\ln\frac{r}{r'}\right).$$

Прийнявши тут $r' = r\exp\left\{-\varepsilon\frac{\ln M_f(r)}{K_f(r)}\right\}$, отримуємо (17). □

3. Доведення теорем. Насамперед доведемо теорему 3 і покажемо, що з неї випливає теорема B.

Доведення теореми 3. Нехай $\zeta \in \mathcal{Z}$ — довільна послідовність скінченного роду, а $f \in \mathcal{E}(\zeta)$ — деяка ціла функція, для якої виконується співвідношення (10). Тоді f можна зобразити у вигляді (8), де $P_k(z) = \sum_{m=0}^{k}\alpha_m z^m$ — многочлен степеня $k \leq q\colon = q_\zeta$ (див. зауваження 4). Якщо $k < q$, то для зручності покладемо $\alpha_m = 0$ для кожного цілого $m \in [k+1, q]$. Оскільки $c_m(r, f) = c_m(r, e^{P_k}) + c_m(r, \pi_\zeta)$, то, згідно з лемами 1 і 2, для всіх $r > 0$ маємо

$$c_0(r, f) = \operatorname{Re}\alpha_0 + N_\zeta(r); \tag{18}$$

$$c_m(r, f) = \frac{1}{2}\alpha_m r^m + \frac{1}{2m}\sum_{|\zeta_n|\leq r}\left(\left(\frac{r}{\zeta_n}\right)^m - \left(\frac{\overline{\zeta_n}}{r}\right)^m\right), \quad m \in \{1, \ldots, q\}; \tag{19}$$

$$c_m(r, f) = -\frac{1}{2m}\left(\sum_{|\zeta_n|\leq r}\left(\frac{\overline{\zeta_n}}{r}\right)^m + \sum_{|\zeta_n|>r}\left(\frac{r}{\zeta_n}\right)^m\right), \quad m \in \{q+1, q+2, \ldots\}. \tag{20}$$

Якщо $q = 0$, то всі наведені нижче міркування, в яких використовується (19), слід опустити.

Доведемо спочатку твердження (i). Нехай натуральне число $p \geq q+1$ та дійсні числа $\delta \in (0, 1)$, $C_0 > 0$ і $r_0 \geq 0$ такі, що виконується (14). Зафіксуємо довільне $C_1 > 1$. Далі через C_3, C_4, … позначатимемо додатні сталі, залежні хіба що від C_1.

Відомо (див., наприклад, [5, с.14]),

$$|c_m(r, f)| \leq 2T_f(r), \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{21}$$

Оскільки $T_f(r_0) > 0$, то з (18) і (21) маємо $N_\zeta(r) \leq |c_0(r, f)| + |\operatorname{Re}\alpha_0| \leq C_3 T_f(r)$, $r \geq r_0$. Використовуючи (14), отримуємо

$$n_\zeta(C_1 r) - n_\zeta(\delta r) \leq \sum_{\delta r < |\zeta_n| \leq Cr}\left(\frac{C_1 r}{|\zeta_n|}\right)^p \leq C_1^p S_p(r, \delta) \leq C_4 h(T_f(r)), \quad r \geq r_0. \tag{22}$$

Враховуючи, що ([1, с.55])

$$n_\zeta(\delta r) \le \frac{N_\zeta(r)}{\ln\frac{1}{\delta}} \le \frac{C_3 T_f(r)}{\ln\frac{1}{\delta}} = C_5 T_f(r), \quad r \ge r_0,$$

і $h(x) \ge x$, $x \ge 0$, з (22) маємо

$$n_\zeta(C_1 r) \le C_4 h(T_f(r)) + C_5 T_f(r) \le C_6 h(T_f(r)), \quad r \ge r_0. \tag{23}$$

Нехай $m \in \{1, \dots, q\}$. Тоді, згідно з (19),

$$\left(\frac{\delta}{C_1}\right)^m c_m(C_1 r, f) = \left(\frac{\delta}{C_1}\right)^m \left(\frac{\alpha_m}{2}(C_1 r)^m + \frac{1}{2m}\sum_{|\zeta_n|\le C_1 r}\left(\left(\frac{C_1 r}{\zeta_n}\right)^m - \left(\frac{\overline{\zeta_n}}{C_1 r}\right)^m\right)\right) =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}(\delta r)^m + \frac{1}{2m}\sum_{|\zeta_n|\le C_1 r}\left(\left(\frac{\delta r}{\zeta_n}\right)^m - \left(\frac{\delta\overline{\zeta_n}}{C_1^2 r}\right)^m\right) =$$

$$= c_m(\delta r, f) + \frac{1}{2m}\sum_{\delta r<|\zeta_n|\le C_1 r}\left(\frac{\delta r}{\zeta_n}\right)^m + \frac{1}{2m}\sum_{|\zeta_n|\le \delta r}\left(\frac{\overline{\zeta_n}}{\delta r}\right)^m + \frac{1}{2m}\sum_{|\zeta_n|\le C_1 r}\left(\frac{\delta\overline{\zeta_n}}{C_1^2 r}\right)^m,$$

звідки, скориставшись (21) і (23), отримуємо

$$|c_m(C_1 r, f)| \le \left(\frac{C_1}{\delta}\right)^m \left(|c_m(\delta r, f)| + \frac{1}{2m}n_\zeta(C_1 r) + \frac{1}{2m}n_\zeta(\delta r)\right) + \frac{1}{2m}n_\zeta(C_1 r) \le$$

$$\le \left(\frac{C_1}{\delta}\right)^q C_7 h(T_f(r)) + C_8 h(T_f(r)) = C_9 h(T_f(r)) \qquad (r \ge r_0,\ m \in \{1, \dots, q\}). \tag{24}$$

Нехай $m \in \{q+1, q+2, \dots\}$. Покладемо

$$b_m(r, f) = -\frac{1}{2m}\sum_{|\zeta_n|>r}\left(\frac{r}{\zeta_n}\right)^m.$$

Якщо $q+1 \le m \le p$, то

$$\left(\frac{\delta}{C_1}\right)^m b_m(C_1 r, f) = -\left(\frac{\delta}{C_1}\right)^m \frac{1}{2m}\sum_{|\zeta_n|>C_1 r}\left(\frac{C_1 r}{\zeta_n}\right)^m = -\frac{1}{2m}\sum_{|\zeta_n|>C_1 r}\left(\frac{\delta r}{\zeta_n}\right)^m =$$

$$= c_m(\delta r, f) + \frac{1}{2m}\sum_{\delta r<|\zeta_n|\le C_1 r}\left(\frac{\delta r}{\zeta_n}\right)^m + \frac{1}{2m}\sum_{|\zeta_n|\le \delta r}\left(\frac{\overline{\zeta_n}}{\delta r}\right)^m,$$

а тому з (21) і (23) випливає, що

$$|b_m(C_1 r, f)| \le \left(\frac{C_1}{\delta}\right)^p \left(|c_m(\delta r, f)| + \frac{1}{2m}n_\zeta(C_1 r) + \frac{1}{2m}n_\zeta(\delta r)\right) \le$$

$$\le C_{10} h(T_f(r)) \qquad (r \ge r_0,\ m \in \{q+1, \dots, p\}). \tag{25}$$

Якщо ж $m \ge p+1$, то

$$|b_m(C_1 r, f)| \le \frac{1}{2m}\sum_{|\zeta_n|>C_1 r}\left(\frac{C_1 r}{|\zeta_n|}\right)^m \le \frac{1}{2m}\sum_{|\zeta_n|>C_1 r}\left(\frac{C_1 r}{|\zeta_n|}\right)^p \le$$

$$\le \frac{C_1^p}{2m} S_p(r, \delta) \le \frac{1}{m} C_{11} h(T_f(r)) \qquad (r \ge r_0,\ m \in \{p+1, p+2, \dots\}). \tag{26}$$

Оскільки, згідно з (20),

$$c_m(C_1r,f)=b_m(C_1r,f)-\frac{1}{2m}\sum_{|\zeta_n|\le C_1r}\left(\frac{\overline{\zeta_n}}{C_1r}\right)^m,\quad m\in\{q+1,q+2,\dots\},$$

то

$$|c_m(C_1r,f)|\le|b_m(C_1r,f)|+\frac{1}{2m}n_\zeta(C_1r),\quad m\in\{q+1,q+2,\dots\}. \tag{27}$$

Тому, враховуючи нерівності (23)–(27), отримуємо

$$|c_m(C_1r,f)|\le C_{12}h(T_f(r))\qquad (r\ge r_0,\ m\in\{1,\dots,p\}); \tag{28}$$

$$|c_m(C_1r,f)|\le\frac{1}{m}C_{13}h(T_f(r))\qquad (r\ge r_0,\ m\in\{p+1,p+2,\dots\}). \tag{29}$$

Крім того, з рівності (18) маємо $c_0(C_1r,f)=c_0(r,f)+N_\zeta(C_1r)-N_\zeta(r)$. Отже, скориставшись (21) і (23), одержимо

$$|c_0(C_1r,f)|\le|c_0(r,f)|+N_\zeta(C_1r)-N_\zeta(r)=2T_f(r)+\int_r^{C_1r}\frac{n_\zeta(t)}{t}dt\le$$
$$\le 2T_f(r)+n_\zeta(C_1r)\ln C_1\le C_{14}h(T_f(r)),\quad r\ge r_0. \tag{30}$$

Позначимо

$$m_2(r,f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\ln|f(re^{i\theta})|)^2d\theta\right)^{\frac12}.$$

Оскільки $T_f(r)\le m_2(r,f)$ (див., наприклад, [5, с.17]), то, використовуючи рівність Парсеваля і нерівності (28)–(30), для всіх $r\ge r_0$ маємо

$$T_f^2(C_1r)\le m_2^2(C_1r,f)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}|c_m(C_1r,f)|^2=$$
$$=|c_0(C_1r,f)|^2+2\sum_{m=1}^{p}|c_m(C_1r,f)|^2+2\sum_{m=p+1}^{+\infty}|c_m(C_1r,f)|^2\le$$
$$\le\left(C_{14}^2+2pC_{12}^2+2C_{13}^2\sum_{m=p+1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}\right)h^2(T_f(r))=C_2^2h^2(T_f(r)),$$

тобто виконується (15). Твердження (i) доведено.

Перейдемо до доведення твердження (ii). Для довільного натурального числа $m\ge q_\zeta+1$ та кожного $\delta\in(0,1)$ з (20) маємо

$$\delta^mD_m(r,\delta)=\sum_{|\zeta_n|>\delta r}\left(\frac{\delta r}{\zeta_n}\right)^m=-2m\,c_m(\delta r,f)-\sum_{|\zeta_n|\le\delta r}\left(\frac{\overline{\zeta_n}}{\delta r}\right)^m,$$

звідки випливає, що

$$|D_m(r,\delta)|\le\frac{1}{\delta^m}\left(2m|c_m(\delta r,f)|+n_\zeta(\delta r)\right)\le\frac{1}{\delta^m}\left(4mT_f(\delta r)+\frac{N_\zeta(r)}{\ln\frac{1}{\delta}}\right)\le$$
$$\le C_m(\delta)T_f(r),\quad r\ge r_0. \qquad \square$$

Доведення теореми B.. Нехай $f \in \mathcal{E}$ — ціла функція скінченного порядку, множина L усіх нулів якої лежить на скінченній системі променів. Розглядаємо лише випадок, коли множина L є нескінченною (див. зауваження 2). Тоді $f \in \mathcal{E}(\zeta)$, де $\zeta \in \mathcal{Z}$ — послідовність скінченного роду. Використовуючи класичну теорему Вейля так само, як це зроблено в [7] (див. також [3, с.162]), легко довести існування натурального числа $p \geq q_\zeta + 1$ такого, що $\cos(p \arg \zeta_n) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$.

З огляду на зауваження 4, можемо вважати, що для функції f виконується співвідношення (10). Нехай $\delta \in (0,1)$ і $r_1 \geq 0$ — фіксовані числа, причому $T_f(r_1) > 0$. Використовуючи твердження (ii) теореми 3, маємо

$$S_p(r,\delta) \leq \sqrt{2} \sum_{|\zeta_n|>\delta r} \left(\frac{r}{|\zeta_n|}\right)^p \cos(p \arg \zeta_n) =$$
$$= \sqrt{2}\operatorname{Re} D_p(r,\delta) \leq \sqrt{2}|D_p(r,\delta)| \leq C_0 T_f(r), \quad r \geq r_2.$$

Тому, застосовуючи твердження (i) теореми 3 з $h(x) = x$, можемо стверджувати, що для кожного $C_1 > 1$ існує $C_2 > 0$ таке, що $T_f(C_1 r) \leq C_2 T_f(r)$ для всіх $r \geq r_0$, де $r_0 = \min\{r_1, r_2\}$. Звідси, очевидно, і випливає твердження теореми B. $\square$

Доведення теореми 1. Нехай послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$ має скінченний рід, $(\xi_n(\omega))$ — послідовність незалежних рівномірно розподілених на одиничному колі $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ випадкових величин, $\zeta(\omega) = (\zeta_n \xi_n(\omega))$ і $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega\colon |\xi_n(\omega)| = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0\}$. Зрозуміло, що $P(\Omega_0) = 1$.

Покладемо $m = q_\zeta + 1$, $p = 2m$,

$$D(r,\omega) = \sum_{|\zeta_n|>\frac{r}{2}} \left(\frac{r}{\zeta_n \xi_n(\omega)}\right)^m, \quad S(r) = \sum_{|\zeta_n|>\frac{r}{2}} \left(\frac{r}{|\zeta_n|}\right)^p.$$

Розглянемо два можливі випадки щодо $S(r)$.

Випадок 1: $S(r) = O(1)$, $r \to +\infty$. Зафіксуємо довільне $\omega \in \Omega_0$ і нехай функція $f \in \mathcal{E}(\zeta(\omega))$ має скінченний порядок. Доведемо, що тоді справджується (4). Якщо для f правильна нерівність (11), то все доведено (див. зауваження 4). Якщо ж для f нерівність (11) не виконується, тобто правильне співвідношення (10), то, враховуючи очевидні нерівності $0 < S(r) \leq T_f(r)$, $r \geq r_0$, за теоремою 3 з $h(x) = x$ для f знову ж отримуємо (4). Оскільки з (4) для довільних $C > 1$ і $\varepsilon > 0$ випливає (12), то теорему 1 у випадку 1 доведено.

Випадок 2: $S(r) \neq O(1)$, $r \to +\infty$. Нехай (n_k) зростаюча послідовність цілих чисел така, що $n_0 = 0$ і $|\zeta_n| = |\zeta_{n_k}|$ для всіх $n \in [n_k, n_{k+1} - 1]$ та $k \in \mathbb{N}_0$. Легко бачити, що $S(0) = 0$ і функція $S(r)$ є неперервною зростаючою на $[0, 2|\zeta_0|)$, а також на кожному з півінтервалів $\big[2|\zeta_{n_k}|, 2|\zeta_{n_{k+1}}|\big)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Точки $2|\zeta_{n_k}|$, $k \in \mathbb{N}_0$, і лише вони є точками розриву функції $S(r)$, причому стрибок функції в кожній з цих точок є від'ємним і дорівнює $S(2|\zeta_{n_k}|) - S(2|\zeta_{n_k}| - 0) = n_k - n_{k+1}$. Отже, функція $S(r)$ набуває на $[0, +\infty)$ усіх значень з $[0, +\infty)$. З огляду на сказане, для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ існує число

$$s_k = \min\{r \in [0, +\infty)\colon S(r) = e^k\}.$$

Зрозуміло, що послідовність (s_k) є додатною зростаючою до $+\infty$.

Для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ покладемо

$$t_k = \frac{1}{(k+1)^3 \ln^6(k+3)}, \qquad A_k = \left\{\omega \in \Omega \colon |D(s_k, \omega)| \le t_k \sqrt{S(s_k)}\right\}.$$

Враховуючи, що $\left(\frac{1}{\xi_n^m(\omega)}\right)$, як і $(\xi_n(\omega))$, є послідовністю незалежних рівномірно розподілених на одиничному колі $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ випадкових величин, за лемою 3 отримуємо

$$P(A_k) \le C t^{\frac{1}{3}} = \frac{C}{(k+1)\ln^2(k+3)}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{31}$$

Нехай B — подія, яка полягає в тому, що серед подій A_k виконується лише скінченна кількість подій. Оскільки, згідно з (31), $\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) < +\infty$, то за лемою Бореля-Кантеллі $P(B) = 1$.

Зафіксуємо довільне $\omega \in B \cap \Omega_0$ і нехай $f \in \mathcal{E}(\zeta(\omega))$ — ціла функція скінченного порядку. Доведемо, що для довільних $C > 1$ і $\varepsilon > 0$ виконується співвідношення (12), звідки й буде випливати твердження теореми 1.

З огляду на зауваження 4, досить розглянути випадок, коли для f виконується співвідношення (10). Тоді за твердженням (ii) теореми 3 маємо

$$|D(r, \omega)| \le C_1 T_f(r), \quad r \ge r_0. \tag{32}$$

Крім того, оскільки $\omega \notin A_k$, $k \ge k_0$, і $k = \ln S(s_k)$, то

$$|D(s_k, \omega)| > t_k \sqrt{S(s_k)} = \frac{\sqrt{S(s_k)}}{(\ln S(s_k) + 1)^3 \ln^6(\ln S(s_k) + 3)}, \quad k \ge k_0,$$

звідки, скориставшись (32), отримуємо

$$S(s_k) \le T_f^2(s_k) \ln^6 S(s_k) \ln^{13} \ln S(s_k), \quad k \ge k_1. \tag{33}$$

Прологарифмувавши нерівність (33), бачимо, що $\ln S(s_k) \le 3 \ln T_f(s_k),\ k \ge k_2$. Тоді

$$S(s_k) \le T_f^2(s_k) \ln^6 T_f(s_k) \ln^{14} \ln T_f(s_k), \quad k \ge k_3. \tag{34}$$

Нехай $r \in [s_k, s_{k+1})$ і $k \ge k_3$. Тоді, скориставшись (34), отримуємо

$$S(r) \le S(s_{k+1}) = eS(s_k) \le eT_f^2(s_k) \ln^6 T_f(s_k) \ln^{14} \ln T_f(s_k) \le eT_f^2(r) \ln^6 T_f(r) \ln^{14} \ln T_f(r).$$

Отже, для $r \ge r_1$ маємо $S(r) \le T_f^2(r) \ln^6 T_f(r) \ln^{15} \ln T_f(r)$. За твердженням (i) теореми 3 існує $r_2 \ge 0$ таке, що для кожного $C_1 > 1$ правильна нерівність

$$T_f(C_1 r) \le C_2 T_f^2(r) \ln^6 T_f(r) \ln^{15} \ln T_f(r), \quad r \ge r_2,$$

де стала C_2 залежить лише від C_1. Зрозуміло, що тоді для довільних $C > 1$ і $\varepsilon > 0$ виконується співвідношення (12). □

Доведення теореми 2. З огляду на теорему 1, досить довести таке твердження: якщо для функції $f \in \mathcal{E}$ існує стала $C > 1$ така, що для кожного $\varepsilon > 0$ виконується співвідношення (12), то для кожного $\varepsilon > 0$ виконується також співвідношення (13).

Перейдемо до доведення цього твердження. Нехай $r_0 = \min\{r \geq 0\colon M_f(r) \geq 1\}$, $E_1 = \{r > r_0\colon K_f(r) < \ln M_f(r)\}$, $E_2 = (r_0, +\infty)\backslash E_1$. Прийнявши $\delta = 1$, нерівність (16) запишемо у вигляді

$$\ln M_f(r) \leq 2T_f(r)\left(1 + \frac{4K_f(r)}{\ln M_f(r)}\right), \quad r > r_0. \tag{35}$$

З (35) випливає, що

$$\ln M_f(r) \leq 10T_f(r), \quad r \in E_1. \tag{36}$$

Якщо ж $r \in E_2$, то з (35) отримуємо

$$\ln M_f(r) \leq 2T_f(r)\left(\frac{K_f(r)}{\ln M_f(r)} + \frac{4K_f(r)}{\ln M_f(r)}\right) = 10T_f(r)\frac{K_f(r)}{\ln M_f(r)},$$

звідки маємо

$$\ln^2 M_f(r) \leq 10T_f(r)K_f(r), \quad r \in E_2. \tag{37}$$

Далі нехай $C_0 \in (1, C)$. Тоді, використовуючи (1), для всіх $r \geq r_1$ одержуємо

$$K_f(r)\ln C_0 \leq \int_r^{C_0 r} \frac{K_f(t)}{t}dt = \ln M_f(C_0 r) - \ln M_f(r) \leq \ln M_f(C_0 r) \leq \frac{C + C_0}{C - C_0}T_f(Cr).$$

Звідси і з (12) для кожного $\varepsilon > 0$ маємо

$$K_f(r) = o\left(T_f^2(r)\ln^{6+\varepsilon} T_f(r)\right), \quad r \to +\infty. \tag{38}$$

З (37) і (38) випливає, що

$$\ln M_f(r) = o\left(T_f^{3/2}(r)\ln^{3+\varepsilon} T_f(r)\right), \quad E_2 \ni r \to +\infty. \tag{39}$$

Нарешті, з (36) і (39) отримуємо (13). Сформульоване вище твердження, а з ним і теорему 2 доведено. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 590 с.
2. Щерба А.И. *О характеристиках роста целых функций*// Теория функций, функ. анализ и их прилож. – 1985. – Т.44. – С. 136–141.
3. Miles J. *On the growth of meromorphic functions with radially distributed zeros and poles*// Pacific J. Math. – 1986. – V.122, №1. – P. 147–167.
4. Хейман У. Мероморфные функции. – М.: Мир, 1966. – 288 с.
5. Кондратюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов: Вища школа, 1988. – 196 с.
6. Offord A.C. *The distribution of the value of a random function in the unit disk*// Studia Math. – 1972. – V.41. – P. 71–106.
7. Miles J. *On entire functions of infinite order with radially distributed zeros*// Pacific J. Math. – 1979. – V.81, №1. – P. 131–157.

Львівський національний університет ветеринарної
медицини та біотехнологій ім. С. З. Ґжицького

Надійшло 12.10.2010

Після переробки 12.05.2011